

维数约化的弱耦合 KP-Boussinesq 方程的 lump 解和有理解

刘 袁, 汪一航*

(宁波大学 数学与统计学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 利用 Z_m -KP 方程族, 构造了一个新的弱耦合广义 KP-Boussinesq 方程. 基于 Hirota 双线性方法, 通过构造对称的半正定矩阵, 得到维数约化情形下的 lump 解和有理解, 并对其基本特征进行了研究. 另外, 通过对有理解的数值分析研究了其动力学性质.

关键词: 弱耦合广义 KP-Boussinesq 方程; 双线性方程; lump 解; 有理解; 数值分析

中图分类号: O175

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2021) 05-0043-06

非线性演化方程描述了非线性现象, 具有广泛的应用. 非线性演化方程的精确解在非线性科学中起着至关重要的作用^[1-2]. lump 解是一种特殊的有理解, 它在空间的各个方向都是局域的^[3-4]. 基于构造平方函数^[5-7]和长波极限的方法^[8-10], 诸多方程都被发现存在 lump 解.

(3+1)维的广义 KP-Boussinesq 方程^[11]为

$$u_{xxx} + 3(u_x u_y)_x + (u_x + u_y + u_t)_t - u_{zz} = 0, \quad (1)$$

相当于把 u_{tt} 的项添加到广义 KP 方程中, $u = u(x, y, z, t)$ 是可微函数. 通过变量变换

$$u = 2(\ln f)_x, \quad (2)$$

可得式(1)的 Hirota 双线性形式, 即

$$(D_x^3 D_y + D_x D_t + D_y D_t + D_t^2 - D_z^2) f \cdot f = 0, \quad (3)$$

式中: $f = f(x, y, z, t)$ 为实辅助函数; D 为 Hirota 双线性微分算子. 利用极大交换子代数中取值的 Z_m -KP 方程族结构^[12-13], 得到弱耦合 KP-Boussinesq 方程:

$$\begin{cases} u_{xxx} + 3(u_x u_y)_x + (u_x + u_y + u_t)_t - u_{zz} = 0, \\ v_{xxx} + 3(u_x v_y + u_y v_x)_x + (v_x + v_y + v_t)_t - v_{zz} = 0, \end{cases} \quad (4)$$

式中, $v = v(x, y, z, t)$ 是可微函数.

1 lump 解和有理解

1.1 lump 解

对于 $z = y$ 的情况, 式(4)可简化为

$$\begin{cases} u_{xxx} + 3(u_x u_y)_x + (u_x + u_y + u_t)_t - u_{yy} = 0, \\ v_{xxx} + 3(u_x v_y + u_y v_x)_x + (v_x + v_y + v_t)_t - v_{yy} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

利用变量变换

$$\begin{cases} u = 2(\ln f)_x, \\ v = 2\left(\frac{g}{f}\right)_x, \end{cases} \quad (6)$$

式(5)可改写为双线性形式

$$\begin{cases} (D_x^3 D_y + D_x D_t + D_y D_t + D_t^2 - D_y^2) f \cdot f = 0, \\ (D_x^3 D_y + D_x D_t + D_y D_t + D_t^2 - D_y^2) f \cdot g = 0, \end{cases} \quad (7)$$

即

$$\begin{cases} ff_{xxx} - f_{xxx}f - 3f_x f_{xy} + 3f_{xx}f_{xy} + ff_{xt} - f_x f_t + \\ ff_{yt} - f_y f_t + ff_{tt} - f_t^2 - f_{yy} + f_y^2 = 0, \\ f_{xxx}g - f_{xxx}g - 3f_{xy}g_x + 3f_{xx}g_{xy} + 3f_{xy}g_{xx} - \\ 3f_x g_{xy} - f_y g_{xx} + fg_{xxx} + f_{xt}g - f_x g_t - \\ f_t g_x + fg_{xt} + f_{yt}g - f_y g_t - f_t g_y + fg_{yt} + \\ f_{tt}g - 2f_t g_t + fg_{tt} - f_{yy}g + 2f_y g_y - \\ fg_{yy} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

为得到方程(5)的 lump 解, 假设

$$\begin{cases} f = X^T A X + c_1, \\ g = X^T B X + c_2, \end{cases} \quad (9)$$

其中

收稿日期: 2021-03-17.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journal.lg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(11775121, 11435005).

第一作者: 刘袁(1995-), 男, 江苏泰州人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 孤立子理论和潮汐数值模拟. E-mail: 853420363@qq.com

*通信作者: 汪一航(1963-), 男, 浙江宁波人, 副教授, 主要研究方向: 潮汐数值模拟. E-mail: wangyihang@nbu.edu.cn

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \\ B &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix}, \\ X &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (10)$$

A 和 B 为对称矩阵, A 和 B 的元素及 c_1 、 c_2 均为实变量.

将式(9)代入式(7), 求解方程得到各参数的约束方程

$$\begin{aligned} a_{11} &= (a_{22}^2 - 2a_{22}a_{23} + 3a_{22}a_{33} - 4a_{23}^2 + 2a_{23}a_{33} + a_{33}^2) / a_{33}, \\ a_{12} &= \frac{a_{22}a_{23} - a_{22}a_{33} - a_{23}a_{33}}{a_{33}}, \\ a_{13} &= -\frac{a_{22}a_{33} - 2a_{23}^2 + a_{23}a_{33} + a_{33}^2}{a_{33}}, \\ a_{22} &= a_{22}, \\ a_{23} &= a_{23}, \\ a_{33} &= a_{33}, \\ c_1 &= \frac{3(a_{22}a_{23} - a_{22}a_{33} - a_{23}a_{33})}{a_{33}(a_{22}a_{33} - a_{23}^2)} \times \end{aligned} \quad (11)$$

将式(11)代入式(9)得到 f 的表达式

$$\begin{aligned} f &= \frac{a_{22}^2 - 2a_{22}a_{23} + 3a_{22}a_{33} - 4a_{23}^2 + 2a_{23}a_{33} + a_{33}^2}{a_{33}} x^2 + \\ &\quad \frac{2(a_{22}a_{23} - a_{22}a_{33} - a_{23}a_{33})}{a_{33}} xy - \\ &\quad \frac{2(a_{22}a_{33} - 2a_{23}^2 + a_{23}a_{33} + a_{33}^2)}{a_{33}} xt + a_{22}y^2 + \\ &\quad 2a_{23}yt + a_{33}t^2 + \frac{3(a_{22}a_{23} - a_{22}a_{33} - a_{23}a_{33})}{a_{33}(a_{22}a_{33} - a_{23}^2)} \times \\ &\quad (a_{22}^2 - 2a_{22}a_{23} + 3a_{22}a_{33} - 4a_{23}^2 + 2a_{23}a_{33} + a_{33}^2), \end{aligned} \quad (12)$$

为保证解 u 为 lump 解, 矩阵 A 和参数 c_1 必须满足以下约束:

(i) 矩阵 A 是一个半正定矩阵;

(ii) $c_1 > 0$;

(iii) A 中元素须满足约束 $a_{11} > 0$ 和 $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$.

条件(i)和(ii)保证 f 是一个恒大于 0 的函数. 条件(iii)保证 f 在任意时刻只有一个最小值.

在式(12)中有自由参数 a_{22} 、 a_{23} 、 a_{33} 和 c_1 . 对各参数取值如下:

$$\begin{aligned} a_{22} &= 4, \\ a_{23} &= \frac{3}{2}, \\ a_{33} &= 1, \\ c_1 &= \frac{66}{7}, \end{aligned} \quad (13)$$

则 f 的有理形式为

$$f = 11x^2 + 4y^2 + t^2 - 4tx + 3ty + xy + \frac{66}{7}, \quad (14)$$

由变换(6)得 lump 解 u 为

$$u = \frac{14(22x - 4t + y)}{7t^2 - 28tx + 21ty + 77x^2 + 7xy + 28y^2 + 66}. \quad (15)$$

接下来研究弱耦合 KP-Boussinesq 方程(5)的一系列解析解. 如果 $u = 2(\ln f)_x$ 是 lump 解, 这里令 $g = f_x$, 则 $v = 2\left(\frac{g}{f}\right)_x$ 也是弱耦合 KP-Boussinesq 方程的 lump 解. u 和 v 的解析表达式如下:

$$\begin{cases} u = \frac{14(22x - 4t + y)}{7t^2 - 28tx + 21ty + 77x^2 + 7xy + 28y^2 + 66}, \\ v = 14(42t^2 + 616tx + 518ty - 1694x^2 - 154xy + 609y^2 + 1452) / (7t^2 - 28tx + 21ty + 77x^2 + 7xy + 28y^2 + 66)^2. \end{cases} \quad (16)$$

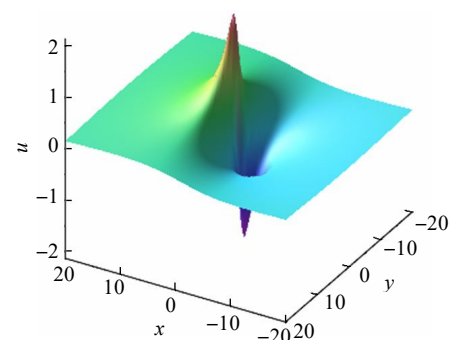
由图 1 可知, lump 解 u 的波峰空间轨迹为

$$\left(\frac{t}{5} + \frac{\sqrt{42}}{7}, -\frac{2t}{5}\right), \text{ 波谷空间轨迹为 } \left(\frac{t}{5} - \frac{\sqrt{42}}{7}, -\frac{2t}{5}\right);$$

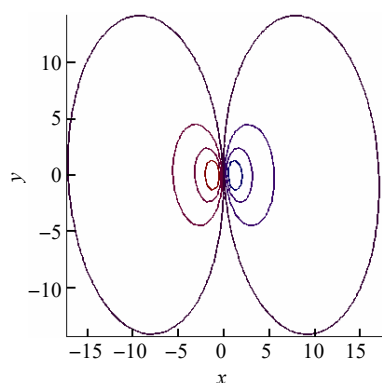
lump 波的最大值为 $\frac{\sqrt{42}}{3}$, 最小值为 $-\frac{\sqrt{42}}{3}$, 其移动速度为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$. lump 解 v 的动力演化如图 2 所示,

它在 $\left(\frac{1}{5}t, \frac{2}{5}t\right)$ 取到最大值 $\frac{14}{3}$, 在 $\left(\frac{t}{5} \pm \frac{3\sqrt{14}}{7}, -\frac{2}{5}t\right)$

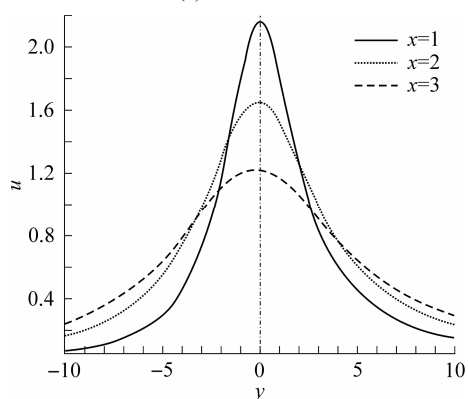
处取到最小值 $-\frac{7}{12}$.



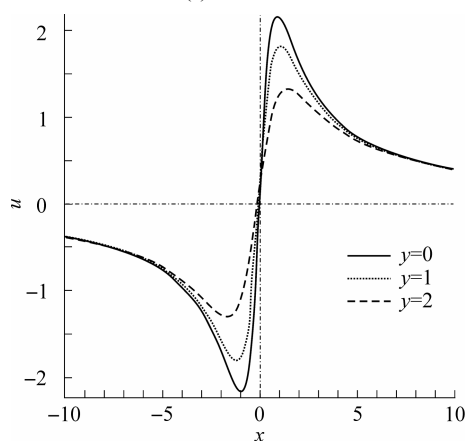
(a) 三维图



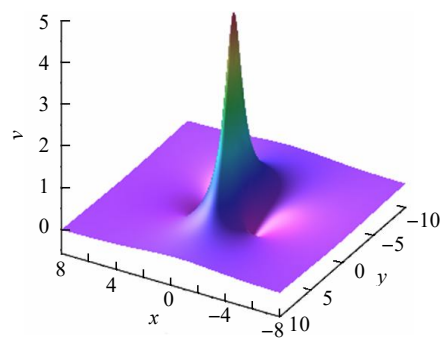
(b) 等高线图



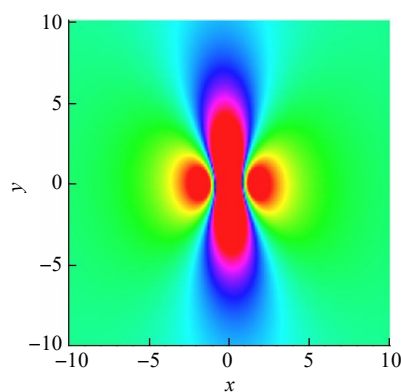
(c) x 截面图



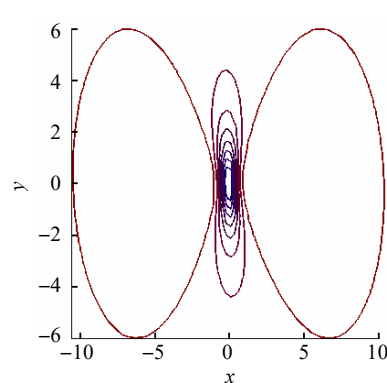
(d) y 截面图

图1 $t=0$ 时 lump 解 u 的特征

(a) 三维图



(b) 密度图



(c) 等高线图

图2 $t=0$ 时 lump 解 v 的特征

1.2 有理解

本节主要研究方程(4)的另一种有理解, 它表现出不同于 lump 解的性质.

将式(9)代入式(7)可解得如下约束方程:

$$b_{11} = 6b_{33} + 8b_{22} - 18b_{23},$$

$$b_{12} = -6b_{33} + 3b_{23} + \frac{1}{2}b_{22},$$

$$b_{13} = -\frac{11}{2}b_{33} + 5b_{23} - b_{22},$$

$$b_{22} = b_{22}, b_{23} = b_{23}, b_{33} = b_{33},$$

$$c_2 = -\frac{5886}{49}b_{33} + \frac{534}{49}b_{22} + \frac{2808}{49}b_{23}.$$

(17)

上式包含 3 个自由参数 b_{22} 、 b_{23} 和 b_{33} , 令参数值为

$$\begin{aligned} b_{22} &= 1, \\ b_{23} &= 2, \\ b_{33} &= 3, \end{aligned} \quad (18)$$

辅助函数 g 的解析表达式为

$$g = -10x^2 - 23xy - 15tx + y^2 + 4ty + 3t^2 - \frac{1644}{7}, \quad (19)$$

那么在变量变换(6)下可得 v_r :

$$\begin{aligned} v_r = & -14(21t^3 + 602t^2x + 385t^2y - 1435tx^2 + \\ & 1036txy + 903ty^2 - 1701x^2y + 714xy^2 + \\ & 651y^3 + 7566t - 34848x - 126y) / \\ & (7t^2 - 28tx + 21ty + 77x^2 + 7xy + \\ & 28y^2 + 66)^2, \end{aligned} \quad (20)$$

上述 v_r 为方程(5)的有理解, 图 3 所示为有理解 v_r 在不同时刻的动力演化.

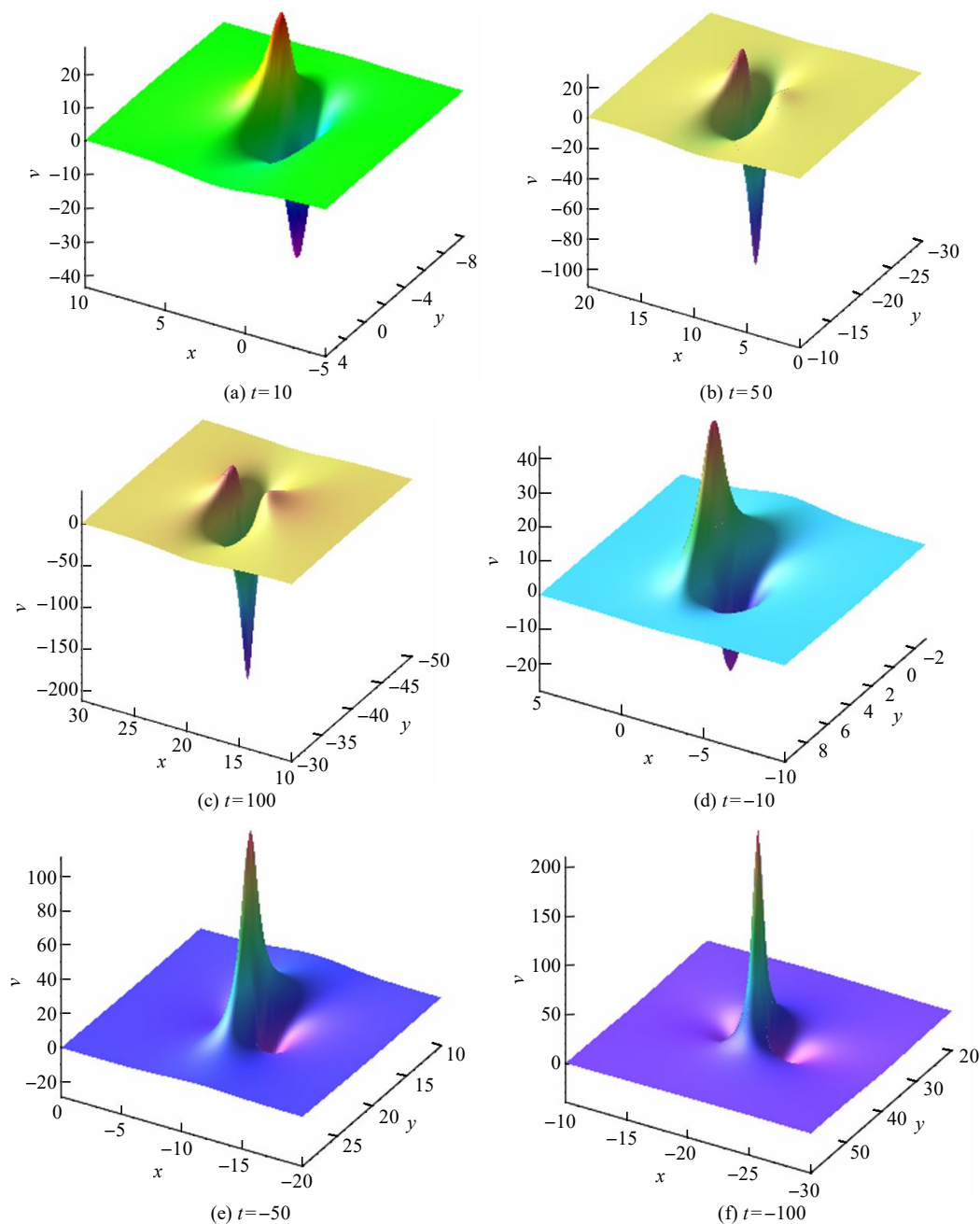


图 3 有理解 v_r 在不同 t 下的动力演化

分析有理解 v_r , 其表现出不同于 lump 解的性质. 首先, v_r 是奇函数, 即满足 $v_r(x, y, t) + v_r(-x, -y, -t) = 0$. 如果能计算出波峰在 $t > 0$ 时的轨迹, 那么可知任何 t 下的波峰位置. v_r 的偏导数反映了解的极值的性质, 通过计算 $v_{r,x} = 0$ 和 $v_{r,y} = 0$ 不能直接解出有理解的极值. 为了分析解的波峰和轨迹变化, 需要采用数值方法来研究其性质.

表 1 描述了 t 取不同值时有理解 v_r 的波峰变化, 其中 h 为峰值高度, $|v_{r,x}|$ 和 $|v_{r,y}|$ 的数值越小, 计算的波峰位置越精确. 从图 3 可以看出, 随着时间的增加, 波峰高度逐渐减小. 当 $t < 0$ 时, 波峰高度为正; 当 $t > 0$ 时, 波峰高度为负.

根据前面的描述, 对表 1 中的数据进行非线性拟合.

对于 $t > 0$, 波峰的运动轨迹近似符合下式:

$$\begin{cases} x = -\frac{8.29854540391583}{t + 5.28632840153326} + \frac{1}{5}t, \\ y = \frac{5.27183024308780}{t + 18.7412671427421} - \frac{2}{5}t. \end{cases} \quad (21)$$

根据奇函数的性质, 在 $t < 0$ 处波峰的轨迹为

$$\begin{cases} x = -\frac{8.29854540391583}{t - 5.28632840153326} + \frac{1}{5}t, \\ y = \frac{5.27183024308780}{t - 18.7412671427421} - \frac{2}{5}t, \end{cases} \quad (22)$$

波峰的高度 h 为

$$h = -9.17920280909090 - 2.03468243581818t. \quad (23)$$

由式(23)可知, 随着时间的增加, 波峰的运动过程近似为匀速线性运动. 此外, 任何单位时间所产生的高度变化值大约为 2. 为验证式(21)和式(22)能否准确表示出波峰的位置和高度, 另取不同的 t 值, 可得相应的波峰坐标和高度, 见表 2. 其中 $|v_{r,x}|$ 和 $|v_{r,y}|$ 略有增加, 这是因为当 $|t|$ 越大, 波峰越尖锐, 高度 h 的误差略有增加, 但这仍是有效计算出波峰高度的一种方法.

2 结语

在本研究中, 利用 Z_m -KP 方程族构造了一个新的弱耦合广义 KP-Boussinesq 方程. 基于 Hirota 双线性方法和符号计算研究了其维数约化情形的有理解问题. 通过假设半正定的对称矩阵形式的辅助函数, 限制参数之间的关系, 得到了 lump 解和有理解, 并讨论了 lump 解的动力学性质. 然后发现了一种不同于 lump 解的有理解, 并分析了其动力学性质. 由数值分析给出了有理解的波高和极值点的运动轨迹, 并通过相应的图表来说明其运动规律. 希望本文所描述的新结果能够对其他非线性模型的应用有所帮助.

表 1 有理解 v_r 的波峰位置和高度

t	x	y	h	$v_{r,x}$	$v_{r,y}$
60	11.873 734 22	-23.934 418 57	-131.874 131 9	0.505 042 28	-0.074 108 69
70	13.890 373 80	-27.941 655 86	-151.718 013 0	0.651 328 16	-0.118 351 17
80	15.903 138 44	-31.947 454 56	-171.776 419 5	0.641 057 95	-0.129 761 16
90	17.913 240 52	-35.952 204 82	-191.985 086 4	0.555 617 62	-0.123 530 04
100	19.921 434 44	-39.956 167 41	-212.302 819 3	0.435 248 75	-0.107 823 99
110	21.928 214 19	-43.959 523 25	-232.702 174 2	0.300 775 46	-0.087 223 26
120	23.933 916 78	-47.962 401 78	-253.161 513 8	0.163 613 91	-0.064 403 25
130	25.938 780 03	-51.964 898 08	-273.671 385 4	0.028 537 42	-0.040 747 71
140	27.942 976 55	-55.967 083 54	-294.218 774 6	-0.101 100 43	-0.017 182 68
150	29.946 634 65	-59.969 012 81	-314.798 267 6	-0.224 194 91	0.005 862 20

表 2 有理解 v_r 的估计

t	x	y	h	$v_{r,x}$	$v_{r,y}$
800	159.989 855 9	-319.993 905 6	-1 663.545 444	-0.596 900 84	0.116 869 25
900	179.990 979 2	-359.994 575 1	-1 871.702 448	-0.639 170 17	0.124 752 91
1 000	199.991 878 5	-399.995 112 1	-2 079.110 268	-0.660 414 72	0.128 428 76

参考文献:

- [1] Ma W X. Lump solutions to the Kadomtsev-Petviashvili equation[J]. Physics Letters A, 2015, 379(36):1975-1978.
- [2] Wang Z, Liu X. Bifurcations and exact traveling wave solutions for the KdV-like equation[J]. Nonlinear Dynamics, 2019, 95:465-477.
- [3] Chen Y, Huang L L. Lump solutions and interaction phenomenon for (2+1)-dimensional Sawada-Kotera equation[J]. Communications in Theoretical Physics, 2017, 67(5):473-478.
- [4] Peng W Q, Tian S F, Zhang T T. Analysis on lump, lumpoff and rogue waves with predictability to the (2+1)-dimensional B-type Kadomtsev-Petviashvili equation [J]. Physics Letters A, 2018, 382:2701-2708.
- [5] Chen M D, Li X, Wang Y, et al. A pair of resonance stripe solitons and lump solutions to a reduced (3+1)-dimensional nonlinear evolution equation[J]. Communications in Theoretical Physics, 2017, 67:595- 600.
- [6] Ma W X. Abundant lumps and their interaction solutions of (3+1)-dimensional linear PDEs[J]. Journal of Geometry and Physics, 2018, 133:10-16.
- [7] Ma W X. Lump and interaction solutions of linear PDEs in (3+1)-dimensions[J]. East Asian Journal on Applied Mathematics, 2019, 9:185-194.
- [8] Liu Y K, Li B, An H L. General high-order breathers, lumps in the (2+1)-dimensional Boussinesq equation[J]. Nonlinear Dynamics, 2018, 92:2061-2076.
- [9] Satsuma J, Ablowitz M J. Two-dimensional lumps in nonlinear dispersive systems[J]. Journal of Mathematical Physics, 1979, 20(7):1496-1503.
- [10] Yue Y F, Huang L L, Chen Y. Localized waves and interaction solutions to an extended (3+1)-dimensional Jimbo-Miwa equation[J]. Applied Mathematics Letters, 2018, 89:70-77.
- [11] Kaur L, Wazwaz A M. Dynamical analysis of lump solutions for (3+1) dimensional generalized KP-Boussinesq equation and its dimensionally reduced equations[J]. Physica Scripta, 2018, 93:075203.
- [12] Li C Z. Gauge transformation and symmetries of the commutative multicomponent BKP hierarchy[J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2016, 49: 015203.
- [13] Strachan I A B, Zuo D F. Integrability of the Frobenius algebra-valued Kadomtsev-Petviashvili hierarchy[J]. Journal of Mathematical Physics, 2015, 56:113509.

Lump and rational solutions to the dimensionally reduced weakly coupled KP-Boussinesq equation

LIU Yuan, WANG Yihang*

(School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: By taking advantage of Z_m -KP hierarchy, a new weakly coupled generalized KP-Boussinesq equation is constructed. Based on the Hirota bilinear method and constructions to the symmetric positive semi-definite matrix, the lump and rational solutions are obtained in the dimensionally reduced cases. Characteristics of solutions are also investigated. The dynamic properties of rational solutions are also derived using the numerical analysis.

Key words: weakly coupled generalized KP-Boussinesq equation; bilinear equations; lump solutions; rational solutions; numerical analysis

(责任编辑 韩 超)