

线性 Boussinesq 方程的色散量子化现象

张苗苗, 李茂华*

(宁波大学 数学与统计学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 为研究线性 Boussinesq 方程的周期初边值问题解在大波数条件下的渐近行为, 通过将方程解表示成 Fourier 级数形式, 利用 Matlab 软件进行数值模拟. 结果表明: 方程色散关系的渐近行为对方程解在大波数条件下的渐近行为起决定性作用, 线性 Boussinesq 方程存在色散量子化现象.

关键词: 线性 Boussinesq 方程; 周期初边值问题; 色散关系; 渐近行为; 色散量子化

中图分类号: O29

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2022) 02-0027-08

20 世纪 90 年代, Berry^[1]在研究周期域上线性 Schrödinger 方程时发现其解有明显的动力学行为, 进一步研究得到: 初值条件为阶梯函数的解在有理时刻为分段函数; 在无理时刻呈现类分形连续不可微状态. Talbot^[2]发现这一现象在光学实验中也存在. 因此, Berry 称这一现象为 Talbot 效应. 紧接着 Berry 等^[3-4]发现这种现象也存在光学和量子力学中. 随后 Kapitanski 等^[5]、Oskolkov^[6-7]以及 Taylor^[8]对 Talbot 效应进行了分析. 2010 年, Olver^[9]研究了线性 KdV 方程在周期域上的初值条件为阶梯函数时, 发现其初边值问题的解满足 Talbot 效应, 进而将结论推广到色散关系为整数多项式的线性色散方程中. Chen 等^[10]对初值条件为阶梯函数, 且具有一般色散关系的线性和非线性色散方程进行了数值模拟, 从数值结果中得到对于线性色散方程, 色散关系的大波数渐近行为对周期域上的非光滑解的演化有决定性作用. 2021 年, 尹子涵等^[11]对二维线性 KdV 方程和 Schrödinger 方程的周期初边值问题进行了研究, 得出此类方程的解存在色散量子化现象. 但对线性 Boussinesq 方程的研究鲜见报道.

本文基于文献[10-11], 研究线性 Boussinesq 方程周期初边值问题解在大波数条件下的渐近行为. 首先研究色散关系为整数多项式和非整数多项式的一维线性 Boussinesq 方程的周期初边值问题; 然

后研究二维线性 Boussinesq 方程的周期初边值问题. 给出存在色散量子化现象的线性 Boussinesq 方程的色散关系形式, 并研究在不同情况下方程周期解在大波数条件下的渐近行为.

1 一维线性 Boussinesq 方程

考虑定义在区间 $[0, 2\pi]$ 的 Boussinesq 方程的周期初边值问题:

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} = 0, \\ u(0, x) = f(x), \\ u(t, 0) = u(t, 2\pi), u_x(t, 0) = u_x(t, 2\pi), \\ u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, 2\pi), u_{xxx}(t, 0) = u_{xxx}(t, 2\pi). \end{cases} \quad (1)$$

方程的色散关系为:

$$\omega(k) = \pm k^2. \quad (2)$$

将方程解展开成 Fourier 级数形式:

$$u(t, x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikx+i\omega t}. \quad (3)$$

取初值条件 $f(x)$ 为阶梯函数 $\sigma(x)$:

$$f(x) = \sigma(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \pi, \\ 1, & \pi < x < 2\pi. \end{cases}$$

将式(3)代入式(1), 求出色散关系式(2). 根据阶梯函数得到色散关系为 $\omega(k) = k^2$ 时方程周期解的 Fourier 级数为:

$$u(x, t) \sim \frac{1}{2} + \frac{i}{\pi} \sum_k \frac{e^{-ik^2 t + ikx}}{k}, \quad (4)$$

收稿日期: 2021-10-14.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journal.lg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(12111530003); 宁波市自然科学基金(2018A610197).

第一作者: 张苗苗(1995-), 女, 甘肃天水人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 可积系统. E-mail: 3294140387@qq.com

*通信作者: 李茂华(1973-), 男, 浙江宁波人, 副教授, 主要研究方向: 可积系统. E-mail: limaozhua@nbu.edu.cn

式中: k 为奇数.

采用 Matlab 软件画出 Fourier 级数(式(4))实部和虚部的前 1000 项和(图 1 和图 2). 从图 1 和图 2 可以看到, 在有理时刻(π 的有理数倍数), 方程解为分段常数函数; 在无理时刻(π 的无理数倍数), 方程解出现分形化现象, 表明色散关系为 $\omega(k) = k^2$ 时, 方程周期解具有色散量子化现象. 相似地, 色散关系为 $\omega(k) = -k^2$ 时, 方程周期解同样具有色散量子化现象.

进一步研究色散关系为:

$$\omega(k) = \pm \sqrt{\frac{1}{4}k^4 + k^2} \quad (5)$$

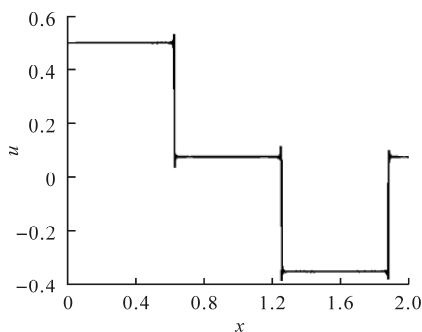
的 Boussinesq 方程的周期初边值问题.

考虑定义在区间 $[0, 2\pi]$ 的 Boussinesq 方程的周期初边值问题:

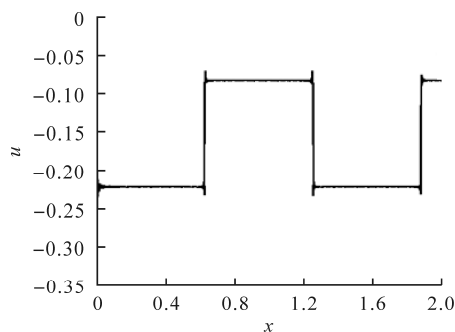
$$\begin{cases} u_{tt} + \frac{1}{4}u_{xxxx} = u_{xx}, \\ u(0, x) = f(x), \\ u(t, 0) = u(t, 2\pi), u_x(t, 0) = u_x(t, 2\pi), \\ u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, 2\pi), u_{xxx}(t, 0) = u_{xxx}(t, 2\pi). \end{cases} \quad (6)$$

方程的色散关系为式(5).

将式(3)代入式(6), 得到方程:

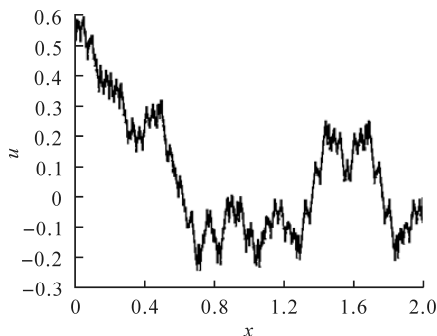


(a) 实部

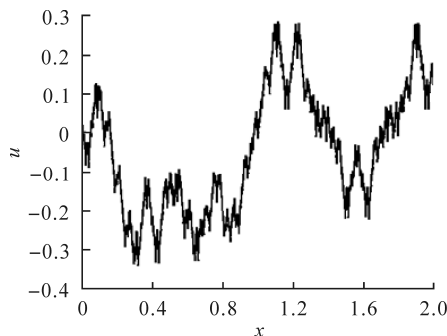


(b) 虚部

图 1 $t = 0.1\pi$



(a) 实部



(b) 虚部

图 2 $t = 0.1$

$$-\omega^2 + \frac{1}{4}k^4 = -k^2,$$

求出色散关系式(5).

假设初值条件为阶梯函数 $\sigma(x)$, 根据阶梯函数得到色散关系为:

$$\omega(k) = \sqrt{\frac{1}{4}k^4 + k^2} \quad (7)$$

时, 方程周期解的 Fourier 级数为:

$$u(x, t) \sim \frac{1}{2} + \frac{i}{\pi} \sum_k \frac{e^{i\sqrt{(1/4)k^4 + k^2}t + ikx}}{k}, \quad (8)$$

式中: k 为奇数.

色散关系为:

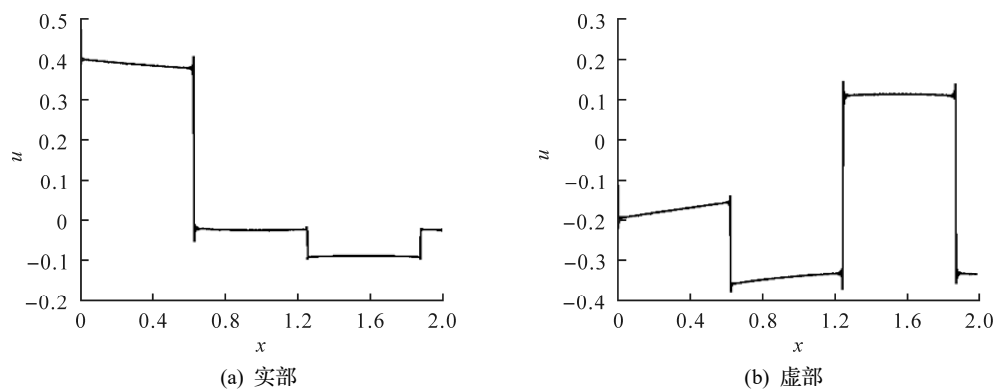
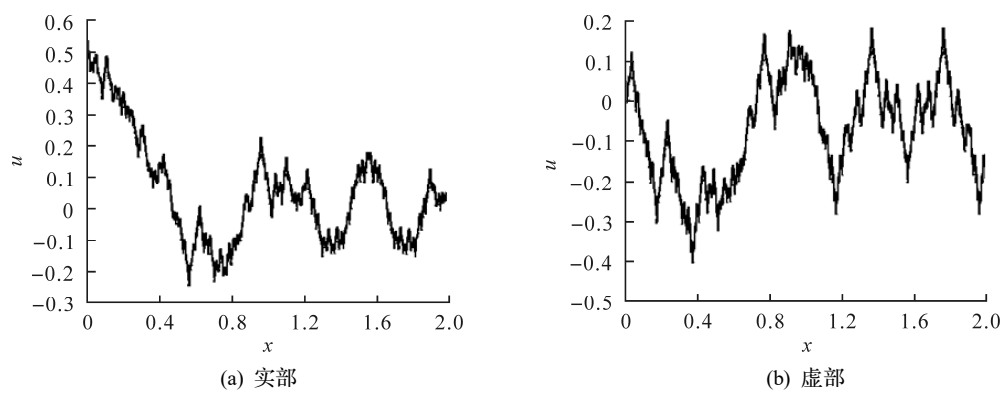
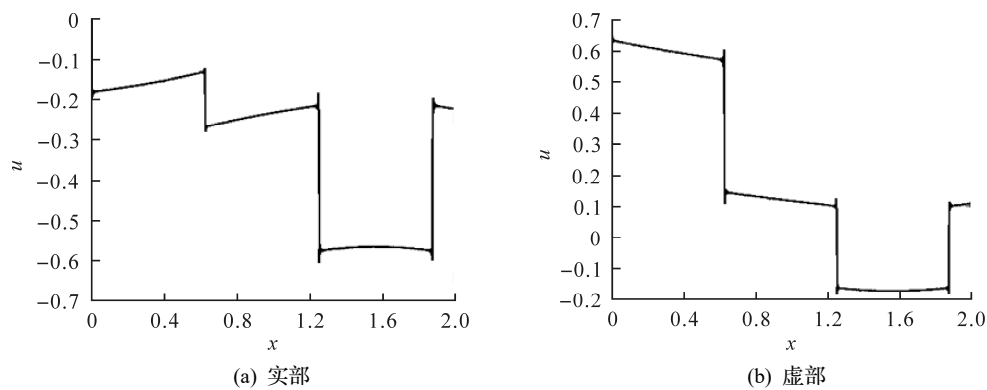
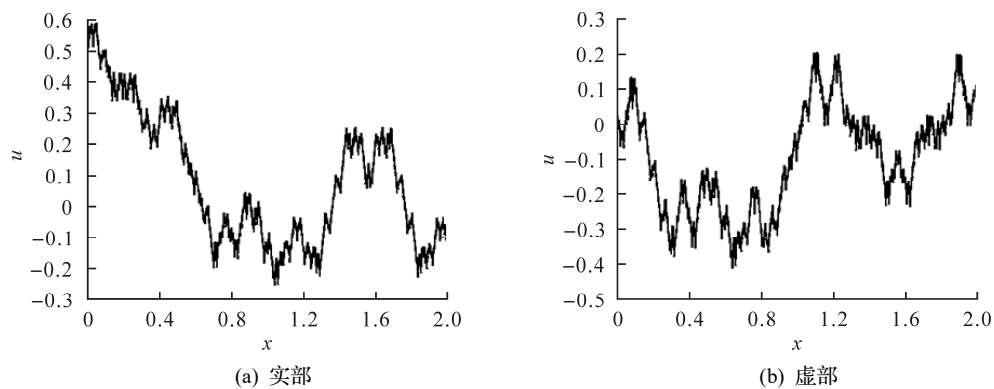
$$\omega(k) = -\sqrt{\frac{1}{4}k^4 + k^2} \quad (9)$$

时, 方程周期解的 Fourier 级数为:

$$u(x, t) \sim \frac{1}{2} + \frac{i}{\pi} \sum_k \frac{e^{-i\sqrt{(1/4)k^4 + k^2}t + ikx}}{k}, \quad (10)$$

式中: k 为奇数.

用 Matlab 软件画出色散关系为式(5)时方程解 Fourier 级数的实部和虚部前 1000 项和. 图 3 和图 4 是色散关系为式(7)时的结果; 图 5 和图 6 是色散关

图3 $t = 0.1\pi$ 图4 $t = 0.1$ 图5 $t = 0.2\pi$ 图6 $t = 0.2$

系为式(9)时的结果. 数值结果表明: 在有理时刻方程解近似于分段常数函数; 在无理时刻呈现分形化现象.

由于

$$\sqrt{\frac{1}{4}k^4 + k^2} \sim \frac{1}{2}k^2, k \rightarrow \infty,$$

从而在大波数条件下, 色散关系为式(5)方程解可以近似于色散关系为式(2)的方程解. 表明一维线性 Boussinesq 方程的周期解在大波数条件下的渐近行为由色散关系的渐近行为所控制. 这个结论可以推广至二维线性色散方程的周期初边值问题.

2 二维线性 Boussinesq 方程

定义在平面矩形区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi\}$ 的二维线性 Boussinesq 方程的周期初边值问题为:

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} + u_{yyyy} = 0, \\ u(0, x, y) = f(x, y), \\ u(t, 0, y) = u(t, 2\pi, y), \\ u_x(t, 0, y) = u_x(t, 2\pi, y), \\ u_{xx}(t, 0, y) = u_{xx}(t, 2\pi, y), \\ u_{xxx}(t, 0, y) = u_{xxx}(t, 2\pi, y), \\ u(t, x, 0) = u(t, x, 2\pi), \\ u_y(t, x, 0) = u_y(t, x, 2\pi), \\ u_{yy}(t, x, 0) = u_{yy}(t, x, 2\pi), \\ u_{yyy}(t, x, 0) = u_{yyy}(t, x, 2\pi). \end{cases} \quad (11)$$

方程的色散关系为:

$$\omega(k_1, k_2) = \pm \sqrt{k_1^4 + k_2^4}. \quad (12)$$

因为

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(k_1^2 + k_2^2) \leq \sqrt{k_1^4 + k_2^4} \leq k_1^2 + k_2^2,$$

所以当 $k_1, k_2 \rightarrow \infty$ 时, 色散关系 $\sqrt{k_1^4 + k_2^4}$ 由 $k_1^2 + k_2^2$ 所控制.

将方程解展开成二维 Fourier 级数形式:

$$u(t, x, y) \sim \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} e^{ik_1x + ik_2y + i\omega t}. \quad (13)$$

将式(13)代入式(11)中, 得到方程:

$$-\omega^2 + k_1^4 + k_2^4 = 0. \quad (14)$$

取初值条件为二维阶梯函数 $\sigma(x, y)$:

$$f(x, y) = \sigma(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in \tilde{D}, \\ 1, & (x, y) \notin \tilde{D}, \end{cases}$$

式中: $\tilde{D} = (0 < x < \pi, 0 < y < \pi)$.

阶梯函数 $\sigma(x, y)$ 的 Fourier 系数为:

$$b_{k_1, k_2}(0) = \begin{cases} \frac{1}{\pi^2 k_1 k_2}, & k_1, k_2, \text{奇数}, \\ \frac{3}{4}, & k_1 = k_2 = 0, \\ 0, & k_1 \text{ or } k_2 \neq 0, \text{偶数}, \\ -\frac{i}{2\pi k_1}, & k_1 \text{ 奇数}, k_2 = 0, \\ -\frac{i}{2\pi k_2}, & k_2 \text{ 奇数}, k_1 = 0. \end{cases}$$

求解式(14), 得到色散关系式(12). 根据阶梯函数得到色散关系为:

$$\omega(k_1, k_2) = \sqrt{k_1^4 + k_2^4} \quad (15)$$

时, 方程解的 Fourier 级数为:

$$u(t, x, y) \sim \frac{3}{4} - \frac{i}{2\pi} \sum_{k_1} \frac{e^{ik_1^2 t + ik_1 x}}{k_1} - \frac{i}{2\pi} \sum_{k_2} \frac{e^{ik_2^2 t + ik_2 y}}{k_2} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k_1} \sum_{k_2} \frac{e^{i\sqrt{k_1^4 + k_2^4} t + i(k_1 x + k_2 y)}}{k_1 k_2},$$

式中: k_1 和 k_2 为奇数.

色散关系为:

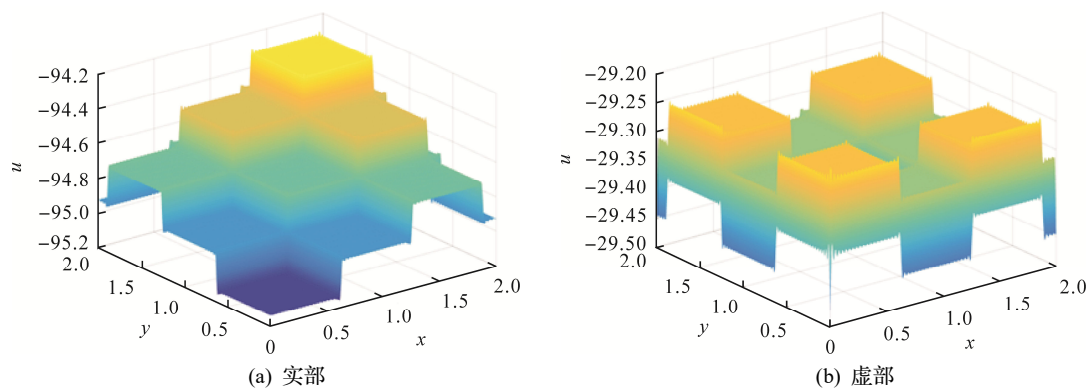
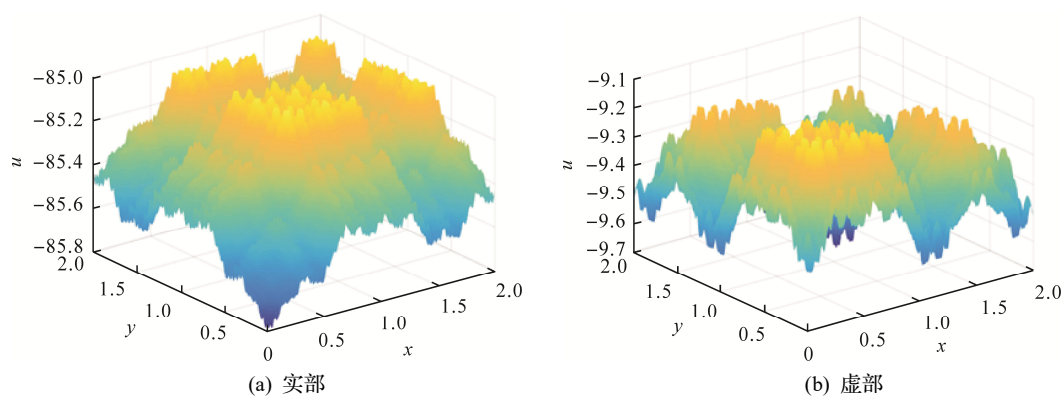
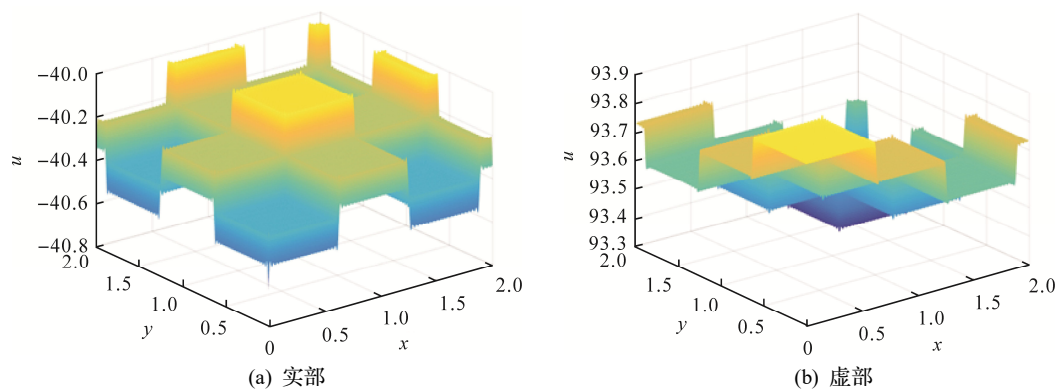
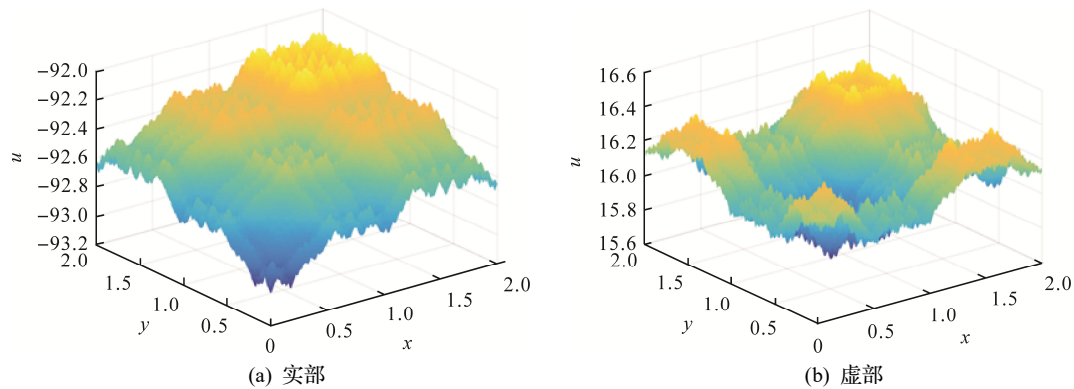
$$\omega(k_1, k_2) = -\sqrt{k_1^4 + k_2^4} \quad (16)$$

时, 方程解的 Fourier 级数为:

$$u(t, x, y) \sim \frac{3}{4} - \frac{i}{2\pi} \sum_{k_1} \frac{e^{-ik_1^2 t + ik_1 x}}{k_1} - \frac{i}{2\pi} \sum_{k_2} \frac{e^{-ik_2^2 t + ik_2 y}}{k_2} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k_1} \sum_{k_2} \frac{e^{-i\sqrt{k_1^4 + k_2^4} t + i(k_1 x + k_2 y)}}{k_1 k_2},$$

式中: k_1 和 k_2 为奇数.

用 Matlab 软件画出色散关系为式(14)的方程周期解 Fourier 级数的实部和虚部前 100×100 项和. 图 7 和图 8 为色散关系为式(15)时的结果; 图 9 和图 10 为色散关系为式(16)时的结果. 数值结果表明: 在有理时刻方程解为分片常数形式; 在无理时刻方程解呈现分形化现象. 说明色散关系为式(12)的二维线性 Boussinesq 方程存在色散量子化现象.

图7 $t = 0.1\pi$ 图8 $t = 0.1$ 图9 $t = 0.2\pi$ 图10 $t = 0.2$

进一步研究可以知道, 定义在平面矩形区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi\}$ 的二维线性色散方程为:

$$u_{tt} = L[u]. \quad (17)$$

如果式(18)的色散关系为整数多项式, 则方程的周期初边值问题存在色散量子化现象.

以下研究定义在平面矩形区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi\}$ 的二维线性 Boussinesq 方程的周期初边值问题:

$$\begin{cases} u_{tt} + \frac{1}{4}u_{xxxx} + \frac{1}{4}u_{yyyy} = u_{xx} + u_{yy}, \\ u(0, x, y) = f(x, y), \\ u(t, 0, y) = u(t, 2\pi, y), \\ u_x(t, 0, y) = u_x(t, 2\pi, y), \\ u_{xx}(t, 0, y) = u_{xx}(t, 2\pi, y), \\ u_{xxx}(t, 0, y) = u_{xxx}(t, 2\pi, y), \\ u(t, x, 0) = u(t, x, 2\pi), \\ u_y(t, x, 0) = u_y(t, x, 2\pi), \\ u_{yy}(t, x, 0) = u_{yy}(t, x, 2\pi), \\ u_{yyy}(t, x, 0) = u_{yyy}(t, x, 2\pi). \end{cases} \quad (18)$$

方程的色散关系为:

$$\omega(k_1, k_2) = \pm \sqrt{\frac{1}{4}k_1^4 + k_1^2 + \frac{1}{4}k_2^4 + k_2^2}. \quad (19)$$

将式(13)代入式(18)中, 得到方程:

$$-\omega^2 + \frac{1}{4}k_1^4 + \frac{1}{4}k_2^4 = -k_1^2 - k_2^2,$$

求出色散关系式(19).

同样, 假设方程的初值条件为二维阶梯函数 $\sigma(x, y)$, 根据阶梯函数得到色散关系为:

$$\omega(k_1, k_2) = \sqrt{\frac{1}{4}k_1^4 + k_1^2 + \frac{1}{4}k_2^4 + k_2^2} \quad (20)$$

时, 方程解的 Fourier 级数为:

$$\begin{aligned} u(t, x, y) \sim & \frac{3}{4} - \frac{i}{2\pi} \sum_{k_1} e^{i\sqrt{\frac{1}{4}k_1^4 + k_1^2}t + ik_1x} / k_1 - \\ & \frac{i}{2\pi} \sum_{k_2} e^{i\sqrt{\frac{1}{4}k_2^4 + k_2^2}t + ik_2y} / k_2 + \frac{1}{\pi^2} \cdot \\ & \sum_{k_1} \sum_{k_2} e^{i\sqrt{\frac{1}{4}k_1^4 + k_1^2 + \frac{1}{4}k_2^4 + k_2^2}t + i(k_1x + k_2y)} / (k_1k_2), \end{aligned}$$

式中: k_1 和 k_2 为奇数.

色散关系为:

$$\omega(k_1, k_2) = -\sqrt{\frac{1}{4}k_1^4 + k_1^2 + \frac{1}{4}k_2^4 + k_2^2} \quad (21)$$

时, 方程解的 Fourier 级数为:

$$\begin{aligned} u(t, x, y) \sim & \frac{3}{4} - \frac{i}{2\pi} \sum_{k_1} e^{-i\sqrt{\frac{1}{4}k_1^4 + k_1^2}t + ik_1x} / k_1 - \\ & \frac{i}{2\pi} \sum_{k_2} e^{-i\sqrt{\frac{1}{4}k_2^4 + k_2^2}t + ik_2y} / k_2 + \frac{1}{\pi^2} \cdot \\ & \sum_{k_1} \sum_{k_2} e^{-i\sqrt{\frac{1}{4}k_1^4 + k_1^2 + \frac{1}{4}k_2^4 + k_2^2}t + i(k_1x + k_2y)} / (k_1k_2), \end{aligned}$$

式中: k_1 和 k_2 为奇数.

用 Matlab 软件画出色散关系为式(19)的方程周期解 Fourier 级数实部和虚部的前 100×100 项和. 图 11 和图 12 是当色散关系为式(20)时的数值结果; 图 13 和图 14 是当色散关系为式(21)时的数值结果. 数值结果表明: 方程解在有理时刻近似为分片段常数函数; 在无理时刻呈现分形化现象. 这与一维的情况相同.

类似地, 因为

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{4}k_1^4 + k_1^2 + \frac{1}{4}k_2^4 + k_2^2} & \leq \\ \sqrt{\frac{1}{4}k_1^4 + k_1^2} + \sqrt{\frac{1}{4}k_2^4 + k_2^2}, \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{1}{2}k_1^2 + \frac{1}{2}k_2^2) & \leq \sqrt{\frac{1}{4}k_1^4 + \frac{1}{4}k_2^4} \leq \\ \sqrt{\frac{1}{4}k_1^4 + k_1^2 + \frac{1}{4}k_2^4 + k_2^2}, \end{aligned}$$

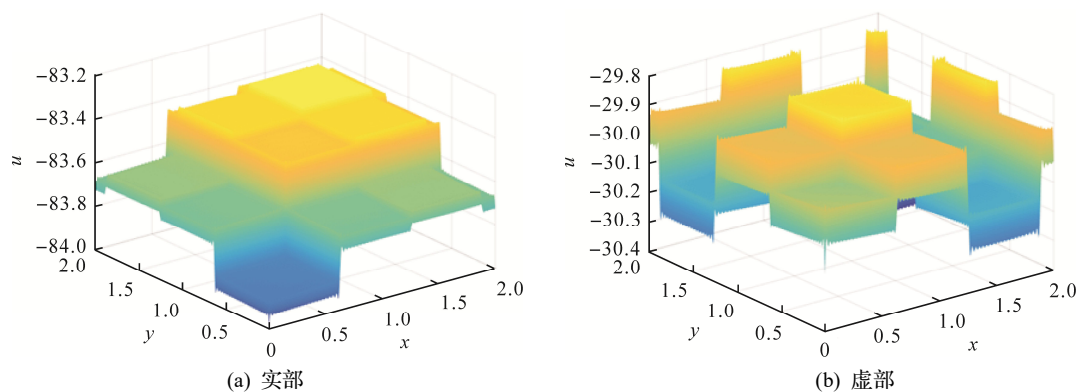
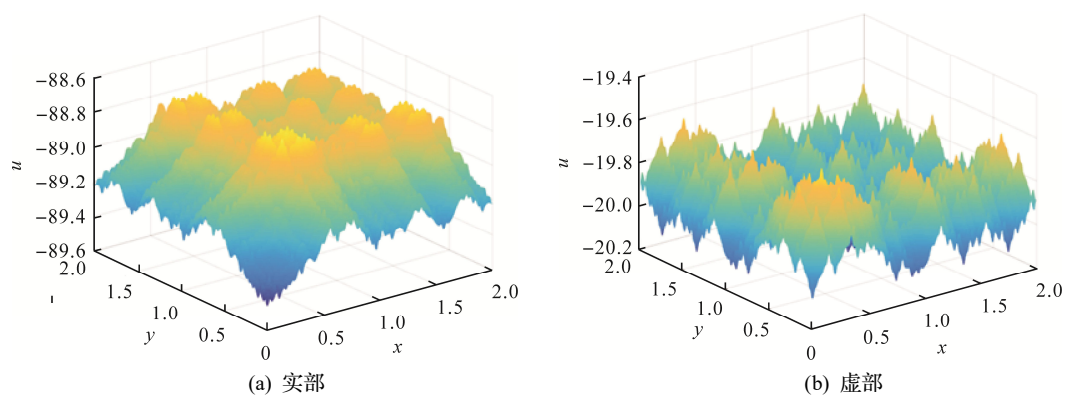
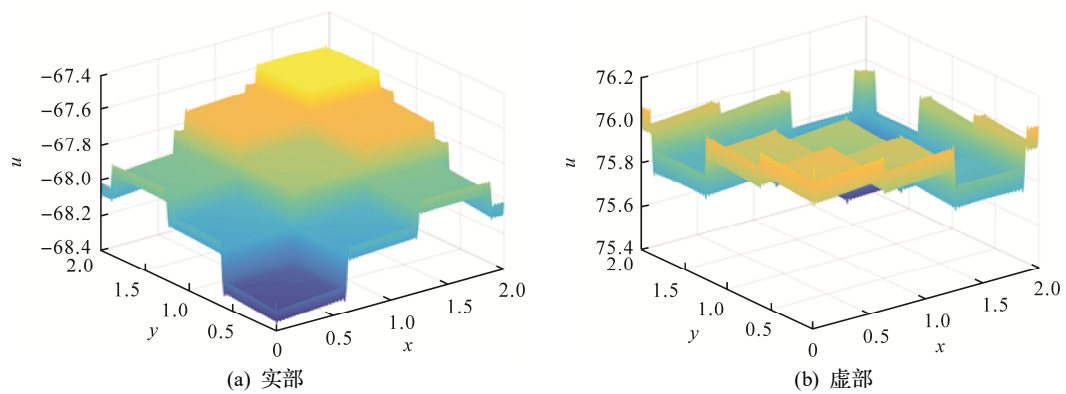
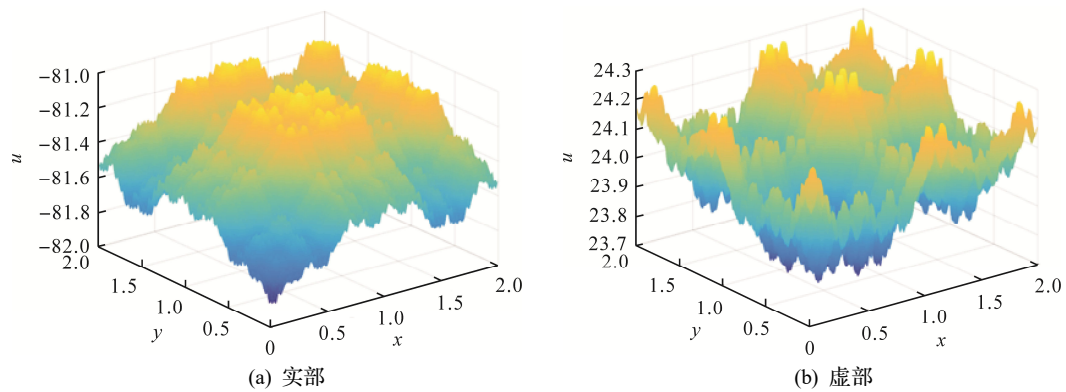
所以

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{4}k_1^4 + k_1^2 + \frac{1}{4}k_2^4 + k_2^2} & \sim (\frac{1}{2}k_1^2 + \frac{1}{2}k_2^2), \\ k_1, k_2 & \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

从而在大波数条件下, 色散关系为式(19)的方程解可以近似于色散关系为:

$$\omega(k_1, k_2) = \pm(\frac{1}{2}k_1^2 + \frac{1}{2}k_2^2)$$

的方程解. 得到二维线性 Boussinesq 方程的周期解在大波数条件下的渐近行为由色散关系的渐近行为所控制. 这一结论可以推广至二维线性色散方程的周期初边值问题.

图 11 $t = 0.1\pi$ 图 12 $t = 0.1$ 图 13 $t = 0.2\pi$ 图 14 $t = 0.2$

3 结语

本文研究了线性 Boussinesq 方程的周期初边值问题解在大波数条件下的渐近行为, 首先计算出初值条件为阶梯函数的线性 Boussinesq 方程解的 Fourier 级数; 然后用 Matlab 软件对不同色散关系的线性 Boussinesq 方程进行数值模拟. 当色散关系满足整数多项式时, 方程周期解存在色散量子化现象; 当色散关系不满足整数多项式时, 方程周期解在大波数条件下的渐近行为存在色散量子化现象. 从而可知: 线性 Boussinesq 方程在大波数条件下的渐近行为受色散关系在大波数条件下的渐近行为控制.

参考文献:

- [1] Berry M V. Quantum fractals in boxes[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1996, 29(20): 6617-6629.
- [2] Talbot H F. Facts relating to optical science. No. IV[J]. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1836, 9(56):401-407.
- [3] Berry M V, Marzoli I, Schleich W. Quantum carpets, carpets of light[J]. Physics World, 2001, 14(6):39-46.
- [4] Berry M V, Klein S. Integer, fractional and fractal Talbot effects[J]. Journal of Modern Optics, 1996, 43(10):2139-2164.
- [5] Kapitanski L, Rodnianski I. Does a quantum particle know the time?[M]//Emerging Applications of Number Theory. New York: Springer, 1999:355-371.
- [6] Oskolkov K. Schrödinger equation and oscillatory Hilbert transforms of second degree[J]. The Journal of Fourier Analysis and Applications, 1998, 4(3):341-356.
- [7] Oskolkov K. A class of I. M. Vinogradov's series and its applications in harmonic analysis[M]//Progress in Approximation Theory. New York: Springer, 1992:353-402.
- [8] Taylor M. The Schrödinger equation on spheres[J]. Pacific Journal of Mathematics, 2003, 209(1):145-155.
- [9] Olver P J. Dispersive quantization[J]. The American Mathematical Monthly, 2010, 117(7):599-610.
- [10] Chen G, Olver P J. Dispersion of discontinuous periodic waves[J]. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2013, 469(2149):20120407.
- [11] 尹子涵, 康静. 二维线性色散方程的色散量子化现象[J]. 应用数学和力学, 2021, 42(7):741-750.

Dispersion quantization of linear Boussinesq equation

ZHANG Miaomiao, LI Maohua*

(School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: In this paper, we study the asymptotic behavior of solutions to periodic initial boundary value problem for linear Boussinesq equation with large wave numbers. By expressing the solution of the equation in Fourier series, Matlab is used for numerical simulation. The simulation results show that the asymptotic behavior of the dispersion relation plays a decisive role in the asymptotic behavior of the solution of the equation on the condition of large wave numbers, which indicates that the dispersion quantization phenomenon exists in the linear Boussinesq equation.

Key words: linear Boussinesq equation; periodic initial boundary value problem; dispersion relation; asymptotic behavior; quantization of dispersion

(责任编辑 史小丽)