

加权最小化问题中限制等距性的研究

张茜雯, 王金平*

(宁波大学 数学与统计学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 本文针对加权最小化问题, 首先给出了测量矩阵的加权限制等距性(RIP)与加权鲁棒零空间特性(rNSP)的定义, 证明了加权 RIP 蕴含着加权 rNSP. 最后以加权 RIP 作为充分条件, 给出了解重构的误差估计.

关键词: 加权限制等距性; 加权稀疏; 误差估计; 加权最小化

中图分类号: O177.6; O175.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-5132 (2021) 05-0039-04

加权稀疏信号的重构问题是从标准稀疏问题演化而来, 由于标准最小化在任何关于 $\mathbf{x}$ 的支撑集的初始信号和假设中都不占任何优势, 通过权重的方式使得需要被重构的向量结构更加一般化. 2009年, Foucart 等^[1]提出了标准稀疏情况下的非凸最小化问题. 2016年, Rauhut 等^[2]提出了一种新型加权范数以及加权 l_1 最小化, 加权 l_1 最小化比标准 l_1 最小化更加稳定. 本文基于文献[1-2], 在加权非凸问题下对测量矩阵的性质进行研究.

1 预备知识

压缩感知旨在从少量线性测量组的数据中重构未知的信号解. 从数学理论方面看, 通过 l_p 最小化^[1] ($0 < p \leq 1$)

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N} \|\mathbf{x}\|_p \quad \text{s.t.} \quad \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \leq \epsilon, \quad (1)$$

从噪声测量方程组 $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{e}$ 中找到最稀疏的向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$, 其中噪声水平 $\|\mathbf{e}\|_2 \leq \epsilon$, 并且 $\epsilon \geq 0$, 测量矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ 满足 $M \ll N$. 若一个向量 $\mathbf{x}$ 至多含有 s 个非零元, 那么这个向量就被称作是 s 稀疏的, 写作 $\|\mathbf{x}\|_0$. 限制等距性^[3-5]和零空间特性^[6-7]作为测量矩阵 $\mathbf{A}$ 的两个充分性质, 可以通过 l_p 最小化稳定重构出解 $\mathbf{x}$, 即对任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ 和 $\epsilon \geq 0$, 式(1)的解 $\tilde{\mathbf{x}}$ 满足

$$\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_p \leq c_1 \epsilon + c_2 \sigma_s(\mathbf{x})_p,$$

其中 c_1 和 c_2 均为非负常数, $\sigma_s(\mathbf{x})_p$ 称为 $\mathbf{x}$ 的最佳 s 项逼近, 并写作

$$\sigma_s(\mathbf{x})_p = \inf_{\{\mathbf{v} \mid \|\mathbf{v}\|_0 \leq s\}} \|\mathbf{x} - \mathbf{v}\|_p.$$

在无噪声的情况下, 若 $\mathbf{x}$ 是 s 稀疏的, $\mathbf{x}$ 可以由式(1)精准重构, $\sigma_s(\mathbf{x})_p$ 和噪声水平 ϵ 都将变为 0.

对于更特殊的情况, 给定一权重向量 $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_N) \in \mathbb{R}^N$, 且满足对任意 $0 \leq i \leq N$ 有 $w_i \geq 1$, 将权重向量中所有元素对应分配给未知的解 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$, 便得到加权 l_p 范数^[6], 写作

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{w}, p} = \sum_{i=1}^n (w_i^{2-p} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad (2)$$

其中 $0 < p \leq 2$, 将加权 l_0 范数写作

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{w}, 0} = \sum_{\{i: x_i \neq 0\}} w_i^2, \quad (3)$$

并且当 $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{w}, 0} \leq s$ 时, 称向量 $\mathbf{x}$ 是加权 s 稀疏的.

加权向量 $\mathbf{x}$ 在加权 l_p 范数下的最佳 s 项逼近误差为

$$\sigma_s(\mathbf{x})_{\mathbf{w}, p} = \inf_{\{\mathbf{v} \mid \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{w}, 0} \leq s\}} \|\mathbf{x} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{w}, p}, \quad (4)$$

这里要求向量 $\mathbf{v}$ 是加权 s 稀疏的, 当最佳 s 项逼近误差 $\sigma_s(\mathbf{x})_{\mathbf{w}, p}$ 随着 s 衰减很快并趋向于 0 时, $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{v}$ 的误差也趋于 0, 那么称 $\mathbf{x}$ 是一个可压缩向量.

通过加权 l_p 范数的衡量, 提出加权 l_p 最小化的优化方法

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N} \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{w}, p} \quad \text{s.t.} \quad \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \leq \epsilon, \quad (5)$$

收稿日期: 2020-11-28.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journal.g.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(62071262).

第一作者: 张茜雯(1997-), 女, 河南焦作人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 积分变换与图像处理. E-mail: 875252582@qq.com

*通信作者: 王金平(1962-), 男, 湖北武汉人, 博士/教授, 主要研究方向: 积分变换与图像处理. E-mail: wangjinping@nbu.edu.cn

并给出加权 l_p rNSP 以及加权 RIP 的定义.

定义 1 给定一满足 $w_i \geq 1$ 的权向量 $\mathbf{w} \in R^N$ 和测量矩阵 $\mathbf{A} \in R^{M \times N}$, 且存在常数 $0 < \rho < 1$ 和 $\tau > 0$, 对任意满足 $\|\mathbf{S}\|_{w,0} \leq s$ 的指标集 $S \subset [n]$, 以及任意 $\mathbf{x} \in R^N$, 使得

$$\|\mathbf{x}_S\|_{w,p} \leq \rho \|\mathbf{x}_{\bar{S}}\|_{w,p} + \tau \|\mathbf{Ax}\|_2, \quad (6)$$

则矩阵 $\mathbf{A}$ 满足 s 阶加权 l_p rNSP, 其中 $0 < p \leq 1$, $\bar{S}$ 是 S 的补集, $\mathbf{x}_S$ 表示在指标集 S 上的元素与 $\mathbf{x}$ 保持不变而其余元素都为 0 的向量.

定义 2 给定一满足 $w_i \geq 1$ 的权向量 $\mathbf{w} \in R^N$, 对任意满足 $\|\mathbf{x}\|_{w,0} \leq s$ 的向量 $\mathbf{x} \in R^N$, 若分别存在最大与最小的数 $\alpha_{w,s}$ 与 $\beta_{w,s}$ ($\alpha_{w,s}, \beta_{w,s} \geq 0$) 使得

$$\alpha_{w,s} \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{Ax}\|_2 \leq \beta_{w,s} \|\mathbf{x}\|_2, \quad (7)$$

则测量矩阵 $\mathbf{A}$ 满足加权 RIP. 令 $\gamma_{w,s} = \beta_{w,s}^2 / \alpha_{w,s}^2$, 那么, 通过标准加权 RIP 的定义^[7-8]可以得到 $\gamma_{w,s} = \frac{1 + \delta_{w,s}}{1 - \delta_{w,s}} \geq 1$.

本文首先在有噪声的情况下证明加权 RIP 为稳定重构块稀疏信号的充分条件, 然后给出块 RIP 暗含着 s 阶加权 l_p rNSP, 这进一步一般化了 l_1 最小化问题.

2 主要结果

引理 1 对于任意支撑在互不相交的指标集 S_1 与 S_2 上的向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in R^N$, 如果存在 $S_1, S_2 \subset [n]$ 且 $\mathbf{w}(S_1) \leq s_1$, $\mathbf{w}(S_2) \leq s_2$, 则

$$|\langle \mathbf{Au}, \mathbf{Av} \rangle| \leq \delta_{w,s_1+s_2} \|\mathbf{u}\|_2 \|\mathbf{v}\|_2. \quad (8)$$

证明 令 $T = S_1 \cup S_2$, 那么有 $\mathbf{w}(T) \leq s_1 + s_2$. 又因为 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, 有

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{Au}, \mathbf{Av} \rangle| &= |\langle \mathbf{A}_T \mathbf{u}_T, \mathbf{A}_T \mathbf{v}_T \rangle - \langle \mathbf{u}_T, \mathbf{v}_T \rangle| = \\ &= |\langle (\mathbf{A}_T^* \mathbf{A}_T - \mathbf{I}) \mathbf{u}_T, \mathbf{v}_T \rangle| \leq \\ &= \|\mathbf{A}_T^* \mathbf{A}_T - \mathbf{I}\|_{2 \rightarrow 2} \|\mathbf{u}_T\|_2 \|\mathbf{v}_T\|_2 \leq \delta_{w,s_1+s_2} \|\mathbf{u}\|_2 \|\mathbf{v}\|_2. \end{aligned}$$

定理 1 给定 $0 < p \leq 1$, 若

$$\gamma_{w,2s} - 1 < 2^{\frac{1}{p}-1},$$

那么 $\mathbf{A}$ 满足 s 阶加权 l_p rNSP. 其中 $s \geq 2\|\mathbf{w}\|_\infty^2$, $\|\mathbf{w}\|_\infty$ 为权向量 $\mathbf{w}$ 中最大元素的绝对值.

证明 首先令 $\mathbf{x} \in R^n$, 其对应的指标集 $S \subset [n]$ 满足 $\mathbf{w}(S) \leq s$. 根据元素 $x_j^p w_j^{-p}$ 的非递增重排, 将 $\bar{S}$ 分割成 $S_1, S_2, \dots$, 每个子指标集满足

$s - \|\mathbf{w}\|_\infty^2 \leq \mathbf{w}(S_i) \leq s$, 那么当 $i \geq 2$ 时, 对任意 $j \in S_i$ 以及 $k \in S_{i-1}$, 有 $|x_j|^p w_j^{-p} \leq |x_k|^p w_k^{-p}$. 由式(7)和(8)可得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_S + \mathbf{x}_{S_1}\|_2^2 &\leq \frac{1}{\alpha_{w,2s}^2} |\langle \mathbf{A}(\mathbf{x}_S + \mathbf{x}_{S_1}), \mathbf{Ax} \rangle| + \\ &\quad \frac{1}{\alpha_{w,2s}^2} |\langle \mathbf{A}(\mathbf{x}_S + \mathbf{x}_{S_1}), \sum_{i \geq 2} \mathbf{Ax}_{S_i} \rangle| \leq \\ &\quad \frac{1}{\alpha_{w,2s}^2} |\langle \mathbf{A}(\mathbf{x}_S + \mathbf{x}_{S_1}), \mathbf{Ax} \rangle| + \\ &\quad \frac{1}{\alpha_{w,2s}^2} \sum_{i \geq 2} |\langle \mathbf{Ax}_S, \mathbf{Ax}_{S_i} \rangle + \langle \mathbf{Ax}_{S_1}, \mathbf{Ax}_{S_i} \rangle|. \quad (9) \end{aligned}$$

将 $\mathbf{x}_S$ 、 $\mathbf{x}_{S_1}$ 标准化, 令 $\mathbf{u}_S := \frac{\mathbf{x}_S}{\|\mathbf{x}_S\|_2}$, $\mathbf{u}_{S_1} := \frac{\mathbf{x}_{S_1}}{\|\mathbf{x}_{S_1}\|_2}$,

得到

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{Au}_S, \mathbf{Au}_{S_1} \rangle &\leq \frac{1}{4} [\|\mathbf{A}(\mathbf{u}_S + \mathbf{u}_{S_1})\|_2^2 - \|\mathbf{A}(\mathbf{u}_S - \mathbf{u}_{S_1})\|_2^2] \leq \\ &= \frac{1}{2} (\beta_{w,2s}^2 - \alpha_{w,2s}^2), \end{aligned}$$

变换上述不等式得到

$$\langle \mathbf{Ax}_S, \mathbf{Ax}_{S_1} \rangle \leq \frac{\beta_{w,2s}^2 - \alpha_{w,2s}^2}{2} \|\mathbf{x}_S\|_2 \|\mathbf{x}_{S_1}\|_2, \quad (10)$$

用 S_1 代替 S 得到

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{Ax}_S, \mathbf{Ax}_{S_1} \rangle + \langle \mathbf{Ax}_{S_1}, \mathbf{Ax}_{S_1} \rangle| &\leq \\ &= \frac{\beta_{w,2s}^2 - \alpha_{w,2s}^2}{2} \|\mathbf{x}_{S_1}\|_2 (\|\mathbf{x}_S\|_2 + \|\mathbf{x}_{S_1}\|_2) \leq \\ &= \frac{\beta_{w,2s}^2 - \alpha_{w,2s}^2}{\sqrt{2}} \|\mathbf{x}_{S_1}\|_2 \|\mathbf{x}_S + \mathbf{x}_{S_1}\|_2, \quad (11) \end{aligned}$$

结合式(9)以及(11)有

$$\|\mathbf{x}_S + \mathbf{x}_{S_1}\|_2 \leq \frac{\gamma_{w,2s} - 1}{\sqrt{2}} \sum_{i \geq 2} \|\mathbf{x}_{S_i}\|_2 + \frac{\gamma_{w,2s}}{\beta_{w,2s}} \|\mathbf{Ax}\|_2. \quad (12)$$

接下来估算 $\sum_{i \geq 2} \|\mathbf{x}_{S_i}\|_2$ 的上界. 现将 $\mathbf{w}$ 标准化.

对于 $j \in S_i$, 令 $\mu_j := \frac{w_j^2}{\sum_{k \in S_{i-1}} w_k^2} \leq \frac{w_j^2}{s - \|\mathbf{w}\|_\infty^2}$, 得 $\sum_{j \in S_i} \mu_j =$

1. 当 $i \geq 2$ 时, 对任意 $j \in S_i$, 有

$$\frac{|x_j|^p}{w_j^p} \leq \sum_{k \in S_{i-1}} \frac{\mu_k |x_k|^p}{w_k^p} \leq \frac{1}{s - \|\mathbf{w}\|_\infty^2} \sum_{k \in S_{i-1}} |x_k|^p w_k^{2-p},$$

因此,

$$\|\mathbf{x}_{S_i}\|_2 \leq \left(\sum_{j \in S_i} x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{j \in S_i} (|x_j|^p w_j^{-p})^{\frac{2}{p}} w_j^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\left(\sum_{j \in S_i} w_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{s - \|\mathbf{w}\|_\infty^2} \right)^{\frac{1}{p}} \|\mathbf{x}_{S_{i-1}}\|_{w,p} \leq \left(\frac{1}{s - \|\mathbf{w}\|_\infty^2} \right)^{\frac{1}{p}} s^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{x}_{S_{i-1}}\|_{w,p}.$$

又因为 $s \geq 2\|\mathbf{w}\|_\infty^2$, 于是得到

$$\|\mathbf{x}_{S_i}\|_2 \leq 2^{\frac{1}{p}} s^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \|\mathbf{x}_{S_{i-1}}\|_{w,p}, \quad (13)$$

将式(13)代入式(12)有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_S\|_2 &\leq \|\mathbf{x}_S + \mathbf{x}_{S_1}\|_2 \leq (\gamma_{w,2s} - 1) \times \\ &\left(\frac{2}{s} \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} \sum_{i \geq 2} \|\mathbf{x}_{S_{i-1}}\|_{w,p} + \frac{\gamma_{w,2s}}{\beta_{w,2s}} \|\mathbf{Ax}\|_2 \leq \\ &(\gamma_{w,2s} - 1) \left(\frac{2}{s} \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} \|\mathbf{x}_{\bar{S}}\|_{w,p} + \frac{\gamma_{w,2s}}{\beta_{w,2s}} \|\mathbf{Ax}\|_2. \end{aligned}$$

利用上述不等式得到

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_S\|_{w,p} &\leq w(S)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} \|\mathbf{x}_S\|_{w,2} \leq s^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} \|\mathbf{x}_S\|_2 \leq \\ &(\gamma_{w,2s} - 1) 2^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} \|\mathbf{x}_{\bar{S}}\|_{w,p} + \frac{\gamma_{w,2s}}{\beta_{w,2s}} s^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} \|\mathbf{Ax}\|_2. \end{aligned} \quad (14)$$

令 $\rho := (\gamma_{w,2s} - 1) 2^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}}$ 以及 $\tau := \frac{\gamma_{w,2s}}{\beta_{w,2s}} s^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}}$, 可以看出 $\rho < 1$ 以及 $\tau > 0$, 所以式(14)就意味着 $\mathbf{A}$ 满足加权 l_p rNSP.

引理 2 对任意满足 $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|_2 \leq \epsilon$ 的 $\mathbf{x} \in R^N$ 与测量向量 $\mathbf{y} \in R^M$, 有

$$\|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})\|_2 \leq 2\epsilon, \quad (15)$$

其中 $\tilde{\mathbf{x}}$ 为式(5)的解.

证明 由 l_2 范数的三角不等式性, 有

$$\|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})\|_2 \leq \|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|_2 + \|\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|_2 \leq 2\epsilon.$$

定理 2 给定 $0 < p \leq 1$, 若

$$\gamma_{w,2s} - 1 < 2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}},$$

其中 $s \geq 2\|\mathbf{w}\|_\infty^2$, 那么式(5)的近似解 $\tilde{\mathbf{x}}$ 与原始解 $\mathbf{x}$ 的重构误差满足

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_{w,p} &\leq C_1 \sigma_s(\mathbf{x})_{w,p} + D_1 s^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} \epsilon, \\ \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_2 &\leq \frac{C_2}{s^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}}} \sigma_s(\mathbf{x})_{w,p} + D_2 \epsilon, \end{aligned}$$

其中常数 C_1, C_2, D_1, D_2 仅依赖于 p 以及加权重限制等

距常数 $\delta_{w,2s}$.

证明 令 $\mathbf{v} := \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}$, 任取一指标集 $S \subset [n]$ 满足 $\sigma_s(\mathbf{x})_{w,p} = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_S\|_{w,p} = \|\mathbf{x}_{\bar{S}}\|_{w,p}$. 根据元素 $v_S^p w_S^{-p}$ 的非递增重排, 将集合 $\bar{S}$ 分割成 $S_1, S_2, \dots$, 其中每个子指标集都满足 $s - \|\mathbf{w}\|_\infty^2 \leq w(S_i) \leq s$, 这就意味着当 $i \geq 2$ 时, 对任意 $j \in S_i$ 以及 $k \in S_{i-1}$, 可以得到 $|v_j|^p w_j^{-p} \leq |v_k|^p w_k^{-p}$, 且 $\tilde{\mathbf{x}}$ 是式(5)的解. 对此不等式变形有

$$\|\tilde{\mathbf{x}}_S\|_{w,p}^p + \|\tilde{\mathbf{x}}_{\bar{S}}\|_{w,p}^p \leq \|\mathbf{x}_S\|_{w,p}^p + \|\mathbf{x}_{\bar{S}}\|_{w,p}^p,$$

这就意味着

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_{w,p}^p &\leq 2\|\mathbf{x}_{\bar{S}}\|_{w,p}^p + \|\mathbf{v}_S\|_{w,p}^p = \\ &2\sigma_s(\mathbf{x})_{w,p}^p + \|\mathbf{v}_S\|_{w,p}^p. \end{aligned} \quad (16)$$

根据式(14)有

$$\|\mathbf{v}_S\|_{w,p}^p \leq \rho^p \|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_{w,p}^p + \tau^p \|\mathbf{Av}\|_2^p. \quad (17)$$

将式(16)代入式(17)得

$$\|\mathbf{v}_S\|_{w,p}^p \leq \frac{2\rho^p}{1 - \rho^p} \sigma_s(\mathbf{x})_{w,p}^p + \frac{\tau^p}{1 - \rho^p} \|\mathbf{Av}\|_2^p, \quad (18)$$

式中: $\rho := (\gamma_{w,2s} - 1) 2^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} < 1$; $\tau := \frac{\gamma_{w,2s}}{\beta_{w,2s}} s^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}}$. 利用

式(18)及不等式 $(a^p + b^p)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}-1} (a + b)$ ($a, b \geq 0$, $0 < p \leq 1$) 推导出

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{w,p} &\leq \left[2\|\mathbf{v}_S\|_{w,p}^p + 2\sigma_s(\mathbf{x})_{w,p}^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\frac{2^{\frac{2}{p}-1} (1 + \rho^p)^{\frac{1}{p}}}{(1 - \rho^p)^{\frac{1}{p}}} \sigma_s(\mathbf{x})_{w,p} + \frac{2^{\frac{2}{p}-1} \tau}{(1 - \rho^p)^{\frac{1}{p}}} \|\mathbf{Av}\|_2. \end{aligned} \quad (19)$$

结合式(15), 有

$$\|\mathbf{v}_S\|_{w,p}^p \leq \frac{2\rho^p}{1 - \rho^p} \sigma_s(\mathbf{x})_{w,p}^p + \frac{\tau^p}{1 - \rho^p} \|\mathbf{Av}\|_2^p.$$

对于 l_2 范数的误差估计, 类似式(12), 有

$$\|\mathbf{v}_{S \cup S_1}\|_2 \leq \frac{\gamma_{w,2s} - 1}{\sqrt{2}} \sum_{i \geq 2} \|\mathbf{v}_{S_i}\|_2 + \frac{\gamma_{w,2s}}{\beta_{w,2s}} \|\mathbf{Av}\|_2.$$

令 $a := \frac{\gamma_{w,2s} - 1}{\sqrt{2}}$ 以及 $b := \frac{\gamma_{w,2s}}{\beta_{w,2s}}$, 并且

$$\|\mathbf{v}\|_2 \leq \|\mathbf{v}_{S \cup S_1}\|_2 + \sum_{i \geq 2} \|\mathbf{v}_{S_i}\|_2 \leq (a + 1) \sum_{i \geq 2} \|\mathbf{v}_{S_i}\|_2 + 2b\epsilon. \quad (20)$$

类似式(13), 估算 $\sum_{i \geq 2} \|\mathbf{v}_{S_i}\|_2$ 的上界, 得到

$$\sum_{i \geq 2} \|v_{S_i}\|_2 \leq 2^{\frac{1}{p}} s^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{i \geq 2} \|v_{S_{i-1}}\|_{w,p}^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}} s^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \|v_{\bar{S}}\|_{w,p}, \quad (21)$$

由式(17)以及(19)推导出

$$\|v_{\bar{S}}\|_{w,p} \leq \frac{2^{\frac{2}{p}-1}}{(1-\rho^p)^{\frac{1}{p}}} \sigma_s(x)_{w,p} + \frac{2^{\frac{1}{p}} b}{(1-\rho^p)^{\frac{1}{p}}} s^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \epsilon. \quad (22)$$

将式(21)和(22)代入式(20)得到

$$\|v\|_2 \leq \frac{2^{\frac{3}{p}-1} (a+1)}{(1-\rho^p)^{\frac{1}{p}}} s^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \sigma_s(x)_{w,p} + \left[\frac{2^{\frac{2}{p}} b(a+1)}{(1-\rho^p)^{\frac{1}{p}}} + 2b \right] \epsilon,$$

其中 C_1, C_2, D_1, D_2 仅取决于 p 以及常数 $\delta_{w,2s}$.

3 小结

本文将加权最小化问题一般化到非凸加权最小化,证明了当测量矩阵满足带有加权重限制等距常数的加权 RIP 时,加权 RIP 比加权 rNSP 的性质更强,并证明了加权 RIP 是有噪声方程组的解能够稳定恢复的充分条件,并利用加权最佳逼近与噪声水平给出了近似解与标准解的误差估计. 这些结果说明了非凸加权最小化问题对含噪声的方程组解的重构仍具有稳定性.

当测量矩阵满足加权 RIP 时,能否通过其他方法将约束等距常数 $\delta_{w,2s}$ 的取值范围进一步扩大,且仍能保证任何加权信号都可被稳定恢复? 除了

加权 RIP, 未来有必要进一步探索测量矩阵的其他性质, 并讨论其解的误差估计.

参考文献:

- [1] Foucart S, Lai M J. Sparsest solutions of under-determined linear systems via l_q minimization for $0 < q \leq 1$ [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2009, 26:395-407.
- [2] Rauhut H, Ward R. Interpolation via weighted l_1 minimization [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2016, 40:321-351.
- [3] Huo H Y, Sun W C, Xiao L. New conditions on stable recovery of weighted sparse signals via weighted l_1 minimization [J]. Circuits, Systems, and Signal Processing, 2018, 37:2866-2883.
- [4] Wang Y, Wang J J, Xu Z B. On recovery of block-sparse signals via mixed l_2/l_q ($0 < q \leq 1$) norm minimization [J]. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2013, 2013:76.
- [5] Gao Y, Peng J G, Yue S G. Stability and robustness of the l_2/l_q -minimization for block sparse recovery [J]. Signal Processing, 2017, 137:287-297.
- [6] Aldroubi A, Chen X, Powell A. Stability and robustness of l_q minimization using null space property [C]//The 9th International Conference on Sampling Theory and Applications, 2011.
- [7] Chartrand R, Staneva V. Restricted isometry properties and nonconvex compressive sensing [J]. Inverse Problems, 2008, 24:035020.
- [8] Baraniuk R, Davenport M, DeVore R et al. A simple proof of the restricted isometry property for random matrices [J]. Constructive Approximation, 2008, 28:253-263.

Restricted isometry property in the weighted minimization problem

ZHANG Xiwen, WANG Jinping*

(School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: In this paper, the focus is set on the weighted minimization case. The definitions are first proposed of the weighted restricted isometry property (RIP) and the weighted robust null space property (rNSP) of measurement matrix. Then the assumption that the weighted RIP implies the weighted rNSP is proven. Finally, the reconstruction of error estimations based on the weighted RIP is derived as a sufficient condition.

Key words: weighted restricted isometry property; weighted sparsity; error estimation; weighted minimization

(责任编辑 韩超)