

射影平坦 spray 的射影 Ricci 曲率

王 伟, 李本伶*

(宁波大学 数学与统计学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 研究了射影 Ricci 平坦的 spray 和度量, 首先讨论射影平坦 spray 在给定的体积元条件下何时满足射影 Ricci 曲率为 0 的条件. 在此基础上, 刻画出在常用的 Busemann-Hausdorff 体积元情形下, 射影平坦 Randers 度量的射影 Ricci 曲率, 并给出 Ricci 曲率为常数时该度量的具体构造.

关键词: 射影平坦; Ricci 曲率; Randers 度量

中图分类号: O186

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2021) 04-0079-07

芬斯勒几何中的几何量分为两类: 黎曼几何量和非黎曼几何量. 黎曼几何量是在黎曼情形不消失的几何量, 如黎曼曲率、Ricci 曲率等; 非黎曼几何量是黎曼情形中消失的几何量, 如 Berwald 曲率、Landsberg 曲率、 S -曲率等. Ricci 曲率与黎曼曲率有着密切的联系, 这是因为 Ricci 曲率是黎曼曲率的迹. 在芬斯勒几何中, Ricci 曲率不仅扮演着已知的重要作用, 也可以利用 Ricci 曲率来研究射影 Ricci 平坦, 比如射影 Ricci 曲率.

近年来, 有关射影 Ricci 曲率研究进展较大, 如文献[1]指明了射影 spray 的定义; 文献[2]证明了射影平坦度量都为射影 Ricci 平坦; 文献[3-4]对 (α, β) 度量局部射影平坦进行了刻画; 文献[5]研究了 spray 的具体性质; 文献[6]给出了 (α, β) 度量体积元的变化形式; 文献[7]研究了 Randers 度量为射影 Ricci 平坦的等价条件. Randers 度量结构优良, Randers 度量的 Ricci 曲率一直是研究重点^[8-9], 因此研究射影 Ricci 平坦的 Randers 度量的 Ricci 曲率意义重大, 可以更好地理解 Randers 度量的性质.

设 G 为 n 维 ($n \geq 2$) 光滑流形 M 上的 spray. 给定一个体积元 dv , 可以构造一个新的 spray, 记为 $\tilde{G}$, 满足如下等式:

$$\tilde{G} = G + 2S / (n+1)Y, \quad (1)$$

则称 $\tilde{G}$ 是 (G, dv) 的射影 spray^[1], 其中 $Y = y^i (\partial / \partial y^i)$ 是标准垂直向量场. (G, dv) 的射影 Ricci 曲率是通过

$(\tilde{G}, dv)$ 的 Ricci 曲率定义, 记为 $PRic_{(G, dv)} = Ric_{\tilde{G}}$.

若存在一个体积元 dv , 满足 $PRic_{(G, dv)} = 0$, 则称 G 为射影 Ricci 平坦. 流形 M 上的芬斯勒度量 F , 如果其诱导的 spray 是射影 Ricci 平坦的, 则称 F 为射影 Ricci 平坦的度量^[2]. 在文献[2]中, 已经得到关于射影 spray 的 Ricci 曲率:

$$PRic_{(G, dv)} = Ric_G + \frac{n-1}{n+1} \left(S_0 + \frac{S^2}{n+1} \right),$$

其中: $S = S_{(G, dv)}$ 是 (G, dv) 的 S -曲率; S_0 是 S 沿着 spray G 的水平共变导数.

为研究射影 Ricci 曲率对 spray 和度量的影响, 首先考虑射影平坦 spray 的射影 Ricci 曲率, 得到射影 Ricci 曲率为 0 时其体积元满足的等价条件(定理 1); 其次考虑具有应用价值的 Randers 度量, 得到 Busemann-Hausdorff 体积元(以下简称 B-H 体积元)下其射影 Ricci 曲率, 以及射影 Ricci 曲率为 0 时其 Ricci 曲率的具体表达式(定理 2). 研究结果给出的等价条件和刻画的具体度量有利于发现新的具有应用价值的度量及其几何.

1 基础知识及主要定理

为介绍主要定理引进相关引理^[3-4]. 设字母右下标是关于某个变量求偏导, 如 $f_{x^m} = \partial f / \partial x^m$.

设 M 是一个光滑的 n 维流形, F 是其切丛 TM 上定义的非负函数, $F: TM \rightarrow [0, +\infty)$, 称 F

收稿日期: 2020-10-14.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journallg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(11371209); 浙江省自然科学基金(LR18A010002).

第一作者: 王伟(1997-), 男, 湖北黄冈人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 微分几何. E-mail: wangwei2020nbu@163.com

*通信作者: 李本伶(1979-), 女, 浙江宁波人, 教授, 主要研究方向: 微分几何. E-mail: libenling@nbu.edu.cn

为 M 上的芬斯勒度量. 当且仅当 F 满足下述条件:

(i)光滑性, F 是带孔切丛 $TM \setminus \{0\}$ 上的 C^∞ 函数;
(ii)正齐性, $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$, $\forall \lambda > 0$; (iii)正则性, 对 $\forall (x, y) \in TM \setminus \{0\}$, $g_{ij}(x, y) = (1/2)[F^2]_{y^i y^j}$, 且 g_{ij} 是正定的. 特别地, 若 $g_{ij}(x, y) = g_{ij}(x)$, 则称 F 为黎曼度量; 若 $g_{ij}(x, y) = g_{ij}(y)$, 则称 F 为 Minkowski 度量.

对于流形 M 上的任意一点, 记其局部坐标为 (x^i) , 记切丛 TM (或者带孔切丛 $TM \setminus \{0\}$) 的局部坐标为 (x^i, y^i) . 记 G 为流形 M 上的一个 spray, 它是带孔切丛 $TM \setminus \{0\}$ 上的特殊向量场. 在局部坐标系下可表示为:

$$G = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i},$$

其中: $G^i(x, \lambda y) = \lambda^2 G^i(x, y)$, $\forall \lambda > 0$, G^i 称为 G 的 spray 系数.

假设 $P = P(x, y)$ 为 M 上的标量函数, 并且 P 满足 $P(x, \lambda y) = \lambda P(x, y)$, $\forall \lambda > 0$. 若 $G^i = P y^i$, 则称 G 为局部射影平坦的 spray. 事实上, 流形 M 上的任何一个芬斯勒度量 F 都能诱导一个 spray G , 其 spray 系数可表示为:

$$G^i = (1/4)g^{ij} \{ [F^2]_{y^j x^k} y^k - [F^2]_{x^j} \},$$

其中: $g^{ij} = (g_{ij})^{-1}$.

在芬斯勒几何中, 黎曼曲率由 Berwald^[10]引入, 可以视作黎曼几何中黎曼曲率的推广. 黎曼曲率定义为:

$$R_y = R_j^i dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x,$$

$R_y: T_x M \rightarrow T_x M$ 是切丛空间上的线性映射, 其中:

$$R_k^i = 2 \frac{\partial G^i}{\partial x^k} - y^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j \partial y^k} + 2G^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial G^i}{\partial y^j} \frac{\partial G^j}{\partial y^k}, \quad (2)$$

G 的 Ricci 曲率定义为 $Ric = R_m^m$. 若存在数量函数 $K = K(x)$, 使得度量 F 的 Ricci 曲率为:

$$Ric = (n-1)K(x)F^2,$$

则称 F 为爱因斯坦度量. Berwald 已证明爱因斯坦度量为射影平坦时其 Ricci 曲率为常数.

设 F 为流形 M 上的芬斯勒度量, 假设 $(e_i)_{i=1}^n$ 是 $T_x M$ 的一组基, $(\omega^i)_{i=1}^n$ 为其对偶空间 $T_x^* M$ 的一

组基. 在点 x 的 B-H 体积元定义为:

$$dv_{BH} = \sigma_{BH}(x) \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^n, \\ \sigma_{BH}(x) = \frac{\text{Vol}(B^n(1))}{\text{Vol}\{(y^i) \in R^n \mid F(x, y^i e_i) < 1\}},$$

其中: $\sigma_{BH}(x)$ 为该条件的体积函数; $\text{Vol}\{\}$ 表示欧氏体积. 如果 $F = \sqrt{g_{ij} y^i y^j}$ 是黎曼度量, 则 $\sigma_{BH}(x) = \sqrt{\det(g_{ij})}$.

本文第 3 节讨论的体积元都是 B-H 体积元.

设 $dv = \sigma dx^1 \cdots dx^n$ 是流形 M 上的任意一个体积元, S -曲率定义为:

$$S = \frac{\partial G^m}{\partial y^m} - y^m \frac{\partial}{\partial x^m} \ln \sigma. \quad (3)$$

利用 spray 定义, 可构造一个新的 spray, 如式 (1), 其在局部坐标系下 $\tilde{G}$ 的 spray 系数为:

$$\tilde{G}^i = G^i - S / (n+1) y^i.$$

(α, β) 度量是一种特殊的芬斯勒度量, 在某种程度上接近黎曼度量, (α, β) 度量可以表示为 $F = \alpha \phi(s)$, $\alpha = \sqrt{a_{ij}(x) y^i y^j}$ 是黎曼度量, $\beta = b_i(x) y^i$ 是 1-形式, $s = \beta / \alpha$. 事实上, Randers 度量也可视为 (α, β) 度量, 取 $\phi(s) = 1 + s$, $F = \alpha \phi(s)$ 即为 Randers 度量. 相关结果可参考文献[3-4]. 根据文献[11], Randers 度量 $F = \alpha + \beta$ 的 B-H 体积元在局部坐标系下可表示为:

$$dv_F = (1 - b^2(x))^{(n+1)/2} \sqrt{\det(a_{ij}(x))} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

本文主要得到如下 2 个定理.

定理 1 假设 G 为 n 维 ($n \geq 2$) 流形 M 上的射影平坦 spray, 给定一个体积元, 并设它的体积函数为 $\sigma = \sigma(x)$, 则其射影 Ricci 曲率为 0, 当且仅当

$$(n+1)f_{00} - f_0^2 = 0,$$

式中: $f = \ln \sigma$, $f_0 = \frac{\partial f}{\partial x^m} y^m$, $f_{00} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^m \partial x^k} y^m y^k$.

Randers 度量在物理、生物等领域上有着重要应用. 利用定理 1, 可考虑 Randers 度量情形的射影 Ricci 曲率, 射影 Ricci 曲率对于研究芬斯勒几何有着重要意义.

定理 2 设 $F = \alpha + \beta$ 是流形 M 上的射影平坦 Randers 度量, 其中 $\alpha = \sqrt{a_{ij}(x) y^i y^j}$ 是黎曼度量, $\beta = b_i(x) y^i$ 是 1-形式, 在给定 B-H 体积元的体积函数 $\sigma = \sigma(x) = ((1 - b^2) / (1 + \lambda b_1^2))^{(n+1)/2}$ 的条件下, F

的射影 Ricci 曲率为:

$$PRic = \frac{-(n-1)r_{00}}{b^2-1} + \frac{3(n-1)r_0^2}{(b^2-1)^2} + \frac{(n-1)\lambda\alpha_1^2}{\lambda b_1^2+1} - \frac{(n-1)\lambda^2\beta_1^2}{(\lambda b_1^2+1)^2},$$

式中: $\alpha_1 = |y|$, $\beta_1 = \langle x, y \rangle$, $b_1^2 = |x|^2$. 特别地, 当射影 Ricci 曲率为 0 时, Ricci 曲率为常数, 则 $Ric = (\lambda/4)(n-1)F^2$, $\lambda \leq 0$.

以上定理中 f 与文献[2]中的 $\tilde{f}$ 不一致, 两者之间的关系在第 2 节中说明. 本文的所有指标 i, j, k 的取值为 1 至 n , $|y|$ 为向量 y 的模长, $\langle x, y \rangle$ 为向量 x, y 的内积.

2 定理 1 的证明及其相关结果

通过引理 1 来证明定理 1. 假设 G 为 n 维流形 M 上的一个 spray, 记 $\tilde{G}R_k^i$ 是 $\tilde{G}$ 的黎曼曲率, 通过式 (2) 可计算得:

$$\tilde{G}R_k^i = {}^G R_k^i + A\delta_k^i - 2\frac{G^j S_{y^k y^j} y^i}{n+1} + B y^i,$$

式中:

$$S_0 = S_{x^m} y^m, \quad S_{y^j} = \frac{\partial S}{\partial y^j}, \quad S_{y^k y^j} = \frac{\partial^2 S}{\partial y^k \partial y^j},$$

$$S_{x^k} = \frac{\partial S}{\partial x^k}, \quad G_{y^k}^j = \frac{\partial G^j}{\partial y^k},$$

$$A = -\frac{2G^j S_{y^j}}{n+1} + \frac{S_0}{n+1} + \frac{S^2}{(n+1)^2},$$

$$B = \frac{S_{y^j} G_{y^k}^j}{n+1} + \frac{S_{x^j y^k} y^j}{n+1} - 2\frac{S_{x^k}}{n+1} - \frac{SS_{y^k}}{(n+1)^2},$$

对式(2)关于 i 和 k 缩并, 再由 Ricci 曲率定义可得:

$$\begin{aligned} \tilde{G}R_m^m &= {}^G R_m^m + \frac{(n-1)S^2}{(n+1)^2} + \\ &\quad \frac{(n-1)}{n+1} S_0 - \frac{2G^j S_{y^j} (n-1)}{(n+1)}, \end{aligned} \quad (4)$$

由文献[2]可知, G 的射影 Ricci 曲率为:

$$PRic_{(G, dv)} = \tilde{G}R_m^m.$$

引理 1 假设 G 是流形 M 上的射影平坦 spray, 给定一个体积函数 $\sigma(x)$, 则 G 的射影 Ricci 曲率为:

$$PRic_{(G, dv)} = -\frac{(n-1)(nf_{00} - f_0^2 + f_{00})}{(n+1)^2}.$$

证明 当 G 为射影平坦时,

$$G^i = P y^i. \quad (5)$$

将式(5)代入式(3)可得:

$$S = (n+1)P - f_0, \quad (6)$$

对式(6)关于 y^j 求偏导可得:

$$S_{y^j} = (n+1)P_{y^j} - f_{x^j}, \quad (7)$$

对式(6)关于 x^j 求偏导, 再对 y^j 进行缩并可得:

$$S_0 = (n+1)P_0 - f_{00}, \quad (8)$$

其中: $P_0 = (\partial P / \partial x^j) y^j$, $S_0 = S_{x^j} y^j$.

由文献[5]可知:

$$\begin{aligned} {}^G R_k^i &= (P^2 - P_{x^m} y^m) \delta_k^i - \\ &\quad (PP_{y^k} + P_{y^k y^m} y^m - 2P_{x^k}) y^i, \end{aligned} \quad (9)$$

对式(9)关于 i 和 k 进行缩并, 可得 G 的 Ricci 曲率为:

$$Ric_G = {}^G R_m^m = (n-1)P^2 - (n-1)P_0, \quad (10)$$

将式(5)~(8)和式(10)代入式(4), 可得:

$$PRic_{(G, dv)} = -\frac{(n-1)(nf_{00} - f_0^2 + f_{00})}{(n+1)^2}. \quad (11)$$

定理 1 的证明

根据文献[2], 当 $PRic_{(G, dv)} = 0$ 时, G 为射影 Ricci 平坦的, 再通过引理 1 得:

$$(n+1)f_{00} - f_0^2 = 0.$$

文献[2]研究了一般体积元的 spray. 本文考虑在常用的 B-H 体积元条件下, 射影 Ricci 平坦满足的等价条件. 以下将说明在射影 Ricci 平坦条件下, 本文体函数 f 与文献[2]中函数 $\tilde{f}$ 之间的关系.

根据文献[2]的结果, 假设 dv 和 $d\tilde{v}$ 是其 2 个体积形式, 且 $dv = e^{-(n+1)\tilde{f}} d\tilde{v}$, 这里 $\tilde{f} = \tilde{f}(x)$ 是 M 上一个标量函数, G 是射影 Ricci 平坦, 当且仅当存在 1 个体积形式 dv 和 1 个标量函数 $\tilde{f}$ 满足下述方程:

$$Ric_G = -(n-1)\{\Xi_0 + \Xi^2\},$$

式中: “|” 是关于 G 的水平导数; $\tilde{f}_0 = \tilde{f}_{x^m} y^m$; $\Xi = S / (n+1) - \tilde{f}_0$; $S = S_{(G, dv)}$.

再由文献[2]可得:

$$PRic_G = Ric_G + (n-1)\{\Xi_0 + \Xi^2\}.$$

在 G 为射影平坦的条件下, 由文献[2]得:

$$PRic_G = -\frac{(n-1)f_{00}}{n+1} + \frac{(n-1)f_0^2}{(n+1)^2} + (n-1)\tilde{f}_0^2 +$$

$$(2(n-1)f_0\tilde{f}_0/(n+1))-(n-1)\tilde{f}_{00}=0, \quad (12)$$

将式(11)和式(12)联立得:

$$-\tilde{f}_{00}+\tilde{f}_0^2+(2\tilde{f}_0f_0/(n+1))=0, \quad (13)$$

由此可得在射影 Ricci 平坦条件下, 给定一个体积函数 σ , 在射影 Ricci 曲率等于 0 时, 得到流形 M 上标量函数 $\tilde{f}$ 与本文函数 f 之间的关系(式(13)).

3 定理 2 的证明及其应用

设 $F=\alpha+\beta$ 是 Randers 度量, 假设 b_{ij} 为 β 关于 α 共变导数系数, r_{ij} 和 s_{ij} 定义为 $r_{ij}=(b_{ij}+b_{ji})/2$, $s_{ij}=(b_{ij}-b_{ji})/2$. 作如下记号:

$$r_{00}=r_{ij}y^iy^j, r_i=r_{ij}b^j, r_0=r_iy^i, r=r_ib^i,$$

$$s_{i0}=s_{ij}y^j, s_0^i=a^{ij}s_{j0}, s_i=s_{ji}b^j, s_0=s_iy^i.$$

Randers 度量有重要的性质, 如果 Randers 度量是射影平坦的, 则 β 是闭形式, 即 $d\beta=0$. 以下引理是黎曼几何中熟知的.

引理 2(Beltrami's 定理) 设 $\alpha=\sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j}$ 是流形 M 上的黎曼度量, 则 α 是射影平坦的, 当且仅当存在一个常数截面曲率 $K=\lambda$, 此时该度量可局部表示为:

$$\alpha=\sqrt{(1+\lambda|\mathbf{x}|^2)|\mathbf{y}|^2-\lambda\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle^2/(1+\lambda|\mathbf{x}|^2)},$$

式中: $\mathbf{y}\in T_xU\approx R^n, U\subset R^n$.

考虑度量 α 时, 可以将其视为特殊的 (α, β) 度量, 令 $\alpha_1=|\mathbf{y}|=\sqrt{\delta_{ij}y^iy^j}$, 则

$$\alpha=\alpha_1\sqrt{(1+\lambda|\mathbf{x}|^2)-\lambda s^2/(1+\lambda|\mathbf{x}|^2)},$$

式中: $s=\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \phi(s)=\frac{\sqrt{(1+\lambda|\mathbf{x}|^2)-\lambda s^2}}{1+\lambda|\mathbf{x}|^2}$.

在文献[6]中, 对于 (α, β) 度量, 给出了度量矩阵行列式的表达式:

$$\det(a_{ij})=\phi^{n+1}(\phi-s\phi')^{n-2}.$$

$$[\phi-s\phi'+(b^2-s^2)\phi'']\det((a_1)_{ij}). \quad (14)$$

定理 2 的证明

首先利用引理 1 中式(11)得到在给定的体积元下的射影 Ricci 曲率. 由文献[11]得, Randers 度量 F 的体积函数 $\sigma(x)$ 可表示为:

$$\sigma=(1-b^2(x))^{(n+1)/2}\sqrt{\det(a_{ij}(x))}.$$

设 $h=\sqrt{\det(a_{ij}(x))}$, $b=b(x)$, 由 $f=\ln\sigma$ 得:

$$f=(n+1)/2\ln(1-b^2)+\ln h, \quad (15)$$

事实上, $\partial b^2/\partial x^m=2b_{jm}b^j=2(r_m+s_m)$. 对式(15)关于 x^m 求偏导, 再与 y^m 缩并可得:

$$f_0=\frac{(n+1)(r_0+s_0)}{b^2-1}+\frac{h_0}{h}. \quad (16)$$

利用共变导数, 并记 Γ_{jk}^i 为 α 的联络系数(Christoffel 符号), 可得:

$$(r_m+s_m)_{x^k}=(b_{jk}^j-b_{lk}^l\Gamma_{jk}^l)b_{jm}+b^j(b_{jlmk}+b_{lmj}\Gamma_{jk}^l+b_{jll}\Gamma_{mk}^l), \quad (17)$$

对式(15)关于 x^m 和 x^k 求偏导, 再与 y^m 和 y^k 缩并, 利用式(17)以及 $r_{00}=r_{0i}y^i, s_{00}=s_{0i}y^i$ 和 $(r_m+s_m)_{x^k}y^m y^k=r_{00}+s_{00}+2P(r_0+s_0)$, 直接计算可得:

$$f_{00}=\frac{(n+1)(r_{00}+s_{00})}{b^2-1}+\frac{2(n+1)P}{b^2-1}(r_0+s_0)-\frac{2(n+1)(r_0+s_0)^2}{(b^2-1)^2}+\frac{h_{00}h-h_0^2}{h^2}, \quad (18)$$

其中: P 为 α 的测地系数.

由条件 F 为射影平坦度量, β 是闭形式^[11], 即 $s_{ij}=0$, 则 $s_0=0, s_{00}=0$, 将其代入式(16)和式(18)分别可得:

$$f_0=\frac{(n+1)r_0}{b^2-1}+\frac{h_0}{h}, \quad (19)$$

$$f_{00}=\frac{(n+1)r_{00}}{b^2-1}+\frac{2(n+1)P}{b^2-1}r_0-\frac{2(n+1)r_0^2}{(b^2-1)^2}+\frac{h_{00}h-h_0^2}{h^2}. \quad (20)$$

以下将对 f_0 和 f_{00} 具体分析. 由引理 2 可得 α^2 在某一局部坐标系下可表示为:

$$\alpha^2=\frac{(1+\lambda|\mathbf{x}|^2)|\mathbf{y}|^2-\lambda\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle^2}{(1+\lambda|\mathbf{x}|^2)^2},$$

其中: λ 为 α 的常截面曲率, 且 α 的测地系数为:

$$P=-\lambda\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle/(1+\lambda|\mathbf{x}|^2).$$

下一步计算 $h=\sqrt{\det(a_{ij})}$. 通过式(14)可得:

$$\det(a_{ij})=\phi^{n+1}(\phi-s\phi')^{n-2}.$$

$$[\phi-s\phi'+(b^2-s^2)\phi'']\det(\delta_{ij}), \quad (21)$$

其中:

$$\phi = \sqrt{(1 + \lambda |\mathbf{x}|^2) - \lambda s^2} / (1 + \lambda |\mathbf{x}|^2),$$

由式(21)以及 $\ln \det(\delta_{ij}) = 0$ 可得:

$$\begin{aligned} \ln h &= \frac{1}{2}(n+1)\ln(\phi(s)) + \frac{1}{2}(n-2)\ln(\phi - s\phi') + \\ &\quad \frac{1}{2}\ln(\phi - s\phi' + (b_1^2 - s^2)\phi''). \end{aligned} \quad (22)$$

根据 $\phi = \frac{\sqrt{(1 + \lambda |\mathbf{x}|^2) - \lambda s^2}}{1 + \lambda |\mathbf{x}|^2}$, 求得:

$$\phi' = \frac{\lambda s}{1 + \lambda |\mathbf{x}|^2 - \lambda s^2} \phi, \quad \phi'' = \frac{-\lambda(1 + \lambda |\mathbf{x}|^2)}{(1 + \lambda |\mathbf{x}|^2 - \lambda s^2)^2} \phi, \quad (23)$$

将式(23)代入式(22), 求得:

$$\ln h = -(n+1)/2 \ln(\lambda b_1^2 + 1),$$

其中: $b_1^2(x) = \delta^{ij} x_i x_j = |\mathbf{x}|^2$.

对 $\ln h$ 关于 x^m 求偏导, 再与 y^m 进行缩并得:

$$(\ln h)_0 = \frac{h_0}{h} = -\frac{(n+1)\lambda\beta_1}{\lambda b_1^2 + 1}. \quad (24)$$

对 $\ln h$ 关于 x^m 以及 x^k 求偏导, 再与 y^m 和 y^k 进行缩并得:

$$\begin{aligned} (\ln h)_{00} &= \frac{h_{00}h - h_0^2}{h^2} = -\frac{(n+1)\lambda\alpha_1^2}{\lambda b_1^2 + 1} + \\ &\quad \frac{2(n+1)\lambda^2\beta_1^2}{(\lambda b_1^2 + 1)^2}, \end{aligned} \quad (25)$$

将式(24)代入式(19)可得:

$$f_0 = \frac{(n+1)r_0}{b^2 - 1} - \frac{(n+1)\lambda\beta_1}{\lambda b_1^2 + 1}, \quad (26)$$

将式(25)代入式(20)可得:

$$\begin{aligned} f_{00} &= \frac{(n+1)r_{00}}{b^2 - 1} + \frac{2(n+1)Pr_0}{b^2 - 1} - \frac{2(n+1)r_0^2}{(b^2 - 1)^2} - \\ &\quad \frac{(n+1)\lambda\alpha_1^2}{\lambda b_1^2 + 1} + \frac{2(n+1)\lambda^2\beta_1^2}{(\lambda b_1^2 + 1)^2}, \end{aligned} \quad (27)$$

再将式(26)和式(27)及测地系数 P 代入式(11)可得:

$$\begin{aligned} PRic &= \frac{-(n-1)r_{00}}{b^2 - 1} + \frac{3(n-1)r_0^2}{(b^2 - 1)^2} + \\ &\quad \frac{(n-1)\lambda\alpha_1^2}{\lambda b_1^2 + 1} - \frac{(n-1)\lambda^2\beta_1^2}{(\lambda b_1^2 + 1)^2}. \end{aligned} \quad (28)$$

根据文献[2,7]可知, 若度量为射影平坦的, 则存在一个体积元使得射影 Ricci 曲率为 0. 但是, 对于任意体积元射影 Ricci 曲率不一定为 0. 那么, 考

虑常用体积元情形下的射影 Ricci 曲率对研究度量的射影性质有重要意义. 事实上, 对于射影平坦的 Randers 度量, 存在一个标量函数 $\tilde{f}$, 通过改变体积元使得射影 Ricci 曲率等于 0. 将式(26)计算所得的 f_0 值代入式(12), 可得如下方程:

$$\begin{aligned} &\frac{-r_{00}}{b^2 - 1} + \frac{3r_0^2}{(b^2 - 1)^2} + \frac{\lambda\alpha_1^2}{\lambda b_1^2 + 1} - \frac{\lambda^2\beta_1^2}{(\lambda b_1^2 + 1)^2} + \\ &\quad \frac{2r_0\tilde{f}_0}{b^2 - 1} - \frac{2\lambda\beta_1\tilde{f}_0}{\lambda b_1^2 + 1} + \tilde{f}_0^2 - \tilde{f}_{00} = 0. \end{aligned}$$

以下将研究 Randers 度量在 B-H 体积元下考虑其射影 Ricci 曲率为 0 的情形, 进而求解该条件下度量的具体构造. 由式(28)可得 Randers 度量的射影 Ricci 曲率为:

$$PRic = \frac{-(n-1)r_{00}}{b^2 - 1} + \frac{3(n-1)r_0^2}{(b^2 - 1)^2} + (n-1)\lambda\alpha^2,$$

考虑 $PRic = 0$, 该方程等价于如下方程:

$$\frac{-r_{00}}{b^2 - 1} + \frac{3r_0^2}{(b^2 - 1)^2} + \lambda\alpha^2 = 0, \quad (29)$$

这里设 $b_{ij} = Aa_{ij} + Bb_ib_j + Cr_ir_j + D(r_ib_j + b_ir_j)$, 通过计算可设 $r_0 = \omega(b^2)\beta$, 则 $r_{00} = \omega r_{00} + 2\omega'\omega\beta^2$.

直接计算可以求得: $\omega = r/b^2$.

将 r_0 、 r_{00} 、 ω 代入式(29)可得:

$$\begin{aligned} &\frac{3r^2\beta^2}{b^4(b^2 - 1)^2} + \lambda\alpha^2 - \frac{2r}{b^2(b^2 - 1)}\left(\frac{r}{b^2}\right)' \beta^2 = \\ &\quad \left(r / (b^2(b^2 - 1))\right)_{00}, \end{aligned} \quad (30)$$

对式(30)关于 y^i 和 y^j 求导, 再对 b^i 和 b^j 缩并得:

$$\frac{3r^2}{(b^2 - 1)^2} + \lambda b^2 - \frac{2r}{b^2 - 1}\left(\frac{r}{b^2}\right)' b^2 = \frac{r^2}{b^2(b^2 - 1)}, \quad (31)$$

解式(31)可求得:

$$r = -\sqrt{b^2(c_1 b^2 - c_1 - \lambda)(b^2 - 1)}.$$

将 r 代入式(30)得:

$$r_{00} = p(b^2)\alpha^2 + q(b^2)\beta^2, \quad (32)$$

式中:

$$\begin{aligned} p(b^2) &= -\lambda b / \sqrt{(c_1 b^2 - c_1 - \lambda)}, \\ q(b^2) &= \frac{-c_1 b^4 + 2c_1 b^2 + 2\lambda b^2 - c_1 - \lambda}{b^2 \sqrt{b^2(c_1 b^2 - c_1 - \lambda)}}, \end{aligned}$$

则 $r_{ij} = p(b^2)a_{ij} + q(b^2)b_ib_j$, 对 r_{ij} 关于 b^i 和 y^j 缩并

可得:

$$r_0 = p(b^2)\beta + q(b^2)b^2\beta, \quad (33)$$

对式(32)求共变导数可得:

$$r_{000} = p'(b^2)(r_0 + s_0)\alpha^2 + q'(b^2)(r_0 + s_0)\beta^2 + 2q(b^2)\beta r_{00}, \quad (34)$$

根据文献[9], 当 Randers 度量为射影平时,

$$Ric = (n-1)\lambda\alpha^2 + \frac{n-1}{4F^2}(-2r_{000}(\alpha + \beta) + 3r_{00}^2). \quad (35)$$

引理 3 设 $F = \alpha + \beta$ 为 B-H 体积元下的体积函数 $\sigma = \sigma(x)$ (定理2)的射影平坦 Randers 度量. 当其射影 Ricci 曲率消失时, F 的 Ricci 曲率为:

$$Ric = \frac{\lambda}{4}(n-1)\frac{(4c_1b^2 + 3\lambda b^2 - 4c_1 - 4\lambda)}{c_1b^2 - c_1 - \lambda}(\alpha + \beta)^2 - \frac{\lambda(n-1)(c_1 + \lambda)(b^2 - 1)\beta}{4b^2(c_1b^2 - c_1 - \lambda)}\left\{(12b^2 - 5)\alpha + (4\alpha b^2 - \alpha + \beta b^2 + 2\beta)\frac{(c_1 + \lambda)(b^2 - 1)^2\beta^2}{\lambda b^4(\alpha + \beta)^2} + \frac{4(b^2 - 1)(2b^2 - 1)\beta^2}{b^2(\alpha + \beta)} - (6b^2 - 11)\beta\right\}. \quad (36)$$

证明 将式(32)~(34)代入式(35), 可得式(36), 引理 3 得证.

引理 4^[11] 设 $F = \alpha + \beta$ 是射影平坦的 Randers 度量. 若 F 具有常数 Ricci 曲率 $Ric = (n-1)\Lambda F^2$, 则 $\Lambda \leq 0$. 若 α 度量的常数截面曲率为 λ , 则 $\lambda = 4\Lambda$.

推论 1 设 $F = \alpha + \beta$ 为 Ricci 曲率是 $Ric = (n-1)\Lambda F^2$ 的爱因斯坦 Randers 度量, 取其体积函数为:

$$\sigma = \left((1 - b^2)/(1 + \lambda b_1^2)\right)^{(n+1)/2},$$

在其射影 Ricci 曲率为 0 的条件下, 度量 F 中:

$$\alpha = \frac{\sqrt{(1 + \lambda|\mathbf{x}|^2)|\mathbf{y}|^2 - \lambda\langle\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle^2}}{1 + \lambda|\mathbf{x}|^2},$$

$$\beta = m\left(\frac{\langle\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle}{1 - |\mathbf{x}|^2} + \frac{\langle\mathbf{a}, \mathbf{y}\rangle}{1 + \langle\mathbf{a}, \mathbf{x}\rangle}\right), \quad \lambda < 0.$$

证明 在射影 Ricci 曲率为 0 的条件下, Ricci 曲率由式(36)给出. 通过引理 4 得:

$$Ric = (\lambda/4)(n-1)F^2,$$

则要求如下方程成立:

$$\frac{3\lambda}{4}(n-1)\frac{(c_1b^2 + \lambda b^2 - c_1 - \lambda)}{c_1b^2 - c_1 - \lambda}(\alpha + \beta)^2 - \frac{\lambda(n-1)(c_1 + \lambda)(b^2 - 1)\beta}{4b^2(c_1b^2 - c_1 - \lambda)}\left\{(12b^2 - 5)\alpha + (4\alpha b^2 - \alpha + \beta b^2 + 2\beta)\frac{(c_1 + \lambda)(b^2 - 1)^2\beta^2}{\lambda b^4(\alpha + \beta)^2} + \frac{4(b^2 - 1)(2b^2 - 1)\beta^2}{b^2(\alpha + \beta)} - (6b^2 - 11)\beta\right\} = 0,$$

等价于

$$\frac{3\lambda}{4}(n-1)\frac{(c_1b^2 + \lambda b^2 - c_1 - \lambda)\alpha^4}{c_1b^2 - c_1 - \lambda} + \frac{5\lambda(n-1)(c_1 + \lambda)(b^2 - 1)\beta\alpha^3}{4b^2(c_1b^2 - c_1 - \lambda)} - \frac{\lambda(n-1)(c_1 + \lambda)(b^2 - 1)\beta^2\alpha^2}{4b^2(c_1b^2 - c_1 - \lambda)} + \frac{1}{4b^6(c_1b^2 - c_1 - \lambda)}(n-1)(b^2 - 1)(c_1 + \lambda)(4c_1b^6 - 9c_1b^4 - 4\lambda b^4 + 6c_1b^2 + 10\lambda b^2 - c_1 - \lambda)\beta^3\alpha + \frac{1}{4b^6(c_1b^2 - c_1 - \lambda)}(n-1)(b^2 - 1)(c_1 + \lambda)(c_1b^6 - \lambda b^4 - 3c_1b^2 + \lambda b^2 + 2c_1 + 2\lambda)\beta^4 = 0. \quad (37)$$

由于 $\alpha = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j}$ 是关于 y 的无理函数, $\beta = b_i(x)y^i$ 是关于 y 的一次函数, 因此式(37)化简等价于如下两式同时成立:

$$\frac{(n-1)(b^2 - 1)(c_1 + \lambda)\beta\alpha}{4b^2(c_1b^2 - c_1 - \lambda)}\left\{5\lambda\alpha^2 + \frac{1}{b^4}(4c_1b^6 - 9c_1b^4 - 4\lambda b^4 + 6c_1b^2 + 10\lambda b^2 - c_1 - \lambda)\beta^2\right\} = 0, \quad (38)$$

$$\frac{3\lambda}{4}(n-1)\frac{(c_1b^2 + \lambda b^2 - c_1 - \lambda)\alpha^4}{c_1b^2 - c_1 - \lambda} - \frac{(n-1)(b^2 - 1)(c_1 + \lambda)\beta^2}{4b^2(c_1b^2 - c_1 - \lambda)}\left\{\lambda\alpha^2 - \frac{1}{b^4}(c_1b^6 - \lambda b^4 - 3c_1b^2 + \lambda b^2 + 2c_1 + 2\lambda)\beta^2\right\} = 0. \quad (39)$$

由于 α^2 是正定的, 而 β 是 1-形式, 由式(38)得:

$$(n-1)(b^2-1)(c_1+\lambda)=0,$$

又因为 $n-1>0$, $b^2-1<0$, 所以 $c_1+\lambda=0$, 即 $c_1=-\lambda$. 将其代入式(39), 等式成立.

从文献[8]可得:

$$\alpha = \frac{\sqrt{(1+\lambda|\mathbf{x}|^2)|\mathbf{y}|^2 - \lambda\langle\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle^2}}{1+\lambda|\mathbf{x}|^2},$$

$$\beta = m \left(\frac{\langle\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle}{1-|\mathbf{x}|^2} + \frac{\langle\mathbf{a}, \mathbf{y}\rangle}{1+\langle\mathbf{a}, \mathbf{x}\rangle} \right),$$

式中: $m = \pm\sqrt{\lambda}$.

例 1 射影 Ricci 曲率为 0 的 Randers 度量实例.

取 $F = \alpha + \beta$, 式中:

$$\alpha = \frac{\sqrt{(1-|\mathbf{x}|^2)|\mathbf{y}|^2 + \langle\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle^2}}{1-|\mathbf{x}|^2},$$

$$\beta = \pm \left(\frac{\langle\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle}{1-|\mathbf{x}|^2} + \frac{\langle\mathbf{a}, \mathbf{y}\rangle}{1+\langle\mathbf{a}, \mathbf{x}\rangle} \right).$$

取 B-H 体积元下的体积函数:

$$\sigma = \sigma(x) = \left(\frac{1-|\mathbf{a}|^2}{(1+\langle\mathbf{a}, \mathbf{x}\rangle)^2} \right)^{(n+1)/2},$$

通过推论 1, 取 $\lambda = -1$, 即得以上度量 $F = \alpha + \beta$.

根据文献[8]得:

$$Ric = -\frac{(n-1)}{4}(\alpha + \beta)^2,$$

$$r_{00} = \alpha^2 - \beta^2,$$

这与式(32)计算结果一致, 即此度量为射影 Ricci 曲率为 0 的爱因斯坦度量.

参考文献:

- [1] Shen Z M. Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces[M]. Dordrecht: Springer Netherlands, 2001.
- [2] Shen Z M, Sun L L. On the projective Ricci curvature[EB/OL]. [2020-08-20]. <http://doi.org/10.1007/s11425-020-1705-x>.
- [3] Shen Z M. On projectively flat (α, β) -metrics[J]. Canadian Mathematical Bulletin, 2009, 52(1):132-144.
- [4] 吴亚东, 李本伶. 一类局部射影平坦的广义 (α, β) -度量[J]. 宁波大学学报(理工版), 2017, 30(1):64-67.
- [5] Li B L, Shen Z M. Sprays of isotropic curvature[J]. International Journal of Mathematics, 2018, 29(1): 1850003.
- [6] Yu C T, Zhu H M. On a new class of Finsler metrics[J]. Differential Geometry and Its Applications, 2011, 29(2): 244-254.
- [7] Cheng X Y, Shen Y L, Ma X Y. On a class of projective Ricci flat Finsler metrics[J]. Publicationes Mathematicae Debrecen, 2017, 90(1/2):169-180.
- [8] Shen Z M. Projectively flat Randers metrics with constant flag curvature[J]. Mathematische Annalen, 2003, 325(1): 19-30.
- [9] Li B L, Shen Z M. On Randers metrics of quadratic Riemann curvature[J]. International Journal of Mathematics, 2009, 20(3):369-376.
- [10] Berwald L. Untersuchung der krummung allgemeiner metrischer räume auf grund des in ihnen herrschenden parallelismus[J]. Mathematische Zeitschrift, 1926, 26:40-73.
- [11] 沈一兵, 沈忠民. 现代芬斯勒几何初步[M]. 北京: 高等教育出版社, 2013:14-114.

Projective Ricci curvature of projective flat spray

WANG Wei, LI Benling*

(School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: In this paper, the projective Ricci flat spray and its metrics are studied in the most part. Firstly, we discuss the case in which the projective flat spray meets the condition that the projective Ricci curvature is 0 with the given volume element. On this basis, by using Busemann-Hausdorff volume element, the projective Ricci curvature of projective flat Randers metrics is described, and the concrete structure of such metrics is given provided that the Ricci curvature is constant.

Key words: projective flat; Ricci curvature; Randers metrics

(责任编辑 史小丽)