

SBS 方程有界解的研究

赵 虹, 肖海滨*

(宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 对于 SBS 方程(双稳态方程) $u^{(4)} + qu'' + u^3 - u = 0$, 当参数 $q < 0$ 时, 若该方程的 1 个解在 $[x_0, \infty)$ ($x_0 \in R$) 上有界, 且在该范围内, $u'(x)$ 定号, 那么此解有 1 个无限数量的极值. 文中仅对参数 q 的范围进行了改变, 将 SBS 方程解的极值控制在了 3 个常数上, 由此得到了一个更精确的结论, 并同时给出相应的证明.

关键词: SBS 方程; 参数 q ; 有界解; 极限

中图分类号: O193

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2013) 02-0114-03

SBS 方程的一般形式为:

$$u^{(4)} + qu'' + u^3 - u = 0. \quad (1)$$

提到 SBS 方程不得不关注另外 2 个方程: SH (Swift-Hohenberg) 方程和 EFK (Extended Fisher-Kolmogorov) 方程. 1977 年, Swift 和 Hoherberg^[1] 在研究瑞利判据的时候提出了 SH 方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ku - \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 u - u^3, k \in R,$$

此方程被用于细胞流等方面的研究中. 在 1988 年时, 由 Dee 和 Van Saarloos^[2] 在研究物理系统时又提出了一个高维的模型方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -r \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u - u^3, r > 0,$$

称为 EFK 方程. 随后, Collet、Elphick 和 Repaux^[3] 将 EFK 方程作为原型导出了高阶双稳态系统关于时空的混沌, 随后 EFK 方程又广泛地被用于各种物理模型. 而 SBS 方程中的参数 q 若为负数就是标准的 EFK 方程; 当 q 为正数就是 SH 方程.

显然, 参数 q 取值范围的改变会影响解的许多性质. 特别是在 $-\infty < q \leq -\sqrt{8}$ 这个范围内, SBS 方程解有很特殊的性质, 即有 3 个常数解, 有单调的扭结以及周期解. 笔者主要是结合该方程的有界解的性质和 $-\infty < q \leq -\sqrt{8}$ 这个特殊的参数范围, 对 SBS 方程原有的一个定理进行了一点改变和推

广, 进而更好地丰富该方程解的性质.

1 相关定理及引理

定理 1^[4-5] 设 $u(x)$ 是方程(1) ($q < 0$) 的解, 且在 $[x_0, \infty)$ ($x_0 \in R$) 上有界. 如果当 $x \in (x_0, \infty)$ 时, $u'(x) \geq 0$ 或者 $u'(x) \leq 0$, 那么 $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) \in A$ (A 为常数), 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} u^{(i)}(x) = 0$ ($i = 1, 2, 3$).

引理 1^[6] 如果 $q < 0$, 那么对于所有的 $x \in R$, 方程(1)的任何有界解 $u(x)$ 都满足 $|u(x)| < \sqrt{2}$.

引理 2 (强极值原理)^[7] 设 w 是方程 $w'' + b(x) \cdot w' + c(x)w = f(x)$, $x \in R$ 的 1 个经典解, $b(x), c(x)$ 是实数域上的有界函数, 且 $c(x) \leq 0$, ($x \in R$). 如果对实数域上的所有 x 而言, 都存在 $f(x) \leq 0$, 且 $\liminf_{x \rightarrow -\infty} w(x) \geq 0$, $\liminf_{x \rightarrow +\infty} w(x) \geq 0$, 则 $w(x) > 0$, ($x \in R$).

引理 3 若 $-\infty < q \leq -\sqrt{8}$, $u(x)$ 是方程(1)的 1 个有界的非常数解. 若存在 2 个点 ξ_1 和 ξ_2 ($\xi_1 < \xi_2$), 且该 2 个点满足:

$$u(\xi_i) \leq 1, u'(\xi_i) = 0, u''(\xi_i) \geq 0 (i = 1, 2), \quad (2)$$

那么当 $x \in [\eta_1, \eta_2]$ 时, $u(x) < 1$.

证明 令 $u = 1 + v$, 将方程(1)写成与 v 有关的方程, 即:

$$v^{(4)} + qu'' + 2v = -v^2(3 + v) \leq 0. \quad (3)$$

由引理 1 可知, 因为 $3 + v = 2 + u > 2 - \sqrt{2} > 0$,

注意到(3)式的左边, 我们将它写成 2 个二维的微分算子:

$$\begin{cases} v'' - \mu_- v = w, \\ w'' - \mu_+ w \leq 0, \end{cases} \quad (4)$$

其中,

$$\mu_{\pm} = \frac{1}{2}(-q \pm \sqrt{q^2 - 8}) > 0.$$

由引理 3 的条件可得到 $w(\xi_i) \geq 0 (i=1,2)$.

因为 $\mu_+ > 0$, 对(5)式运用强极值原理, 当 $x \in (\xi_1, \xi_2)$ 时, $w(x) > 0$.

又因为 $u(\xi_i) \leq 1$, $u = 1 + v$, 所以 $v(\xi_i) \leq 0$, 对(4)式运用强极值原理, 可以得到, 当 $x \in (\xi_1, \xi_2)$ 时, $v < 0$. 即 $u < 1$.

证毕.

引理 4 若 $-\infty < q \leq -\sqrt{8}$, 则 $u(x)$ 是方程(1)的 1 个有界的非常数解, 那么在整个实数域上有 $|u(x)| < 1$.

证明 设 $u(x)$ 是实数域上的 1 个有界的非常数解, 那么现在只需证明, 当 $x \in R$ 时, $u(x) < 1$. 而 $u(x) > 1$ 是完全类似的证明.

利用反证法, 假设存在 1 个点 x_0 , $u(x_0) \geq 1$. 需要说明的是在 x_0 的左右邻域分别存在 2 个点 ξ_1 和 ξ_2 , 其中 u, u', u'' 都具有方程(2)的性质. 如果找到了这样的 2 个点, 那么再由引理 3, 当 $x \in [\eta_1, \eta_2]$ 时, $u(x) < 1$. 这就与假设矛盾.

下面, 我们证明存在 ξ_2 , 且 $\xi_2 > x_0$. 而 ξ_1 的证明类似.

令 η_1 和 η_2 是 (x_0, ∞) 上 2 个连续的局部最小点, 因此现在需证明 $u(\eta_1) \leq 1$ 或 $u(\eta_2) \leq 1$.

利用反证法, 假设 $u(\eta_1) > 1$, 并且 $u(\eta_2) > 1$, 则在 $[\eta_1, \eta_2]$ 上有 $u(x) > 1$, 因此, $u^{(4)} - |q|u'' = u(1-u^2) < 0$, $x \in [\eta_1, \eta_2]$. 由假设可知, 在区间 $[\eta_1, \eta_2]$ 上的端点处 $u'' \geq 0$. 对等式 $u^{(4)} - |q|u'' = u(1-u^2) < 0$ 应用强极值原理, 可得到 $u'' > 0$, $x \in [\eta_1, \eta_2]$. 那么当 $x \in [\eta_1, \eta_2]$, u' 是单调递增的, 所以 u' 不可能在端点处都为零.

如果 $u(\eta_1) \leq 1$, 则在 η_1 这个点处, 就有想要的性质. 可直接令 $\xi_2 = \eta_1$. 如果 $u(\eta_2) \leq 1$, 令 $\xi_2 = \eta_2$. 即找到了这样的 ξ_2 .

证毕.

引理 4^[4] 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} u^k(x) (k=1,2,3)$ 存在, 并且是

非零的常数, 则 $u(x)$ 无界.

引理 5^[6] 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = l$, $\lim_{x \rightarrow \infty} u''(x) = 0$, 则有 $\lim_{x \rightarrow \infty} u'(x) = 0$.

2 主要过程及结论

定理 2 设 $u(x)$ 是方程(1) ($-\infty < q \leq -\sqrt{8}$) 的解, 且在 $[x_0, \infty) (x_0 \in R)$ 上有界. 如果 $x \in (x_0, \infty)$ 时, $u'(x) \geq 0$ 或者 $u'(x) \leq 0$, 那么 $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) \in \{-1, 0, 1\}$, 并且 $\lim_{x \rightarrow \infty} u^{(i)}(x) = 0 (i=1,2,3)$.

证明 (1)不妨设 $u'(x) \geq 0 (x > x_0)$, 另一种情况完全类似.

由引理 4 可知, $|u(x)| < 1$. 进一步假设 $0 < u(x) < 1 (x > x_0)$. 此时需证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = l = 1$.

如若不然, 则利用反证法假设 $l \in (0, 1)$, 即 $\lim_{x \rightarrow \infty} u^{(4)} + qu'' = \lim_{x \rightarrow \infty} u(1-u^2) = l(1-l^2) > 0$.

那么存在这样的 x_1 满足 $x_1 > x_0 > 0$, 当 $x > x_1$ 时, $u^{(4)} + qu'' > M > 0$.

对上式进行两次积分, 得到 $u'' + qu > B + Ax + Mx^2/2 (A, B \text{ 为常数})$.

所以 $u'' > Mx^2/2 + (Ax + B - qu)$ 不失一般性, 必然存在 $x_2 > x_1$. 当 $x > x_2$ 时 (x 足够大), 可以保证:

$$u'' > \frac{1}{4}Mx^2. \quad (6)$$

将(6)式两次积分, 得到:

$$u > cx + \frac{1}{36}Mx^4.$$

所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} u = \infty$. 这与 u 的有界性矛盾.

因此假设不成立, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = l = 1$.

其他的证明类似.

(2) 将证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} u^{(i)}(x) = 0 (i=1,2,3)$.

令 $y = u''' + qu'$,

则 $y'' = (u^{(4)} + qu'')' = [u(1-u^2)]' = u'(1-3u^2)$. 又因为:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1-3u^2) = 1-3l^2 = \begin{cases} -2, l=1, -1, \\ 1, l=0, \end{cases}$$

所以当 $x \rightarrow \infty$ 时, y'' 有定号, 即 y 有定号, 因此 $\int y = u'' + qu$ 有定号.

不妨设 $\lim_{x \rightarrow \infty} (u'' + qu) = l_1$, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} u'' = l_1 - ql$ 存在.

由引理 4 可知 $\lim_{x \rightarrow \infty} u'' = 0$; 由引理 5 可知 $\lim_{x \rightarrow \infty} u' =$

0.

再由方程(1)可知, 易得到 $\lim_{x \rightarrow \infty} u^{(4)} = 0$, 所以

$\lim_{x \rightarrow \infty} u''' = 0$.

即证.

3 结语

比较文章中的定理 1 和定理 2, 当参数作了相应的改变, SBS 方程有界解的性质得到了很好的改善. 笔者将解的极限仅控制在 3 个常数上, 这样对 SBS 方程有界解性质的研究有很大的帮助和作用.

参考文献:

- [1] Swift J B, Hohenberg P C. Hydrodynamic fluctuations at the convective instability[J]. Phys Rev A, 1977, 15:319-328.
- [2] Dee G T, Saarloos W V. Bistable systems with propagating fronts leading to pattern formation[J]. Phys Rev Lett, 1988, 60:2614-2644.
- [3] Coullet P, Elphick C, Repaux D. Nature of spatial chaos[J]. Phys Rev Lett, 1987, 58:431-434.
- [4] Vandenberg G J B. Uniqueness of solutions for the extended Fisher-Kolmogorov equation[J]. C R Acad Sci Paris Ser I Math, 1998, 326:447-452.
- [5] Vandenberg G J B. The phase plane picture for a class of fourth order differentialequations[J]. Differential Equations, 2000, 161:110-153.
- [6] Peletier L A, Troy W C. Spatial patterns, higher order models in physics and mechanics[M]. Boston: Birkhauser Presses, 2001.
- [7] Protter M H, Weinberger H F. Maximum principles in differential equations[M]. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall Presses, 1967.

A Bit Description of Bounded Solutions to the SBS Equation

ZHAO Hong, XIAO Hai-bin*

(Faculty of science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: For the SBS equations (bistable equation) $u^{(4)} + qu'' + u^3 - u = 0$, when the parameters $q < 0$, and one of the equation's solution is bounded on $[x_0, \infty)$ ($x_0 \in R$), and in this range, $u'(x)$ is definite. As a result, the solution has an infinite number of extremes. In this paper, on the condition that only the range of parameters change, the SBS equations in the extreme can be controlled in three constants. From the proposed solution, a more accurate result can be obtained.

Key words: SBS equation; parameters; bounded solutions; limit

(责任编辑 章践立)