

养老金预测相关模型及替代率、收支平衡的分析

吴菊凤

(浙江邮电职业技术学院 基础部, 浙江 绍兴 312016)

摘要:企业职工养老基金的收支平衡,关系到社会稳定和向老龄化社会的顺利过渡.利用微分方程、高阶函数建立了预测远期社会平均工资及职工在职时的工资模型,并经分析对比,选用与实际吻合较好的模型,以3种年龄段为例,计算分析了它们的养老金、替代率、收支等情况.结果表明:职工年平均工资高、退休年龄迟于60岁、缴费年数多于20年,则替代率高,能接近目标值;若基础养老金按现收现付方式管理,且按目前法定年龄退休,则缺口较大.因此,要从政策与管理等多方面采取有效措施,保障养老金保险制度顺利实施.

关键词:指数增长模型;逻辑斯蒂模型;高阶函数模型;替代率;收支平衡

中图分类号:O13

文献标识码:A

文章编号:1001-5132(2012)03-0042-06

20世纪80年代实行养老保险社会统筹试点开始进行改革探索,90年代改革全面展开并不断深化,建立并统一了企业职工基本养老保险制度.2005年,国务院制定了《关于完善企业职工基本养老保险制度的决定》(国发38号文件),建立多层次养老保险体系,努力实现养老保险制度的可持续发展^[1].2010年发布的《中华人民共和国社会保险法》(35号文件)更加明确了基本养老保险的各项细则^[2].

企业职工养老金的发放与职工在职时的工资及社会平均工资有着密切的关系.养老保险管理的一个重要目标是养老保险基金的收支平衡,它关系到社会稳定和老龄化社会的顺利过渡.影响养老保险基金收支平衡的一个重要因素是替代率,按照国家对基本养老保险制度的总思路,未来基本养老保险的目标替代率确定为58.5%;如果替代率较低,退休职工的生活水准低,养老保险基金收支平衡容易维持;如果替代率较高,退休职工的生活水准高,养老保险基金收支平衡较难维持.

1 养老金相关概念

1.1 基本概念

养老保险基金是企业把职工工资总额的20%

缴纳到社会统筹基金账户,把职工个人工资的8%缴纳到个人账户,这两个账户合称为养老保险基金.替代率是指职工刚退休时的养老金占退休前工资的比例.养老保险基金收支平衡是指缴存的养老保险金与其领取的养老金之间达到平衡,否则称为缺口.

1.2 养老金计算方法

参加基本养老保险的个人,达到法定退休年龄时累计缴费满15年的,按月领取基本养老金.

计算公式如下:

养老金=基础养老金+个人账户养老金;

个人账户养老金=个人账户储存额÷计发月数;

基础养老金=(全省上年度在岗职工的月平均工资+本人指数化的月平均缴费工资)÷2×缴费年限×1%.

本人指数化的月平均缴费工资=全省上年度在岗职工月平均工资×本人平均缴费指数.若记 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 为参保人员退休前1年,2年, ..., m 年的本人缴费工资; $c_1, c_2, \dots, c_m$ 为参保人员退休前1年,2年, ..., m 年全国/省/地市“职工平均工资”或称“社会平均工资”; n 为企业和职工实际缴纳基本养老保险费的月数合计; S 为本人指数化的月平均缴

费工资, 则:

$$S = \frac{x_1 \cdot \frac{c_1}{c_1} + x_2 \cdot \frac{c_1}{c_2} + x_3 \cdot \frac{c_1}{c_3} + \dots + x_m \cdot \frac{c_1}{c_m}}{n} = c_1 \sum_{i=1}^m \frac{x_i / c_i}{12m}.$$

1.3 基本问题

主要基本问题是: 养老金的计发问题, 养老保险基金的管理运行问题, 以及养老金制度的顺利实施问题.

2 模型的建立与求解

2.1 企业职工社会平均工资预测模型

2.1.1 模型建立

根据我国目前经济发展的形势和对山东省职工历年平均工资增长率的计算分析, 企业职工年平均工资增长率正比于其自身.

即若设企业职工年平均工资增长率为常数 r , 年平均工资 $c(t)$, 则:

$$\frac{c(t + \Delta t) - c(t)}{\Delta t} = rc(t),$$

若将 $c(t)$ 视为 t 的可导函数, 令 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 则得微分方程: $dc/dt = rc$, 设初始条件: $c|_{t=0} = c_0$, 解得指数增长模型为:

$$c(t) = c_0 e^{r(t-t_0)}. \quad (1)$$

如果 $r > 0$ 时, 那么模型(1)表示企业职工的平均工资呈现指数增长的情况, 且

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} c_0 e^{r(t-t_0)} = +\infty.$$

但实际上, 由于资源、教育、环境、就业、消费等因素的影响, 我国的经济不可能无限增长, 职工年平均工资也不可能无限增大, 模型(1)也不能预测远期职工年平均工资. 因此, 运用荷兰数学、生活学家弗尔哈斯特的修改方法^[3]:

$$\frac{dc}{dt} = rc - bc^2, 0 < b \ll r,$$

其中, r, b 称为“生命系数”, 由于 $b \ll r$, 因此, 当 c 不太大时, $-bc^2$ 相对于 rc 可以忽略不计, 而当 c 很大时, $-bc^2$ 就不可忽略, 它降低了企业职工平均工资的增长速度, 于是得到微分方程:

$$\frac{dc}{dt} = rc - bc^2, \text{ 且满足 } c|_{t=t_0} = c_0, \text{ 求得:}$$

$$c = \frac{rc_0}{bc_0 + (r - bc_0) \cdot e^{-r(t-t_0)}}.$$

目前发达国家的经济和工资增长率都较低, 这说明我国经济接近于发达国家的经济水平时(即最大化地利用了各种经济资源时), 企业职工的平均工资会接近于饱和状态, 记:

$$c_m = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{rc_0}{bc_0 + (r - bc_0) \cdot e^{-r(t-t_0)}} = \frac{r}{b},$$

可得逻辑斯蒂(Logistic)模型:

$$c = \frac{c_m}{1 + (c_m / c_0 - 1)e^{-r(t-t_0)}}. \quad (2)$$

2.1.2 参数估计

参数估计的数据来源于 2011 年全国赛题 C 题的附件 1^[3]. 若将 1978 年看成 $t = t_0$, 1979 年看成 t , 则 $r = \ln(c(t) / c(t_0)) = \ln(632 / 566) = 0.110925$, 代入模型(1)得到模型为:

$$c = 1.01236 \times 10^{-92} \times 1.116608^t, t \geq 1978. \quad (1-1)$$

若用最小二乘准则来估计模型(1)中的参数. 最小二乘准则如下: 寻求函数 $y = f(x)$, 使 n 个点 $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$ 与曲线 $y = f(x)$ 的距离的平方和最小, 即使

$$d = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - y_i]^2,$$

达到最小. 为此, 先将模型(1)转化成线性的形式:

$c = c_0 e^{r(t-t_0)} \Rightarrow \ln c = \ln c_0 + r(t-t_0) \Rightarrow C = a + r\Delta t$ ^[3], 其中, $C = \ln c, a = \ln c_0, \Delta t = t - t_0$, 则得:

$$d = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - C_i]^2 = \sum_{i=1}^n [(a + r\Delta t_i) - C_i]^2,$$

要使 d 最小, 必须满足:

$$\begin{cases} \frac{\partial d}{\partial a} = 0, \\ \frac{\partial d}{\partial r} = 0, \end{cases} \quad \text{即,} \quad \begin{cases} an + r \sum_{i=1}^n \Delta t_i = \sum_{i=1}^n C_i, \\ a \sum_{i=1}^n \Delta t_i + r(\Delta t_i)^2 = \sum_{i=1}^n C_i \Delta t_i, \end{cases}$$

记:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t_1 \\ 1 & \Delta t_2 \\ \dots & \dots \\ 1 & \Delta t_{n-1} \\ 1 & \Delta t_n \end{pmatrix}_{n \times 2}, \quad A = (a, r)^T,$$

$$C = (\ln c_0, \ln c_1, \dots, \ln c_n)^T,$$

则上述方程可表示成 $R^T R A = R^T C$. 当 $R^T R$ 可逆时, 上述线性方程组有唯一解时, 得:

$$A = (R^T R)^{-1} R^T C \quad [4].$$

以山东省从 1978 到 2010 年职工年平均工资为参考数据^[4], 利用 Matlab 可求得: $a = 6.3589$, $r = 0.1182$, $c(t) = e^{6.3589 + 0.1182(t-t_0)}$, 于是由模型(1)可得:

$$c(t) = 1.6404 \times 10^{-99} \times 1.125469^t. \quad (1-2)$$

模型(2)的参数估计如下. 根据文献[5], 中国 2050 年要成为中等发达国家, 届时人均最低月薪必须达到 1300 美元^[5]. 由此推知, 到 2050 年我国职工的年平均工资约为 196451 元, 将 $c|_{t_0=1978} = 566$, $c|_{t=2050} = 196451$ 以及模型(1-2)中的 $r = 0.1182$ 代入模型(2), 可得 $c_m = 211170$, 可求得:

$$C = \frac{211170}{1 + 1.2839 \times 10^{104} \times e^{-0.1182t}}. \quad (2-1)$$

考虑到我国经济发展的特殊轨迹, 20 世纪 90 年代以后较改革开放头几年发展较快且稳, 而笔者在此主要是分析未来的情况, 因此, 以 1995 年为起点建立模型. 将 $y|_{t_0=1995} = 5145$, $y|_{t=2050} = 196451$, $r = 0.1182$, 求得:

$$C = \frac{208090}{1 + 1.015 \times 10^{104} \times e^{-0.1182t}}. \quad (2-2)$$

模型检验分析见表 1.

表 1 省实际平均工资与预测省平均工资的误差分析表

模型	(1-1)	(1-2)	(2-1)	(2-2)
误差绝对值的平均值	2562	1491	1857	932
结论	模型(2-2)预测的结果较为精确			

根据表 1 数据和模型(2-2)走势图(图 1)可知, 用模型(2-2)预测未来企业职工平均工资较合理. 因此, 用模型(2-2)预测省年平均工(表 2).

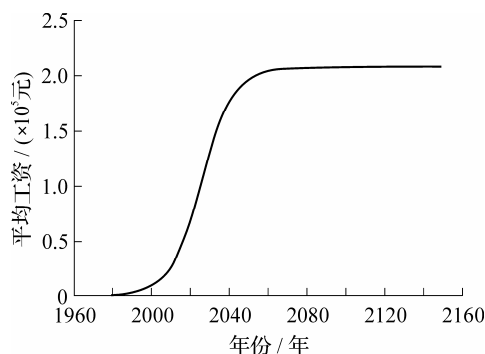


图 1 模型(2-2)的企业职工平均工资随年份变化的图象

2.2 在职企业职工工资预测模型

2.2.1 模型准备

数据来源于 2011 年全国赛题 C 题的附件 2^[6]. 由于附件 2 中的月收入范围不利于数据的统计, 因

此取各年龄段月收入范围的中值, 然后通过加权平均值算出各年龄段的平均工资(表 3).

表 2 模型(2-2)预测的 2000~2050 年的省年平均年工资

年份	平均年 工资/元	年份	平均年 工资/元	年份	平均年 工资/元
2000	9110	2017	52975	2034	149429
2001	10197	2018	57776	2035	154278
2002	11407	2019	62836	2036	158857
2003	12750	2020	68139	2037	163161
2004	14241	2021	73662	2038	167185
2005	15891	2022	79378	2039	170931
2006	17715	2023	85257	2040	174403
2007	19727	2024	91263	2041	177608
2008	21942	2025	97356	2042	180557
2009	24372	2026	103496	2043	183260
2010	27033	2027	109640	2044	185730
2011	29937	2028	115745	2045	187982
2012	33096	2029	121769	2046	190029
2013	36519	2030	127673	2047	191886
2014	40216	2031	133421	2048	193566
2015	44190	2032	138981	2049	195084
2016	48444	2033	144324	2050	196453

表 3 各年龄段的平均工资和企业平均工资

年龄段/岁	各年龄段的月平均工资/元
20~24	1726
25~29	2076
30~34	2532
35~39	2731
40~44	2987
45~49	3208
50~54	3118
55~59	2962

2.2.2 模型的建立

企业职工的工资不可能是一直上升或不变的, 会随着工龄的增长而升降, 因此建立高阶函数模型来预测较合理. 设各年龄段的中值为 t , 相应年龄职工的平均工资为 x , 利用最小二乘法, 数据参考表 3.

设模型为: $x = at^2 + bt + d$, 要使:

$$\sum_{i=1}^8 \delta_i^2 = \sum_{i=1}^8 [(at_i^2 + bt_i + d) - x_i]^2, \text{ 最小, 须满足:}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial a}=0, & \begin{cases} a\sum_{i=1}^8t_i^4+b\sum_{i=1}^8t_i^3+d\sum_{i=1}^8t_i^2=\sum_{i=1}^8t_i^2x_i, \\ a\sum_{i=1}^8t_i^3+b\sum_{i=1}^8t_i^2+d\sum_{i=1}^8t_i=\sum_{i=1}^8t_ix_i, \\ a\sum_{i=1}^8t_i^2+b\sum_{i=1}^8t_i+8d=\sum_{i=1}^8x_i, \end{cases} \\ \frac{\partial x}{\partial b}=0, \text{ 即:} \\ \frac{\partial x}{\partial d}=0, \end{cases}$$

记: $A=(a,b,d)^T$,

$$Y=\left(\sum_{i=1}^8t_i^2x_i,\sum_{i=1}^8t_ix_i,\sum_{i=1}^8x_i\right)^T=(39090445\ 883295\ 21340),$$
$$R=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^8t_i^4&\sum_{i=1}^8t_i^3&\sum_{i=1}^8t_i^2\\ \sum_{i=1}^8t_i^3&\sum_{i=1}^8t_i^2&\sum_{i=1}^8t_i\\ \sum_{i=1}^8t_i^2&\sum_{i=1}^8t_i&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}29547428&617464&13532\\ 617464&13532&316\\ 13532&316&8\end{pmatrix},$$

则: $RA=Y, A=R^{-1}Y$.

由 Matlab 可求得: $A=R^{-1}Y=\begin{pmatrix}-1.8571\\ 185.1571\\ -1504.9\end{pmatrix}$, 则

$x=-1.8571t^2+185.1571t+(-1504.9)$. (3-1)

设模型为: $x=at^3+bt^2+dt+g$, 同样可得,
 $x=-0.0416t^3+3.0696t^2+0.1658t+677.6902$. (3-2)
模型检验分析见表 4.

2.2.3 模型应用

用模型(3-2)计算出 30 岁、35 岁、40 岁在职职

表 4 预测职工平均工资与实际平均工资的误差分析

模型	(3-1)	(3-2)
误差绝对值的平均值	261	32
结论	模型(3-2)预测结果较为精确	

工的年均工资分别为 27852 元、31896 元、35160 元. 并以此为基础, 取模型(2-2)中的 $c_m=208090$ 及 $r=0.1182$ 修改模型(2), 分别可得:

$$x=\frac{208090}{1+8.7138\times10^{103}\times e^{-0.1182t}}, \tag{2-3}$$

$$x=\frac{208090}{1+7.4383\times10^{103}\times e^{-0.1182t}}, \tag{2-4}$$

$$x=\frac{208090}{1+6.6228\times10^{103}\times e^{-0.1182t}}. \tag{2-5}$$

用以上 3 个模型分别预测这 3 个年龄的职工未来的年平均工资, 相关数据见表 5.

3 2 个基本问题的计算及分析

3.1 替代率的计算及分析

企业职工自 2000 年起分别从 30 岁、35 岁、40 岁开始缴养老保险, 一直缴费到退休(55 岁、60 岁、65 岁), 以此计算各种情况下的养老金替代率.

个人账户养老金= $0.08\sum_{i=1}^mx_i\times(1.03)^i$. (I)

将表 5 中的相关数据代入(I)式可得表 6.

将表 2 和表 5 中的相关数据代入(II)式:

表 5 预测 30 岁、35 岁、40 岁的职工从 2000 年到 2039 年的年平均工资 元

年份	年龄段/岁			年份	年龄段/岁			年份	年龄段/岁		
	30	35	40		30	35	40		30	35	40
2000	10536	12236	13644	2013	41343	46836	51185	2026	111421	119550	125400
2001	11783	13671	15231	2014	45398	51265	55882	2027	117506	125503	131213
2002	13168	15260	16986	2015	49733	55967	60844	2028	123500	131313	136849
2003	14703	17019	18924	2016	54343	60933	66055	2029	129362	136946	142279
2004	16403	18959	21058	2017	59221	66148	71495	2030	135058	142373	147479
2005	18280	21097	23403	2018	64354	71592	77140	2031	140558	147568	152428
2006	20350	23446	25973	2019	69723	77241	82960	2032	145834	152513	157114
2007	22625	26020	28781	2020	75305	83064	88921	2034	155637	161600	165657
2008	25121	28832	31839	2021	81072	89027	94985	2035	160137	165727	169511
2009	27852	31895	35159	2022	86992	95092	101112	2036	164360	169576	173088
2010	30828	35220	38749	2023	93027	101220	107259	2037	168303	173149	176396
2011	34063	38815	42616	2024	99139	107367	113384	2038	171968	176452	179443
2012	37566	42686	46761	2025	105284	113491	119445	2039	175362	179494	182240

表6 个人账户储存额、计发月数和个人账户养老金的分布

年龄段/岁	个人账户 储存额/元	计发 月数/月	个人账户 养老金/元
30~55	116015	170	682
30~60	185704	139	1336
30~65	278840	101	2761
35~55	76362	170	449
35~60	129995	139	935
35~65	205390	101	2034
40~55	45132	170	265
40~60	83544	139	601
40~65	140935	101	1395

$$S = c_1 \sum_{i=1}^m \frac{x_i / c_i}{12m}, \quad (\text{II})$$

并把所得的数据和表2中相应的数据代入基础养老金的计算公式可得表7数据。

表7 2000年30岁、35岁、40岁的职工指数化月平均缴费工资及基础养老金

2000年的 年龄/岁	退休 年龄/岁	本人指数化月 平均缴费工资/元	基础养老 金/元
30	55	8346	1993
	60	11063	3181
	65	13483	4538
35	55	6643	1187
	60	9512	2139
	65	12491	3395
40	55	4870	616
	60	7473	1270
	65	10620	2278

由表6和表7中的数据可得表8的退休时的养老金及替换率。

分析表8可知:缴费年数一样,开始缴费迟,替换率高;开始缴费年龄相同,退休迟,替换率高;缴费年数少20年(含20年),或任意年龄段55岁退休的职工,替换率小于30.0%;2000年年龄为30岁,并于65岁退休时,替换率56.8%,接近目标值58.5%。可见,发展经济,提高职工的年平均工资,延迟退休年龄(60~65岁),增加缴费年数(20年以上),就能提高替代率,提高退休职工的生活水准。

3.2 收支额的计算及收支平衡问题的分析

2000年起从30岁开始缴养老保险,一直到退休(55岁、60岁、65岁),并从退休后一直领取养

表8 2000年时30岁、35岁、40岁的职工分别在55岁、60岁、65岁退休时的养老金及替换率

2000年的 年龄/岁	退休 年龄/岁	退休前一年 的工资/元	刚退休时 养老金/元	替换率 /%
30	55	8102	2675	30.0
	60	10629	4517	42.5
	65	12848	7299	56.8
35	55	6322	1636	25.9
	60	8824	3074	34.8
	65	11301	5429	48.0
40	55	4656	881	18.9
	60	6913	1871	27.1
	65	9448	3673	38.9

表9 收支额及缺口情况

2000年的 年龄/岁	领用退休 年龄/岁	总收入 额(w)/元	总支出 额(z)/元	缺口/元
30	55~75	313630	724321	410691
	60~75	492920	762922	270002
	65~75	724821	748048	23227

老金,至75岁死亡,其收支额及缺口情况见表9。

从表9可知,若基础养老金按现收现付方式实行时,55岁和60岁退休时缺口较大。

如果基础养老金按利率5.76%投资,设 x'_j ($j=1,2,\dots,h$)表示退休第 j 年的基础养老金, h 表示可支的基础养老金总年份数, c_i ($i=1,2,\dots,m$)同上,则基础养老金的总收入额为:

$$0.20 \sum_{i=1}^m c_i \times (1.0576)^i + \sum_{j=1}^h 0.0576 \left[0.20 \sum_{i=1}^m c_i \times (1.0576)^i - \sum_{k=1}^j x'_k \right].$$

其收支额及缺口情况见表10;达到收支平衡(即 $\min|w-z|$)时,领用退休金的年份数见表11。

从表10可知,如将基础养老金进行投资增值,60岁和65岁退休均有盈余,可见投资是有效措施,但有风险,管理者应当谨慎,以安全可靠为原则。

表10 收支额及缺口情况

2000年的 年龄/岁	领用退休 年龄/岁	总收入 额/元	总支出 额/元	缺口/元
30	55~75	572016	724321	152305
	60~75	982788	762922	-219866
	65~75	1566600	748048	-818552

表 11 收支平衡时领用退休金的年份数

2000 年的 年龄/岁	退休年龄/岁	达到收支平衡时领用 退休金的总年数/年
30	55	15
	60	16
	65	17

分析表 11 可知, 若 55 岁退休, 则到 70 岁时收支平衡; 若 60 岁退休, 则 76 岁时收支平衡; 若 65 岁退休, 则 82 岁时收支平衡. 在目前平均寿命下, 60 岁、65 岁退休时可以达到收支平衡.

4 结论及几点措施

经济发展水平、政府确定和承诺的目标养老金计发办法、计发办法中的计发比例大小及构成部分的多少, 这些因素都决定着养老金替代率的高低.

企业效益好差、个人在职时工资收入高低、缴费年限长短、退休年龄迟早、平均寿命的长短这些因素都对替代率的高低及收支平衡状况均有明显的影响.

虽然 2000 年起从 30 岁开始缴纳养老保险, 到 60 岁和 65 岁退休, 并将其累计的基础养老金进行投资会达到收支平衡. 但实际上, 存在缴费年限不满 15 年、提前退休、总收入额小、平均寿命延长、

老龄化时代等诸多因素, 收支平衡有难度.

因此, 需及早采取合理有效的措施, 例如: 大力发展经济, 控制物价过度上涨, 加强教育, 增加就业能力和渠道, 拉动内外需求, 合理开发资源和保护环境, 以减少自然灾害的损失, 进而提高企业职工工资水平; 扩大缴费覆盖范围, 增加参保人数, 做实养老保险基金账户, 通过安全投资增值方式, 增加累计结余; 控制法定退休年龄前退休的人数或政策规定延迟退休年龄等.

参考文献:

- [1] 唐志强. 我国养老保险制度中存在的问题及对策[EB/OL]. [2008-12-22]. <http://www.npc.gov.cn>.
- [2] 钮东昊. 中华人民共和国社会保险法[EB/OL]. [2010-10-29]. <http://china.com.cn>.
- [3] 浙江大学创新网. 2011 年全国大学生数学建模竞赛题 C 题附件 1[EB/OL]. [2011-09-09]. <http://innov.zju.edu.cn/sm/>.
- [4] 宣明. 数学建模与数学实验[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2010:177-179, 211-217.
- [5] 强国论坛. 中国 2050 年要成为中等发达国家, 届时人均最低月薪必须达到 1300 美元[EB/OL]. [2006-02-09]. <http://people.com.cn>.
- [6] 浙江大学创新网. 2011 年全国大学生数学建模竞赛题 C 题附件 2[EB/OL]. [2011-09-09]. <http://innov.zju.edu.cn/sm/>.

Pension Prediction Model and its Rate of Substitution, Balance of Revenue and Expenditure

WU Ju-feng

(Department of Basic Teaching, Zhejiang Post Occupation Technology College, Shaoxing 312016, China)

Abstract: Pension fund balance of enterprise workers concerns the social stability and smooth transition to an aging society. The author uses differential equation and higher-order function to establish a model which can predict long term staff's salary and average wage. Through comparison and analysis, a suitable model is chosen and an example including three different age cohorts is taken. In the end, it is concluded that, if the staff's per capita annual salary is high, his retirement age can start after 60, and his payment year lasts for more than 20 years, as a result, the rate of substitution is high. If basic pension is under the management of pay-as-you-go, and the retirement age is carried out in accordance with the government statute, there will be a big gap. Therefore, it needs to take effective countermeasures on policy and management to guard the smooth implementation of pension insurance system.

Key words: exponential growth model; logistic growth model; higher order function model; rate of substitution; balance of revenue and expenditure

(责任编辑 章践立)