

共轭梯度子空间基追踪算法及其相关结果

郝嘉骏, 张茜雯, 王金平*

(宁波大学 数学与统计学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 压缩感知可以在低于 Nyquist 采样率条件下实现稀疏信号的精确恢复. 重构算法是压缩感知的主要研究内容之一. 本文基于子空间基追踪算法的回溯思想与共轭梯度法, 提出了共轭梯度子空间基追踪算法. 通过仿真实验验证了算法的有效性, 并讨论了该算法利用几种常见测量矩阵对稀疏信号的重构效果. 结果显示, 当测量矩阵为部分 Fourier 矩阵时, 该算法具有最优的重构效果.

关键词: 压缩感知; 测量矩阵; 共轭梯度; 迭代算法

中图分类号: O177.92

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2022) 01-0098-07

压缩感知理论由 Donoho 和 Candes 等在 2004 年首次提出, 目前压缩感知理论的主要研究方向分为信号稀疏性、测量矩阵和恢复算法 3 种. 有别于传统的 Nyquist 采样定理^[1], 压缩感知理论指出, 若一个信号是稀疏信号或者可以在某个变换域上表现为稀疏信号, 那么可以通过一个与变换基不相关的矩阵将此信号投影到低维空间上, 且此投影过程不会损失原信号中的信息, 因此通过该投影可以精确地重构出原信号^[2]. 压缩感知中的采样过程相对简单, 但恢复非常复杂, 所以对于恢复算法的研究是压缩感知中相当重要的一方面, 而对于测量矩阵的讨论不可避免地成为了重建算法的主要内容之一. 压缩感知的关键在于可以从线性测量中获取信息, 而无需从先前的测量中学习.

压缩感知理论经过十几年的快速发展, 已产生了许多具有不同复杂性和性能特征的有效算法, 其中贪婪算法因其结构简单、易于实现而得到广泛关注. 人们提出了很多改进算法, 例如正交匹配追踪(Orthogonal Matching Pursuit, OMP)算法^[3]、原子正则化正交匹配追踪(Regularized OMP, ROMP)算法^[4]、压缩采样匹配追踪(Compressive Sampling MP, CoSaMP)算法^[5]、子空间基追踪(Subspace Pursuit, SP)算法^[6]、分段正交匹配追踪(Stagewise OMP,

StOMP)算法^[7]、迭代硬阈值(Iterative Hard Thresholding, IHT)算法^[8]以及硬阈值基追踪(Hard Thresholding Pursuit, HTP)算法^[9]. 近几年来, 人们开始关注将共轭梯度法与贪婪算法结合. 2015 年 Blanchard 等^[10]提出了共轭梯度硬阈值(Conjugate Gradient Iterative Hard Thresholding, CGIHT)算法. 在此之后又相继出现了共轭硬阈值基追踪(Conjugate Gradient Hard Thresholding Pursuit, CGHTP)算法^[11]与改进的共轭硬阈值基追踪(Modified Conjugate Gradient Hard Thresholding Pursuit, CCGHTP)算法^[12]. 受此启发, 本文将共轭梯度法与 SP 算法相结合, 对 SP 算法加以改进得到相关结果.

1 预备知识

在最简单的形式中, 压缩感知理论通过小于向量长度的多次线性测量对稀疏向量重构. 设信号 $\mathbf{x} \in R^N$ 是一个至多包含 k 个非零元素的向量, 记为 $\|\mathbf{x}\|_0 := \text{card}(\text{supp}(\mathbf{x})) \leq k$, 其中 $\|\mathbf{x}\|_0$ 为 $\mathbf{x}$ 中非零元素的个数, $\text{supp}(\mathbf{x})$ 表示 $\mathbf{x}$ 中非零元素的指标集, 也称 $\mathbf{x}$ 的支撑集, 记为 $\text{supp}(\mathbf{x}) := \{j \in [N] : x_j \neq 0\}$. 若 $k \ll N$, 则称 $\mathbf{x}$ 为 k -稀疏信号. 又设测量矩阵 $\mathbf{A} \in R^{m \times N}$ ($m < N$), 测量向量 $\mathbf{y} \in R^m$, 则这一问

收稿日期: 2021-09-05.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journal.g.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(62071262).

第一作者: 郝嘉骏(1992-), 男, 山西长治人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 积分变换与图像处理. E-mail: 825821801@qq.com

*通信作者: 王金平(1962-), 男, 湖北武汉人, 教授, 主要研究方向: 积分变换与图像处理. E-mail: wangjinping@nbu.edu.cn

题可以表示为如下形式:

$$y = Ax. \quad (1)$$

不幸的是这一问题是 NP-hard 问题. 但是, 已经证明这一 l_0 范数最小化问题可以等价转化为压缩感知问题, 即尝试恢复稀疏度不超过 k 的向量 z 以尽可能地拟合测量值:

$$\min_{z \in R^a} \|y - Az\|_2 \text{ s.t. } \|z\|_0 \leq k. \quad (2)$$

1.1 投影与残差

定义 1 设 $y \in R^m$, $\Phi_l \in R^{m \times |I|}$, $\text{span}(\Phi_l)$ 表示由 Φ_l 张成的子空间, 假设 $\Phi_l^* \Phi_l$ 可逆, 则向量 y 在 $\text{span}(\Phi_l)$ 上的投影定义为

$$y_p = \text{proj}(y, \Phi_l) := \Phi_l \Phi_l^\dagger y, \quad (3)$$

其中: $\Phi_l^\dagger := (\Phi_l^* \Phi_l)^{-1} \Phi_l^*$ 为矩阵 Φ_l 的广义逆; Φ_l^* 表示矩阵 Φ_l 的转置. 残差向量 y_r 定义为

$$y_r = \text{resid}(y, \Phi_l) := y - y_p. \quad (4)$$

1.2 SP 算法

2009 年, Dai 等^[6]提出了针对稀疏信号恢复的 SP 算法. SP 算法的基本思想是通过有限次回溯寻找稀疏信号的正确支撑集. 在每次迭代中选取测量矩阵 Φ 与测量向量 y 相关性最大的 K 列加入稀疏信号 x 的候选原子集, 如果确定某一原子是正确的, 则将其加入稀疏信号 x 的支撑集, 一直到选出 x 所有的正确原子. SP 算法属于迭代贪婪算法, 具有低复杂度的优势, 具体算法如下:

输入: 稀疏度 K , 测量矩阵 Φ , 测量向量 y .

初始化:

(1) $T^0 = \{\Phi^* y \text{ 中 } K \text{ 个绝对值最大元素的指标}\};$

(2) $y_r^0 = \text{resid}(y, \Phi_{T^0}).$

迭代: 在第 l 次迭代中, 作

(1) $\tilde{T}^l = T^{l-1} \cup \{\Phi^* y_r^{l-1} \text{ 中 } K \text{ 个绝对值最大元素的指标}\};$

(2) $x_p = \Phi_{\tilde{T}^l}^\dagger y;$

(3) $T^l = \{x_p \text{ 中 } K \text{ 个绝对值最大元素的指标}\};$

(4) $y_r^l = \text{resid}(y, \Phi_{T^l});$

(5) 若 $\|y_r^l\|_2 > \|\tilde{y}_r^{l-1}\|_2$, 则令 $T^l = T^{l-1}$, 退出迭代, 否则继续迭代.

输出: 恢复的信号 $\hat{x}$ 满足 $\text{supp}(\hat{x}) = T^l$, 且 $\hat{x} = \Phi_{T^l}^\dagger y.$

1.3 测量矩阵的限制等距性质

对矩阵 $A \in C^{m \times N}$, 其中 C 代表任意实数或复

数, 其 k 阶限制等距性(Ristricted Isomaty Property, RIP)常数 $\delta_k = \delta_k(A)$ 为满足下式的最小值, 对任意的 k -稀疏信号 $x \in C^{m \times N}$, 有

$$(1 - \delta_k) \|x\|_2^2 \leq \|Ax\|_2^2 \leq (1 + \delta_k) \|x\|_2^2,$$

这等价于

$$\delta_k = \max_{S \subseteq [N], \text{card}(S) \leq k} \|A_S^* A_S - Id\|_{2 \rightarrow 2} = \max_{x \in C^S \setminus \{0\}} \frac{\langle (A_S^* A_S - Id)x, x \rangle}{\|x\|_2^2}.$$

2006 年, Candès 等^[13]建立了著名的 RIP 理论, 成为压缩感知的奠基性理论. 该结果表明: 只要测量矩阵满足上述 RIP, 那么采样数 $M \geq CK \ln(N/K)$ (C 为任意复数)时就能将 N 维信号的 K 个最大值稳定地重建出来.

1.4 常见的测量矩阵

1.4.1 Gauss 随机测量矩阵

Gauss 随机测量矩阵的元素服从均值为 0, 方差为 $1/\sqrt{M}$ 的 Gauss 分布, 即 $\Phi \sim N(0, 1/\sqrt{M})$.

1.4.2 Bernoulli 随机测量矩阵

Bernoulli 矩阵中元素服从 Bernoulli 分布, 矩阵元素只有 $\pm 1/\sqrt{M}$ 且两元素的个数相同, 即元素的概率各为 0.5, 表示如下

$$\Phi = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{M}}, P = 0.5, \\ \frac{1}{\sqrt{M}}, P = 0.5. \end{cases} \quad (5)$$

1.4.3 部分 Fourier 矩阵

部分 Fourier 矩阵和部分 Hadamard 矩阵是部分正交矩阵的两种特例. 构造部分 Fourier 矩阵的方法为先构造 $N \times N$ 的正交矩阵 U , 然后在 U 中随机取 M 行向量, 将生成的 $M \times N$ 矩阵每一列归一化. 部分 Fourier 矩阵的稀疏度需要满足 $K \leq CM / (\ln N)^6$ 才能精确恢复^[14].

1.4.4 部分 Hadamard 矩阵

Hadamard 矩阵的结构比较特殊, 是正交矩阵的一种, 且矩阵维度 N 必须满足 $N = 2n$ (n 为正整数), 这限制了矩阵的应用范围. 其构造方法为先生成 $N \times N$ 的 Hadamard 矩阵, 然后随机选取 M 行, 生成 $M \times N$ 的部分 Hadamard 矩阵. 由于 Hadamard 矩阵的良好性质, 上述方法所产生的 Hadamard 矩阵仍有较强的非相关性和部分正交性.

1.4.5 稀疏随机测量矩阵

稀疏随机测量矩阵的构造法为先生成 $M \times N$ 的全零矩阵 Φ , 且 $M < N$, 然后随机选取每一列中的 d ($d < M$) 个位置, 令该位置元素为 1. d 通常取 $\{4, 8, 10, 16\}$, 且对重建效果影响不大^[15-16], 本文中采用 $d = 4$.

1.4.6 Toeplitz 矩阵和循环矩阵

Toeplitz 矩阵通过行向量循环位移生成. 因为矩阵容易实现, 所以应用前景较好. 一般形式为

$$T_N = \begin{pmatrix} t_N & t_{N-1} & \cdots & t_1 \\ t_{N+1} & t_N & \cdots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{2N-1} & t_{2N-2} & \cdots & t_N \end{pmatrix}. \quad (6)$$

构造方法^[17]为首先生成一维随机向量 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in R^N, u_i = \pm 1$, 且 $\mathbf{u}$ 中元素均服从 Bernoulli 分布, 然后对 $\mathbf{u}$ 进行 M 次循环, 构造其他 $M-1$ 行向量, 最后对矩阵列进行归一化得到测量矩阵.

循环矩阵则是 Toeplitz 矩阵的一种特殊形式, 可表示为

$$C_N = \begin{pmatrix} c_N & c_{N-1} & \cdots & c_1 \\ c_1 & c_N & \cdots & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N-1} & c_{N-2} & \cdots & c_N \end{pmatrix}. \quad (7)$$

2 共轭梯度子空间基追踪算法

共轭梯度法最早是由 Hestenes 和 Stiefle 提出来的, 在此基础上, Fletcher^[18]首先提出了解非线性最优化问题的共轭梯度法. 共轭梯度法是介于最速下降法与牛顿法之间的一种方法, 它仅需要利用一阶导数信息, 既克服了最速下降法收敛慢的缺点, 又避免了牛顿法需要存储和计算 Hesse 矩阵并求逆的缺点. 共轭梯度法不仅是解决大型线性方程组最有用的方法之一, 也是解大型非线性最优化最有效的算法之一. 在各种优化算法中, 共轭梯度法是非常重要的一种, 其优点是所需存储量小、具有步收敛性、稳定性高, 而且不需要任何外来参数.

2015 年 Blanchard 等^[10]将共轭梯度引入 IHT 算法, 提出了 CGIHT 算法. 受此思想启发, 本文将共轭梯度法引入 SP 算法, 提出共轭梯度子空间基追踪 (Conjugate Gradient Subspace Pursuit, CGSP) 算法.

算法主要分为两步, 其一是在每次迭代过程中应用共轭梯度法确定迭代方向与步长, 给出本次迭代过程中的解 $\mathbf{x}_l$ (l 为对应的迭代次数), 该解可以违反信号的稀疏或低秩约束; 其二是依据迭代过程中生成的迭代解投影到所选原子集合生成的超平面上, 此时所得到的信号满足式(2)中要求的稀疏条件. 具体来说, 本文提出了新算法以保持每次迭代复杂度低和渐近收敛速度快的优势.

CGSP 算法:

输入: 稀疏度 K , 测量矩阵 Φ , 测量向量 $\mathbf{y}$.

初始化: $\mathbf{r}_0 = \Phi * \mathbf{y}, p_0 = \mathbf{r}_0, T_0 = \text{supp}_K(\mathbf{r}_0), \mathbf{x}_0 = \text{proj}_{T_0}(\mathbf{r}_0), l = 1$.

迭代: 若迭代次数 l 小于等于 $2K$ 次,

(1) 更新残差 $\mathbf{r} = \mathbf{y} - \Phi * \mathbf{x}_{l-1}$;

(2) 更新支撑集 $T_l = T_{l-1} \cup \{\text{残差 } \mathbf{r} \text{ 中绝对值最大的前 } K \text{ 个元素的指标}\}$;

(3) 计算当前负梯度方向 $\mathbf{r}_l = \Phi^* * \mathbf{r}$;

(4) 若支撑集未发生变化,

$$\beta_l = -\frac{\langle \Phi \text{proj}_{T_{l-1}}(\mathbf{r}_{l-1}), \Phi \text{proj}_{T_{l-1}}(\mathbf{p}_{l-2}) \rangle}{\langle \Phi \text{proj}_{T_{l-1}}(\mathbf{p}_{l-2}), \Phi \text{proj}_{T_{l-1}}(\mathbf{p}_{l-2}) \rangle},$$

否则 $\beta_l = 0$;

(5) 确定搜索方向 $\mathbf{p}_l = \mathbf{r}_l + \beta_l * \mathbf{p}_{l-1}$;

(6) 给出最佳步长

$$\alpha_l = \frac{\langle \text{proj}_{T_{l-1}}(\mathbf{r}_{l-1}), \text{proj}_{T_{l-1}}(\mathbf{p}_{l-1}) \rangle}{\langle \Phi \text{proj}_{T_{l-1}}(\mathbf{p}_{l-1}), \Phi \text{proj}_{T_{l-1}}(\mathbf{p}_{l-1}) \rangle};$$

(7) 更新迭代结果 $\mathbf{x}_l = \mathbf{x}_{l-1} + \alpha_l * \mathbf{p}_l$;

(8) 更新 $T_l = \{\mathbf{x}_l \text{ 中绝对值最大的前 } K \text{ 个元素的指标}\}$.

输出: 当迭代次数 l 大于 $2K$ 时或者 $\|\mathbf{r}\|_2$ 满足所需时, 输出 K 稀疏信号 $\mathbf{x}_l = \text{proj}_{T_l}(\mathbf{x}_l)$.

3 仿真实验

3.1 稀疏信号单次恢复实验

本实验测试算法的有效性, 实验主要内容为: 测量数设为 $M = 128, N = 256$; 稀疏信号 $\mathbf{x} \in R^N$ 由 Matlab 中 randn 函数随机生成, 稀疏度 $K = 10$; 实验分别用 Gauss 随机矩阵、Bernoulli 矩阵(式(5))、部分 Fourier 矩阵、部分 Hadamard 矩阵、稀疏随机测量矩阵、Toeplitz 测量矩阵(式(6))以及循环测量矩阵(式(7))恢复该稀疏信号. 实验结果如图 1 所示.

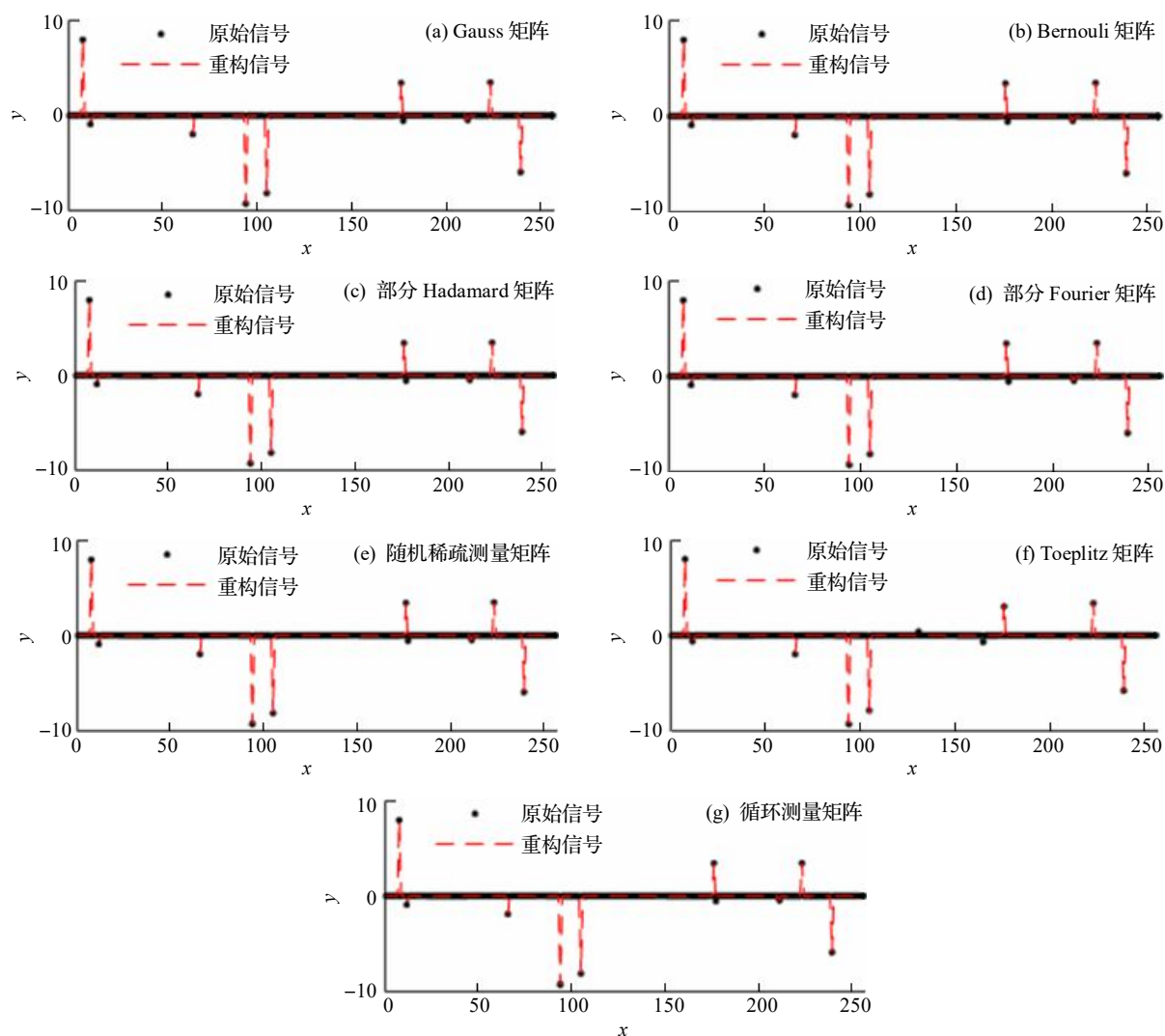


图1 不同测量矩阵单次恢复结果

通过不同测量矩阵恢复该稀疏信号 x 时, 对应的误差值见表 1.

表1 不同测量矩阵恢复误差

测量矩阵	恢复误差	测量矩阵	恢复误差
Gauss 矩阵	2.85×10^{-6}	Toeplitz 矩阵	8.55×10^{-4}
Bernoulli 矩阵	2.91×10^{-6}	循环矩阵	6.20×10^{-3}
部分 Hadamard 矩阵	1.02×10^{-6}	随机稀疏测量矩阵	9.41×10^{-2}
部分 Fourier 矩阵	5.51×10^{-7}		

由图 1 与表 1 可以看出, 在实验所设条件下, CGSP 算法以 7 种常用矩阵为测量矩阵时均可以实现稀疏信号 x 的精确恢复, 且测量矩阵为 Fourier 矩阵时重构误差最小, 测量矩阵为随机稀疏测量

矩阵时误差最大. 实验初步证明本文所提算法可以对满足要求的稀疏信号进行精确恢复.

3.2 无噪声稀疏信号测量矩阵效果实验

本实验为特定情况下测试算法对稀疏信号的恢复效果, 共分为 3 部分.

第 1 部分为给定 $M = 128, N = 256$, 针对曲线在不同稀疏度区间的不同陡峭程度, K 的步长取值也不同. 在 $K \in [1, 64]$ 时, K 的步长为 1; 当 $K \in [65, M]$ 时, 步长为 5.

测量矩阵分别取均值为 0, 方差为 $\sqrt{M}$ 的 Gauss 随机矩阵、Bernoulli 矩阵、部分 Fourier 矩阵、部分 Hadamard 矩阵、随机稀疏测量矩阵、Toeplitz 矩阵以及循环测量矩阵, 对每个矩阵都进

行 1 000 次恢复实验. 若恢复得到的信号与原信号的误差 $e < 0.01$ 则认为恢复成功, 计算满足恢复误差的试验次数, 并得到对应稀疏度下算法的恢复成功率. 若恢复成功率高于 95%, 则认为算法在该条件下可以对稀疏信号 x 稳定恢复. 本次实验共耗时 5 967.233 243 s, 所得实验结果如图 2 所示. 4 种测量矩阵实现稳定恢复的稀疏度区间见表 2.

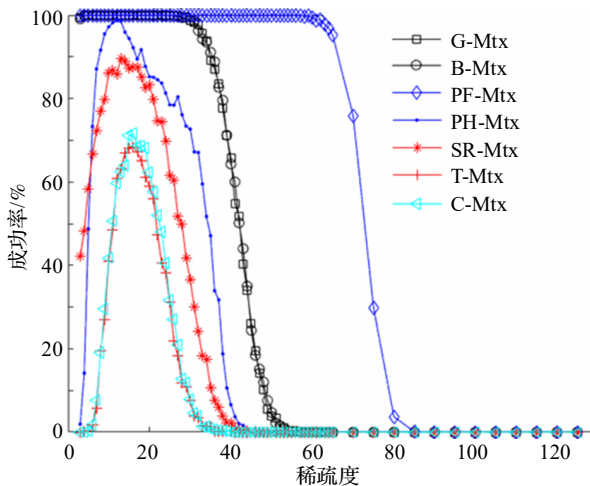


图2 不同稀疏度的恢复成功率

表2 4种测量矩阵实现稳定恢复的稀疏度区间

测量矩阵	稀疏度区间
Gauss 随机矩阵	[1,33]
Bernoulli 矩阵	[1,33]
部分 Fourier 矩阵	[1,64]
部分 Hadamard 矩阵	[9,15]

第2部分则给定 $K = 30, N = 256$, 测量数 M 从 $2K$ 一直取到矩阵列数 N , 其他条件不变, 均如实验第1部分所设. 实验结果如图3所示, 4种测量矩阵的最小测量数见表3.

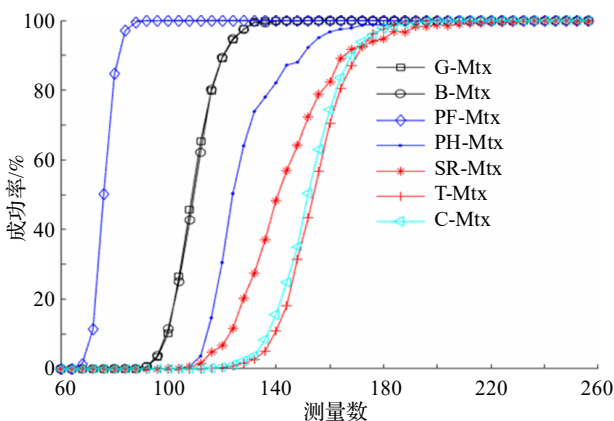


图3 不同测量数的恢复成功率

表3 4种测量矩阵稳定重构最小测量数

测量矩阵	最小测量数
Gauss 随机矩阵	124
Bernoulli 矩阵	124
部分 Fourier 矩阵	83
部分 Hadamard 矩阵	156

从图2与图3可知, CGSP 算法在上述条件下恢复稀疏信号 x 时, 测量矩阵为部分 Fourier 矩阵时表现最好. 表2列举了4种测量矩阵所能够稳定恢复稀疏信号的稀疏区间. 从表2中可得, 当稀疏度 K 为变量, 测量数 $M = 128$ 时, 应用该测量矩阵算法能在稀疏区间 $K \in [1, 64]$ 上稳定实现稀疏信号恢复, Gauss 矩阵和 Bernoulli 矩阵二者次之, 稀疏区间为 $[1, 33]$, Hadamard 矩阵的稀疏区间为 $[9, 15]$, 而剩余3种则在此误差阈值下效果很差, 达不到稳定重构稀疏信号的条件. 图3中, 以测量数为变量, 稀疏度 $K = 30$ 时, 算法在部分 Fourier 矩阵情况下只需测量数 $M \geq 83$ 即可实现稳定重构. 比较表3中测量数较少的4种矩阵分别实现稳定重构的最小测量数, 结果显示部分 Fourier 矩阵比 Gauss 矩阵和 Bernoulli 矩阵所需的测量数少 33.1%, 比部分 Hadamard 矩阵少 46.8%.

第3部分为在给定矩阵行数 $M = 128$ 的条件下, 稀疏度与算法恢复误差以及恢复时间之间的关系, 实验设置如下:

(a) 测量矩阵分别取均值为 0, 方差为 $\sqrt{M}$ 的 Gauss 随机矩阵、Bernoulli 矩阵、部分 Fourier 矩阵以及部分 Hadamard 矩阵, 其余3种矩阵在本次实验中不进行讨论;

(b) 稀疏度 K 满足首项为 1, 公差为 5, 末项为矩阵行数 M 的等差数列;

(c) 在对应的稀疏度 K 和测量矩阵行数 M 对稀疏信号进行 1 000 次恢复实验, 取每次实验所得误差值的算术平均值与恢复时间的算术平均值.

实验结果见表4.

表4 4种测量矩阵的恢复参数

测量矩阵	最大稀疏度	恢复误差	恢复时间/s
Gauss 随机矩阵	23	9.4×10^{-3}	0.004 7
Bernoulli 矩阵	23	1.27×10^{-6}	0.004 5
部分 Fourier 矩阵	58	2.06×10^{-6}	0.240 0
部分 Hadamard 矩阵	13	1.264×10^{-7}	0.004 3

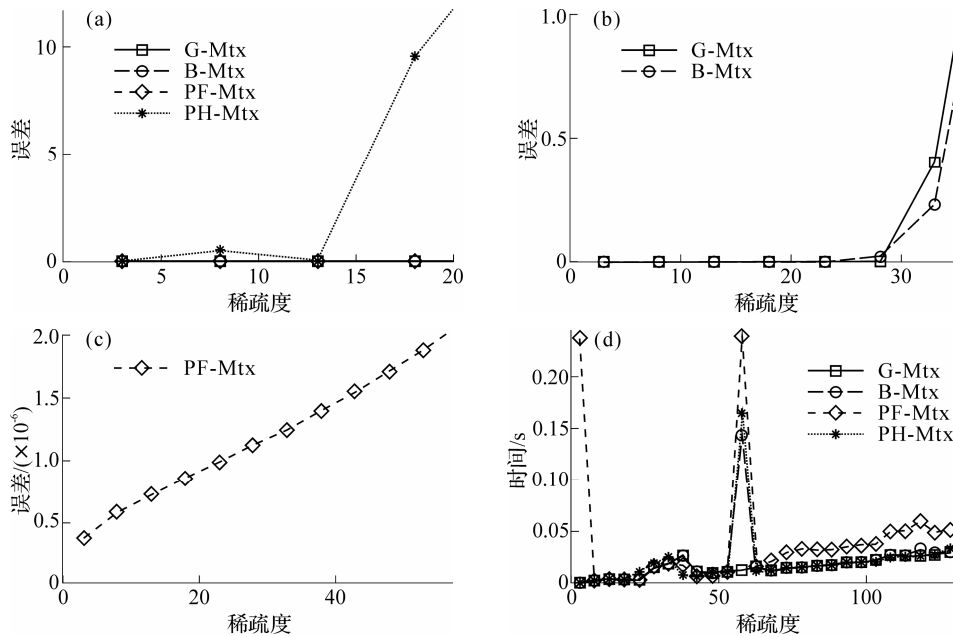


图4 4种测量矩阵的恢复误差与时间

图4所示为该算法在不同测量矩阵重构稀疏信号时信号稀疏度 K 与重构误差或所消耗时间的关系. 由图4(a)可知部分 Hadamard 矩阵只在稀疏度 $K \leq 13$ 时具有较好的重构效果; 由图4(b)可知 Gauss 随机矩阵与 Bernoulli 矩阵这两类矩阵重构效果非常接近, 当稀疏度 $K \leq 28$ 时这两类矩阵重构的误差曲线几乎一致, 而随着稀疏度 K 继续增大, Gauss 矩阵的重构误差略大于 Bernoulli 矩阵; 由图4(c)可得测量矩阵为部分 Fourier 矩阵时, 该算法在稀疏度 $K \in [1, 58]$ 时重构误差均很小; 由图4(d)所示的算法在4种测量矩阵情况下重构不同稀疏度的稀疏信号所消耗的时间可知, 在低稀疏度下 ($K=3$), 部分 Fourier 矩阵恢复时间明显高于其他3种测量矩阵, 当 $K=58$ 时 Gauss 矩阵恢复时间大幅低于其他3种矩阵, 而部分 Fourier 矩阵恢复时间最长, 且随着稀疏度 K 的增大, 部分 Fourier 矩阵恢复时间一直比其他矩阵的恢复时间略长. 综上, 以稀疏度 K 为变量, 随稀疏度的增加, 部分 Fourier 矩阵性能最好.

4 结论

本文通过将 SP 算法与共轭梯度法相结合对 SP 算法加以改进提出了 CGSP 算法, 并使用几种常见的测量矩阵对此算法的有效性加以验证, 实验证

明此算法确实可行. 在此基础上, 本文设计实验讨论了算法在无噪声条件下应用各测量矩阵时对稀疏信号的重构效果. 结果表明, 算法在测量矩阵为部分 Fourier 矩阵时效果最好, 表现在两方面: 首先, 以稀疏度为变量, 算法在部分 Fourier 矩阵下所需测量数最少; 其次, 以测量数为变量, 算法能够重构的稀疏度区间最广. 限于篇幅, 本文只选取了较为常见的几种测量矩阵测试并给出了仿真结果, 其他的测量矩阵均可以同上述方法讨论. 此外, 本文只给出了算法在不同测量矩阵下的相关实验结果, 并未对算法进行理论分析, 这是下一阶段研究的目标.

参考文献:

- [1] Jerri A J. The Shannon sampling theorem—Its various extensions and applications: A tutorial review[J]. Proceedings of the IEEE, 1977, 65(11):1565-1596.
- [2] Donoho D L. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4):1289-1306.
- [3] Trop J A, Gilbert A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007, 53(12):4655-4666.
- [4] Needell D, Vershynin R. Signal recovery from incomplete and inaccurate measurements via regularized orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Journal of Selected Topics in

- Signal Processing, 2010, 4(2):310-316.
- [5] Needell D, Tropp J A. CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2009, 26(3):301-321.
- [6] Dai W, Milenkovic O. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2009, 55(5):2230-2249.
- [7] Donoho D L, Tsaig Y, Drori I, et al. Sparse solution of underdetermined systems of linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2012, 58(2):1094-1121.
- [8] Blumensath T, Davies M E. Iterative hard thresholding for compressed sensing[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2009, 27(3):265-274.
- [9] Foucart S. Hard thresholding pursuit: An algorithm for compressive sensing[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2011, 49(6):2543-2563.
- [10] Blanchard J D, Tanner J, Wei K. CGIHT: conjugate gradient iterative hard thresholding for compressed sensing and matrix completion[J]. Information and Inference: A Journal of the IMA, 2015, 4(4):289-327.
- [11] Zhang Y, Huang Y, Li H, et al. Conjugate gradient hard thresholding pursuit algorithm for sparse signal recovery [J]. Algorithms, 2019, 12(2):36.
- [12] Zhu Z, Ma J, Zhang B. A new conjugate gradient hard thresholding pursuit algorithm for sparse signal recovery [J]. Computational and Applied Mathematics, 2020, 39(4): 1-20.
- [13] Candès E J, Romberg J K, Tao T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2006, 59(8):1207-1223.
- [14] Tur R, Eldar Y C, Friedman Z. Innovation rate sampling of pulse streams with application to ultrasound imaging [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(4): 1827-1842.
- [15] 李小波. 基于压缩感知的测量矩阵研究[D]. 北京: 北京交通大学, 2010.
- [16] Gilbert A, Indyk P. Sparse recovery using sparse matrices [J]. Proceedings of the IEEE, 2010, 98(6):937-947.
- [17] Bajwa W U, Haupt J D, Raz G M, et al. Toeplitz-structured compressed sensing matrices[C]//2007 IEEE/SP 14th Workshop on Statistical Signal Processing, IEEE, 2007:294-298.
- [18] Fletcher R. Conjugate Gradient Methods for Indefinite systems[M]//Watson G A. Numerical Analysis. Berlin: Springer, 1976:73-89.

Conjugate gradient subspace pursuit algorithm and related results

HAO Jiajun, ZHANG Xiwen, WANG Jinping*

(School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: Compressed sensing can accurately recover sparse signals below Nyquist sampling rate. Reconstruction algorithm is one of the main research contents of compressed sensing. Based on the backtracking notion of subspace pursuit algorithm and conjugate gradient method, a conjugate gradient subspace pursuit algorithm is proposed in this paper. The effectiveness of the algorithm is verified through simulations, and the reconstruction effect of the algorithm on sparse signals is discussed using several common measurement matrices. The results show that the algorithm has the best reconstruction effect when the measurement matrix is a partial Fourier matrix.

Key words: compressed sensing; measurement matrix; conjugate gradient; iterative algorithm

(责任编辑 韩 超)