

一种统一非饱和土水-力-气三相耦合本构理论模拟方法

杜建行¹, 桑琴扬¹, 熊勇林^{1,2*}

(1. 宁波大学 土木工程与地理环境学院, 浙江 宁波 315211;

2. 宁波大学 冲击与安全工程教育部重点实验室, 浙江 宁波 315211)

摘要: 非饱和土在不排水不排气条件下土体仍会发生变形, 因此非饱和土弹塑性本构理论模拟有必要考虑孔隙比的变化. 本文推导了不同排水排气条件下(不排水、排气, 不排水不排气, 排水排气)非饱和土弹塑性本构理论预测控制方程, 可用来预测非饱和土在不同排水排气条件下的力学特性行为. 通过与试验结果对比分析可知, 该方法能够较好地再现室内试验结果, 描述非饱和土在不同排水排气条件下的水-力-气耦合行为.

关键词: 非饱和土; 本构模型; 不排水不排气; 水-力-气耦合; 数值模拟

中图分类号: TU411.5

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2023) 02-0057-10

众所周知, 大部分的岩土工程问题都与非饱和土相关, 非饱和土在不同条件下的水力特性行为一直是岩土工程学者关注的重点问题. 近几十年来, 非饱和土弹塑性本构模型得到了快速发展. 本构模型根据采用的状态变量大致可分为以下几种: (1)以净应力和基质吸力为状态变量的本构模型^[1-2]; (2)以 Bishop 有效应力和基质吸力为状态变量的本构模型^[3-4]; (3)以 Bishop 有效应力和饱和度为状态变量的本构模型^[5]; (4)以多相孔隙介质理论为基础发展起来的本构模型^[6]. 这些本构模型在描述常吸力条件下的非饱和土力学特性上均得到了验证. 但是, 在某些特定工况下, 非饱和土可处于不排水不排气条件(如地震作用下). 针对这一问题, 已有学者进行了相关研究. Liu 等^[7]在完全不排水的条件下进行了非饱和土循环加载三轴试验, 探究了饱和度、相对密度、围压等对非饱和土水-力耦合特性的影响. Oka 等^[8]进行了不同基质吸力条件和净围压状态下的排水试验和不排水不排气三轴剪切试验, 探究了非饱和土在完全不排水条件下的水-力耦合特性. Unno 等^[9]在完全不排水不排气条件下进行了非饱和土三轴循环动力试验, 探究了循环加载作用下土中孔隙气压、孔隙水压、有

效应力和基质吸力的变化趋势. 以上试验结果都表明, 在完全封闭条件下, 土体在荷载作用下将会引起孔隙气压及水压增加, 造成非饱和土有效应力减小, 进而影响土体强度与变形特性. 因此, 研究非饱和土在不排水不排气条件下的力学特性及其行为进行模拟分析具有重要意义. 本文重点研究非饱和土的力学特性, 因为影响土体强度的关键因素为有效应力, 所以本构模型以饱和度和有效应力作为状态变量.

遗憾的是, 针对完全不排水不排气条件, 利用非饱和土弹塑性本构模型进行理论数值模拟的研究还相对较少, 主要原因之一是非饱和土在不排水条件下, 土体的体积应变并不为 0, 这给理论计算造成了一定困难. Uzuoka 等^[10]与刘文化等^[11]基于多相孔隙介质理论和局部平衡假设, 采用非饱和土水-力-力学耦合模型描述非饱和土的应力-应变特性, 分析预测了非饱和土不排水不排气三轴剪切试验, 取得了较为满意的结果, 但是该计算方法是在场方程的基础上进行推导的, 因而其计算过程较为复杂繁琐.

本文在汪俊敏等^[12]提出的非饱和土弹塑性本构模型的基础上, 分别推导了不同排水排气条件

收稿日期: 2022-10-13. 宁波大学学报(理工版)网址: <http://journal.nbu.edu.cn/>

基金项目: 宁波大学冲击与安全工程教育部重点实验室开放基金(CJ-20180110).

第一作者: 杜建行(1996-), 男, 山东德州人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 岩土数值计算. E-mail: 872404127@qq.com

*通信作者: 熊勇林(1989-), 男, 江西南昌人, 副教授, 主要研究方向: 岩土数值计算. E-mail: xiongyonglin@nbu.edu.cn

(不排水、排气, 不排水不排气, 排水排气)下非饱和土室内单元试验的理论预测控制方程. 通过与不同排水排气条件下的试验结果进行对比分析, 验证了所提方法的正确性.

1 不同排水条件下非饱和土弹塑性本构理论预测控制方程

1.1 非饱和土弹塑性本构模型

选用汪俊敏等^[12]提出的非饱和土弹塑性本构模型进行推导. 该模型不仅可以描述非饱和土静态力学特性行为, 也可描述动态力学特性行为. 该本构模型以饱和度和有效应力作为状态变量, 通过引入同一应力状态下非饱和土与饱和土的孔隙比差进行构建, 详细推导见参考文献[12]. 该模型的屈服函数为

$$f = \ln \frac{p}{p_0^*} + \ln \frac{M^2 - \zeta^2 + \eta^{*2}}{M^2 - \zeta^2} + \ln R^* - \ln R - \frac{\rho_s}{1 + e_0} \frac{1}{C_p} - \frac{\varepsilon_v^p}{C_p} = 0, \quad (1)$$

$$C_p = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0}, \quad (2)$$

式中: p 为平均有效应力; p_0^* 为平均有效应力初始值; M 为土体临界状态线的斜率; ζ 为应力诱导各向异性大小; η^* 为应力比; R^* 为结构性状态变量; R 为超固结状态变量; ε_v^p 为塑性体积应变; ρ_s 为非饱和状态变量, 表示非饱和土与饱和土的正常固结线的高度差值, 即由于土体的不饱和状态引起的孔隙比差^[5]; λ 为压缩指数; κ 为回弹指数; e_0 为初始孔隙比.

采用联合流动法则, 塑性应变增量可表示为

$$d\varepsilon_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (3)$$

式中: Λ 为塑性因子.

由协调方程可得

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \beta_{ij}} d\beta_{ij} + \frac{1}{R^*} dR^* - \frac{1}{R} dR - \frac{1}{C_p} \frac{d\rho_s}{1 + e_0} - \frac{1}{C_p} d\varepsilon_v^p = 0, \quad (4)$$

式中: β_{ij} 为应力诱导各向异性张量.

根据胡克定律, 土体应力增量与应变增量之间关系可表示为

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p) = D_{ijkl} d\varepsilon_{kl} - D_{ijkl} \Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}, \quad (5)$$

式中: D_{ijkl} 为 6×6 的弹性刚度矩阵.

将式(5)和各状态发展式代入式(4), 整理可得

$$\Lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl} d\varepsilon_{kl} + \frac{Q}{C_p} \frac{1}{1 + e_0} dS_r}{h_p}, \quad (6)$$

式中: h_p 为经过换算整理得到的分母; Q 为与饱和度相关的量, 具体求解及表达见文献[12].

将式(6)代入式(3), 可得

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} D_{mnkl} d\varepsilon_{kl} + \frac{Q}{C_p} \frac{1}{1 + e_0} dS_r}{h_p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (7)$$

将式(7)代入应力增量与应变增量式(5), 整理为

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl} d\varepsilon_{kl} - D_{ijqr} D_{nmkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{qr}} \frac{1}{h_p} - \frac{Q}{C_p} \frac{1}{1 + e_0} dS_r \frac{1}{h_p} D_{ijqr} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{qr}} = (D_{ijkl} - D_{ijkl}^p) d\varepsilon_{kl} - D_{ij}^{\text{ERS}} dS_r = D_{ijkl}^{\text{EP}} d\varepsilon_{kl} - D_{ij}^{\text{ERS}} dS_r, \quad (8)$$

式中: D_{ij}^{ERS} 为与水相关的刚度矩阵, 表示为

$$D_{ij}^{\text{ERS}} = \frac{Q}{C_p} \frac{1}{1 + e_0} \frac{1}{h_p} D_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}. \quad (9)$$

1.2 土水特征曲线

非饱和土土水特征曲线反映的是土体吸力与饱和度之间的关系, 它对非饱和土力学特性行为具有重要影响. 本文采用 Zhang 等^[5]提出的可描述土体水力滞回特性的土水特征曲线模型, 该模型主要干燥曲线表示为

$$S_r = S_r^s - \frac{2}{\pi} (S_r^s - S_r^r) \tan^{-1} \left((e^{c_1 s} - 1) e^{c_1 s_d} \right), \quad (10)$$

主要湿润曲线表示为

$$S_r = S_r^s - \frac{2}{\pi} (S_r^s - S_r^r) \tan^{-1} \left((e^{c_2 s} - 1) e^{c_2 s_w} \right), \quad (11)$$

式中: S_r^s 和 S_r^r 分别为最大饱和度和最小饱和度; c_1 和 c_2 是控制曲线形状的比例参数; s 为土体吸力; s_d 为干燥进气值参数; s_w 为湿润进气值参数.

该土水特征曲线模型中, 吸力增量和饱和度增量关系表示为

$$dS_r = k_{sp}^{-1} ds, \quad (12)$$

式中: S_r 为饱和度; k_{sp}^{-1} 为饱和度—吸力关系曲线的切线刚度。

1.3 不同排水排气条件下的非饱和土本构理论实现

根据 Bishop 有效应力原理可得

$$d\sigma_{ij} = d\sigma_{ij}^t - du_a \delta_{ij} + [dS_r(u_a - u_w) + S_r(du_a - du_w)]\delta_{ij} = d\sigma_{ij}^{\text{net}} + (dS_r s + S_r ds)\delta_{ij}, \quad (13)$$

式中: σ_{ij} 为 Bishop 有效应力张量; σ_{ij}^t 为总应力张量; σ_{ij}^{net} 为净应力张量; u_a 和 u_w 分别为孔隙气压和孔隙水压。为了简化说明, 本文以下所提到的应力若没有特别说明, 均指 Bishop 有效应力且表示为 σ_{ij} 。

根据相关联合流动法则式(4)和协调方程式(5)可得

$$\Lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{Q}{C_p} \frac{1}{1+e_0} dS_r}{h_p}. \quad (14)$$

根据弹塑性力学, 可将应变增量分为弹性应变增量与塑性应变增量, 表示为

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p. \quad (15)$$

应力增量由下式计算:

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl} d\varepsilon_{kl}^e. \quad (16)$$

整理式(14)~(16)得

$$d\varepsilon_{ij} = D_{ijkl}^{-1} d\sigma_{kl} + \Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (17)$$

将式(13)代入式(14), 可得

$$\Lambda = \frac{1}{h_p} \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}^{\text{net}} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} S_r \delta_{ij} ds + \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} s \delta_{ij} + \frac{1}{C_p} \frac{Q}{1+e_0} \right) dS_r \right] = \Lambda_\sigma + \Lambda_s + \Lambda_{S_r}, \quad (18)$$

其中,

$$\begin{aligned} \Lambda_\sigma &= \frac{1}{h_p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}^{\text{net}}, \\ \Lambda_s &= \frac{1}{h_p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} S_r \delta_{ij} ds, \\ \Lambda_{S_r} &= \frac{1}{h_p} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} s \delta_{ij} + \frac{1}{C_p} \frac{Q}{1+e_0} \right) dS_r. \end{aligned} \quad (19)$$

由式(13)、式(17)、式(18)可得土骨架的塑性应

变增量:

$$d\varepsilon_{ij}^* = D_{ijkl}^{-1} d\sigma_{ij}^{\text{net}} + \Lambda_\sigma \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (20)$$

将式(13)、式(19)代入式(20)整理为

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{ij}^* &= d\varepsilon_{ij} - D_{ijkl}^{-1} (dS_r s + S_r ds) \delta_{ij} - (\Lambda_s + \Lambda_{S_r}) \times \\ &\quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = d\varepsilon_{ij} - D_{ijkl}^{-1} (dS_r s + S_r ds) \delta_{ij} - \\ &\quad \left(\frac{1}{h_p} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} S_r \delta_{ij} \right) ds + \frac{1}{h_p} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} s \delta_{ij} + \frac{1}{C_p} \frac{Q}{1+e_0} \right) dS_r \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = d\varepsilon_{ij} - \left(D_{ijkl}^{-1} S_r \delta_{ij} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{h_p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kk}} S_r \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right) ds - \left(D_{ijkl}^{-1} s \delta_{ij} + \frac{1}{h_p} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kk}} s + \frac{1}{C_p} \frac{Q}{1+e_0} \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right) dS_r = \\ &\quad d\varepsilon_{ij} - M ds - N dS_r. \end{aligned} \quad (21)$$

根据式(17)~(20)可得

$$d\sigma_{ij}^{\text{net}} = \left(D_{ijkl} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl}}{h_p + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}} \right) d\varepsilon_{ij}^* = D_{ijkl}^{\text{ep}\sigma} d\varepsilon_{ij}^*. \quad (22)$$

将式(22)代入式(20)后整理可得

$$d\sigma_{ij}^{\text{net}} = \left(D_{ijkl} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl}}{h_p + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}} \right) d\varepsilon_{ij}^* = D_{ijkl}^{\text{ep}\sigma} d\varepsilon_{ij}^*, \quad (23)$$

式中: $D_{ijkl}^{\text{ep}\sigma}$ 为 6×6 的弹塑性刚度矩阵。

进一步将式(21)代入式(23)进行整理可得到如下结果:

$$\begin{cases} \text{当 } \Lambda > 0 \text{ 时, } d\varepsilon_{ij}^p \neq 0, \text{ 加载} \\ \quad d\sigma_{ij}^{\text{net}} + D_{ijkl}^{\text{ep}\sigma} M ds = D_{ijkl}^{\text{ep}\sigma} d\varepsilon_{kl} - D_{ijkl}^{\text{ep}\sigma} N dS_r, \\ \text{当 } \Lambda \leq 0 \text{ 时, } d\varepsilon_{ij}^p = 0, \text{ 卸载} \\ \quad d\sigma_{ij}^{\text{net}} + S_r ds \delta_{ij} = D_{ijkl} d\varepsilon_{kl} - s dS_r \delta_{ij}. \end{cases} \quad (24)$$

以下推导以加载条件进行分析, 卸载可按类似过程进行推导求得。

记

$$\mathbf{D}_{ijkl}^{\text{ep}\sigma} = \begin{bmatrix} D^{\text{ep}\sigma}[11] & D^{\text{ep}\sigma}[12] & D^{\text{ep}\sigma}[13] \\ D^{\text{ep}\sigma}[21] & D^{\text{ep}\sigma}[22] & D^{\text{ep}\sigma}[23] \\ D^{\text{ep}\sigma}[31] & D^{\text{ep}\sigma}[32] & D^{\text{ep}\sigma}[33] \\ D^{\text{ep}\sigma}[41] & D^{\text{ep}\sigma}[42] & D^{\text{ep}\sigma}[43] \\ D^{\text{ep}\sigma}[51] & D^{\text{ep}\sigma}[52] & D^{\text{ep}\sigma}[53] \\ D^{\text{ep}\sigma}[61] & D^{\text{ep}\sigma}[62] & D^{\text{ep}\sigma}[63] \\ D^{\text{ep}\sigma}[14] & D^{\text{ep}\sigma}[15] & D^{\text{ep}\sigma}[16] \\ D^{\text{ep}\sigma}[24] & D^{\text{ep}\sigma}[25] & D^{\text{ep}\sigma}[26] \\ D^{\text{ep}\sigma}[34] & D^{\text{ep}\sigma}[35] & D^{\text{ep}\sigma}[36] \\ D^{\text{ep}\sigma}[44] & D^{\text{ep}\sigma}[45] & D^{\text{ep}\sigma}[46] \\ D^{\text{ep}\sigma}[54] & D^{\text{ep}\sigma}[55] & D^{\text{ep}\sigma}[56] \\ D^{\text{ep}\sigma}[64] & D^{\text{ep}\sigma}[65] & D^{\text{ep}\sigma}[66] \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\text{Dep_suc} = \mathbf{D}_{ijkl}^{\text{ep}\sigma} \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \text{Dep_suc}[1] \\ \text{Dep_suc}[2] \\ \text{Dep_suc}[3] \\ \text{Dep_suc}[4] \\ \text{Dep_suc}[5] \\ \text{Dep_suc}[6] \end{bmatrix},$$

$$\text{Dep_S}_r = \mathbf{D}_{ijkl}^{\text{ep}\sigma} \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \text{Dep_S}_r[1] \\ \text{Dep_S}_r[2] \\ \text{Dep_S}_r[3] \\ \text{Dep_S}_r[4] \\ \text{Dep_S}_r[5] \\ \text{Dep_S}_r[6] \end{bmatrix}, \quad (25)$$

并令

$$\mathbf{M}_{ij} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\leftarrow \begin{bmatrix} \text{Dep_suc}[1] \\ \text{Dep_suc}[2] \\ \text{Dep_suc}[3] \\ \text{Dep_suc}[4] \\ \text{Dep_suc}[5] \\ \text{Dep_suc}[6] \\ \text{dS}_r / \text{ds} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

$$\mathbf{N}_{ij} = \begin{bmatrix} & & & & & & \text{Dep_S}_r[1] \\ & & & & & & \text{Dep_S}_r[2] \\ & & & & & & \text{Dep_S}_r[3] \\ & & & & & & \text{Dep_S}_r[4] \\ & & & & & & \text{Dep_S}_r[5] \\ & & & & & & \text{Dep_S}_r[6] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

将式(26)~(27)代入式(24)可得

$$\mathbf{M}_{ij} \begin{bmatrix} \text{d}\sigma_{11}^{\text{net}} \\ \text{d}\sigma_{22}^{\text{net}} \\ \text{d}\sigma_{33}^{\text{net}} \\ \text{d}\sigma_{12}^{\text{net}} \\ \text{d}\sigma_{23}^{\text{net}} \\ \text{d}\sigma_{31}^{\text{net}} \\ \text{ds} \end{bmatrix} = \mathbf{N}_{ij} \begin{bmatrix} \text{d}\varepsilon_{11} \\ \text{d}\varepsilon_{22} \\ \text{d}\varepsilon_{33} \\ \text{d}\varepsilon_{12} \\ \text{d}\varepsilon_{23} \\ \text{d}\varepsilon_{31} \\ \text{dS}_r \end{bmatrix}. \quad (28)$$

进一步整理式(28)可得

$$\begin{bmatrix} \text{d}\sigma_{11}^{\text{net}} \\ \text{d}\sigma_{22}^{\text{net}} \\ \text{d}\sigma_{33}^{\text{net}} \\ \text{d}\sigma_{12}^{\text{net}} \\ \text{d}\sigma_{23}^{\text{net}} \\ \text{d}\sigma_{31}^{\text{net}} \\ \text{ds} \end{bmatrix} = [\mathbf{M}_{ij}]^{-1} [\mathbf{N}_{ij}] \begin{bmatrix} \text{d}\varepsilon_{11} \\ \text{d}\varepsilon_{22} \\ \text{d}\varepsilon_{33} \\ \text{d}\varepsilon_{12} \\ \text{d}\varepsilon_{23} \\ \text{d}\varepsilon_{31} \\ \text{dS}_r \end{bmatrix}. \quad (29)$$

记 $\mathbf{D}_{ijkl}^{\text{ep}} = [\mathbf{M}_{ij}]^{-1} [\mathbf{N}_{ij}]$, 为 7×7 矩阵.

$$\begin{bmatrix} \text{d}\sigma_{11}^{\text{net}} \\ \text{d}\sigma_{22}^{\text{net}} \\ \text{d}\sigma_{33}^{\text{net}} \\ \text{d}\sigma_{12}^{\text{net}} \\ \text{d}\sigma_{23}^{\text{net}} \\ \text{d}\sigma_{31}^{\text{net}} \\ \text{ds} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{ijkl}^{\text{ep}}[11] & D_{ijkl}^{\text{ep}}[12] & D_{ijkl}^{\text{ep}}[13] \\ D_{ijkl}^{\text{ep}}[21] & D_{ijkl}^{\text{ep}}[22] & D_{ijkl}^{\text{ep}}[23] \\ D_{ijkl}^{\text{ep}}[31] & D_{ijkl}^{\text{ep}}[32] & D_{ijkl}^{\text{ep}}[33] \\ D_{ijkl}^{\text{ep}}[41] & D_{ijkl}^{\text{ep}}[42] & D_{ijkl}^{\text{ep}}[43] \\ D_{ijkl}^{\text{ep}}[51] & D_{ijkl}^{\text{ep}}[52] & D_{ijkl}^{\text{ep}}[53] \\ D_{ijkl}^{\text{ep}}[61] & D_{ijkl}^{\text{ep}}[62] & D_{ijkl}^{\text{ep}}[63] \\ D_{ijkl}^{\text{ep}}[71] & D_{ijkl}^{\text{ep}}[72] & D_{ijkl}^{\text{ep}}[73] \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\leftarrow \begin{bmatrix} D_{ijkl}^{\text{ep}}[14] & D_{ijkl}^{\text{ep}}[15] & D_{ijkl}^{\text{ep}}[16] \\ D_{ijkl}^{\text{ep}}[24] & D_{ijkl}^{\text{ep}}[25] & D_{ijkl}^{\text{ep}}[26] \\ D_{ijkl}^{\text{ep}}[34] & D_{ijkl}^{\text{ep}}[35] & D_{ijkl}^{\text{ep}}[36] \\ D_{ijkl}^{\text{ep}}[44] & D_{ijkl}^{\text{ep}}[45] & D_{ijkl}^{\text{ep}}[46] \\ D_{ijkl}^{\text{ep}}[54] & D_{ijkl}^{\text{ep}}[55] & D_{ijkl}^{\text{ep}}[56] \\ D_{ijkl}^{\text{ep}}[64] & D_{ijkl}^{\text{ep}}[65] & D_{ijkl}^{\text{ep}}[66] \\ D_{ijkl}^{\text{ep}}[74] & D_{ijkl}^{\text{ep}}[75] & D_{ijkl}^{\text{ep}}[76] \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \begin{aligned} & D_{ijkl}^{ep}[17] \\ & D_{ijkl}^{ep}[27] \\ & D_{ijkl}^{ep}[37] \\ \leftarrow & D_{ijkl}^{ep}[47] \\ & D_{ijkl}^{ep}[57] \\ & D_{ijkl}^{ep}[67] \\ & D_{ijkl}^{ep}[77] \end{aligned} \begin{bmatrix} d\varepsilon_{11} \\ d\varepsilon_{22} \\ d\varepsilon_{33} \\ d\varepsilon_{12} \\ d\varepsilon_{23} \\ d\varepsilon_{31} \\ dS_r \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (30)$$

用总应力可以将上式转化为

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} d\sigma_{11}^t \\ d\sigma_{22}^t \\ d\sigma_{33}^t \\ d\sigma_{12}^t \\ d\sigma_{23}^t \\ d\sigma_{31}^t \\ du_w \\ du_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{ijkl}^{ep}[11] & D_{ijkl}^{ep}[12] & D_{ijkl}^{ep}[13] \\ D_{ijkl}^{ep}[21] & D_{ijkl}^{ep}[22] & D_{ijkl}^{ep}[23] \\ D_{ijkl}^{ep}[31] & D_{ijkl}^{ep}[32] & D_{ijkl}^{ep}[33] \\ D_{ijkl}^{ep}[41] & D_{ijkl}^{ep}[42] & D_{ijkl}^{ep}[43] \\ D_{ijkl}^{ep}[51] & D_{ijkl}^{ep}[52] & D_{ijkl}^{ep}[53] \\ D_{ijkl}^{ep}[61] & D_{ijkl}^{ep}[62] & D_{ijkl}^{ep}[63] \\ -D_{ijkl}^{ep}[71] & -D_{ijkl}^{ep}[72] & -D_{ijkl}^{ep}[73] \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \\ & \begin{aligned} & D_{ijkl}^{ep}[14] & D_{ijkl}^{ep}[15] & D_{ijkl}^{ep}[16] \\ & D_{ijkl}^{ep}[24] & D_{ijkl}^{ep}[25] & D_{ijkl}^{ep}[26] \\ & D_{ijkl}^{ep}[34] & D_{ijkl}^{ep}[35] & D_{ijkl}^{ep}[36] \\ \leftarrow & D_{ijkl}^{ep}[44] & D_{ijkl}^{ep}[45] & D_{ijkl}^{ep}[46] \\ & D_{ijkl}^{ep}[54] & D_{ijkl}^{ep}[55] & D_{ijkl}^{ep}[56] \\ & D_{ijkl}^{ep}[64] & D_{ijkl}^{ep}[65] & D_{ijkl}^{ep}[66] \\ & -D_{ijkl}^{ep}[74] & -D_{ijkl}^{ep}[75] & -D_{ijkl}^{ep}[76] \\ & 0 & 0 & 0 \end{aligned} \rightarrow \\ & \begin{aligned} & D_{ijkl}^{ep}[17] & 1 \\ & D_{ijkl}^{ep}[27] & 1 \\ & D_{ijkl}^{ep}[37] & 1 \\ \leftarrow & D_{ijkl}^{ep}[47] & 1 \\ & D_{ijkl}^{ep}[57] & 1 \\ & D_{ijkl}^{ep}[67] & 1 \\ & -D_{ijkl}^{ep}[77] & 1 \\ & 0 & 1 \end{aligned} \begin{bmatrix} d\varepsilon_{11} \\ d\varepsilon_{22} \\ d\varepsilon_{33} \\ d\varepsilon_{12} \\ d\varepsilon_{23} \\ d\varepsilon_{31} \\ dS_r \\ du_a \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (31)$$

上式即为非饱和土理论模拟的总控制方程, 式(31)右端刚度矩阵可通过本构关系弹塑性刚度矩阵确定. 针对非饱和土固结或湿化试验, 只需将式(31)左端的值根据试验直接给出, 即可求得相应的右端应变的值. 针对三轴剪切试验, 需要确定式(31)右端应变的值才可以求解得出相应应力、孔隙水压、孔隙气压的增量值. 下文将分别针对不同排水排气及总围压不变的条件, 给出相应值的求解

方法.

(1)不排水、排气条件

在不排水、排气条件下, 以下条件已知: 轴向应变增量 $d\varepsilon_{11}$, 横向应变增量相同, 即 $d\varepsilon_{22} = d\varepsilon_{33}$, 总围压增量 $d\sigma_{22}^t$ 、 $d\sigma_{33}^t$ 为 0, 气压增量 du_a 为 0, 土体含水量增量为 0.

由于在不排水条件下, 土体中含水量 w 保持一定, 则根据土体含水量与饱和度及孔隙比关系可得

$$dw = d\left(\frac{eS_r}{G_s}\right) = 0 \Rightarrow dS_r = \frac{-deS_r}{e}, \quad (32)$$

式中: G_s 为土体比重.

根据式(31)和总围压增量为 0 可得

$$d\sigma_{22}^t = D_{ijkl}^{ep}[21]d\varepsilon_{11} + (D_{ijkl}^{ep}[22] + D_{ijkl}^{ep}[23])d\varepsilon_{22} + D_{ijkl}^{ep}[27]dS_r = 0. \quad (33)$$

由体积应变定义可知

$$\begin{aligned} d\varepsilon_v &= \frac{-\Delta e}{1+e_0} \Rightarrow d\varepsilon_{11} + d\varepsilon_{22} + d\varepsilon_{33} = \\ d\varepsilon_{11} + 2d\varepsilon_{22} &= \frac{-de}{1+e_0}, \end{aligned} \quad (34)$$

式中: $d\varepsilon_v$ 为体积应变增量; Δe 为孔隙比变化量.

联立式(32)~(34)可得

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{22} &= \frac{-D_{ijkl}^{ep}[21] - D_{ijkl}^{ep}[27]\frac{1+e_0}{e}S_r}{D_{ijkl}^{ep}[22] + D_{ijkl}^{ep}[23] + D_{ijkl}^{ep}[27]\frac{1+e_0}{e}2S_r} \times \\ d\varepsilon_{11} &= Cd\varepsilon_{11}, \end{aligned} \quad (35)$$

$$dS_r = \frac{1+e_0}{e}S_r(1+2C)d\varepsilon_{11}. \quad (36)$$

最终在不排水、排气条件下, 式(31)右端应变值可表示为

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_{11} \\ d\varepsilon_{22} \\ d\varepsilon_{33} \\ d\varepsilon_{12} \\ d\varepsilon_{23} \\ d\varepsilon_{31} \\ dS_r \\ du_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\varepsilon_{11} \\ Cd\varepsilon_{11} \\ Cd\varepsilon_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1+e_0}{e}S_r(1+2C)d\varepsilon_{11} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (37)$$

(2)不排水不排气条件

在完全不排气试验中,假设气体为理想气体,满足玻意耳定律

$$\begin{aligned} u_a V_a &= u_a e(1 - S_r) = \text{constant} \Rightarrow \\ du_a &= \frac{u_a e dS_r - u_a de(1 - S_r)}{e(1 - S_r)} = \\ &= \frac{u_a}{1 - S_r} dS_r - \frac{u_a}{e} de. \end{aligned} \quad (38)$$

将式(34)和(36)代入式(38)可得

$$du_a = \frac{u_a(1 + e_0)}{(1 - S_r)e} (d\varepsilon_{11} + 2d\varepsilon_{22}). \quad (39)$$

由总围压不变条件,根据式(31)和已知条件可知

$$\begin{aligned} d\sigma_{22}^t &= D_{ijkl}^{\text{ep}}[21]d\varepsilon_{11} + (D_{ijkl}^{\text{ep}}[22] + D_{ijkl}^{\text{ep}}[23])d\varepsilon_{22} + \\ &+ D_{ijkl}^{\text{ep}}[27]dS_r + du_a = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

将式(34)及式(39)代入式(40),可得

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{22} &= \left[-D_{ijkl}^{\text{ep}}[21] - D_{ijkl}^{\text{ep}}[27] \left(\frac{1 + e_0}{e} \right) S_r - \right. \\ &\quad \left. \frac{u_a(1 + e_0)}{(1 - S_r)e} \right] d\varepsilon_{11} / \left[D_{ijkl}^{\text{ep}}[22] + D_{ijkl}^{\text{ep}}[23] + \right. \\ &\quad \left. 2D_{ijkl}^{\text{ep}}[27] \left(\frac{1 + e_0}{e} \right) S_r + 2 \frac{u_a(1 + e_0)}{(1 - S_r)e} \right] = \\ &= Dd\varepsilon_{11}. \end{aligned} \quad (41)$$

则在不排水不排气条件下,式(31)右端应变的值可表示为

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_{11} \\ d\varepsilon_{22} \\ d\varepsilon_{33} \\ d\varepsilon_{12} \\ d\varepsilon_{23} \\ d\varepsilon_{31} \\ dS_r \\ du_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\varepsilon_{11} \\ Dd\varepsilon_{11} \\ Dd\varepsilon_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1 + e_0}{e} S_r (1 + 2D)d\varepsilon_{11} \\ \frac{1 + e_0}{1 - S_r} \frac{u_a}{e} (1 + 2D)d\varepsilon_{11} \end{bmatrix}. \quad (42)$$

(3)排水排气条件

在排水排气条件下,孔隙水压与气压的增量都为0,根据总围压不变,由式(31)可知

$$D^{\text{ep}}[1]d\varepsilon_{11} + (D^{\text{ep}}[12] + D^{\text{ep}}[13])d\varepsilon_{22} = d\sigma_{11}^t, \quad (43)$$

$$D^{\text{ep}}[21]d\varepsilon_{11} + (D^{\text{ep}}[22] + D^{\text{ep}}[23])d\varepsilon_{22} = 0, \quad (44)$$

整理可得

$$d\varepsilon_{22} = \frac{-D^{\text{ep}}[21]}{D^{\text{ep}}[22] + D^{\text{ep}}[23]} d\varepsilon_{11} = Ed\varepsilon_{11}. \quad (45)$$

故在排水排气条件下式(31)右端应变的值可表示为

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_{11} \\ d\varepsilon_{22} \\ d\varepsilon_{33} \\ d\varepsilon_{12} \\ d\varepsilon_{23} \\ d\varepsilon_{31} \\ dS_r \\ du_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\varepsilon_{11} \\ Ed\varepsilon_{11} \\ Ed\varepsilon_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (46)$$

需要说明的是,大量试验表明,土体变形对饱和度和有一定影响,并基于此现象提出了众多可考虑土体变形对饱和度影响的土水特征曲线模型.而本文所采用的土水特征曲线模型并没有考虑这一因素,故上式 dS_r 为 0. 如需考虑,根据自己的模型添加即可.

2 不同排水排气条件下非饱和土力学特性理论的试验验证

采用 Fortran 语言编写非饱和土单元试验理论模拟程序,选取不同排水排气条件下的非饱和土三轴试验进行模拟对比分析,验证所提方法的合理性.

2.1 不排水、排气三轴剪切试验

Sun 等^[13]在不排水、排气的条件下对非饱和压实珍珠黏土进行了三轴剪切试验,试验过程中保持净侧向压力为 100 kPa,初始围压为 200 kPa,初始孔隙气压为 100 kPa,土体初始吸力为 64 kPa,初始饱和度为 0.7,初始超固结比为 0.525,初始结构性为 0.50,初始孔隙比为 1.2. 模拟中采用的本构模型参数以及土水特征曲线参数分别见表 1 与表 2.

图 1 所示为不排水条件下三轴剪切试验结果与模拟结果对比.从图中可以看出在不排水条件下,随着应变的增加,土体表现出了硬化特性.土体的饱和度和体积应变逐渐增大,而基质吸力逐渐减小.通过对比分析理论与试验结果可知,模拟结果能较好描述试验结果.

表 1 非饱和压实珍珠黏土本构模型参数

压缩指数	回弹指数	临界状态应力比	泊松比	参考孔隙比 (饱和土正常固结 98 kPa)	参考孔隙比(非饱和土正常固结 98 kPa)	超固结比发展控制参数	结构性发展控制参数	各向异性发展控制参数
0.131	0.03	1.148	0.3	1.15	1.65	0.4	1.5	0.0

表 2 非饱和压实珍珠黏土土水特征曲线参数

最大饱和度	最小饱和度	排水曲线进气值/kPa	进水曲线进气值/kPa	滞回循环初始刚度	控制参数 c_1	控制参数 c_2	控制参数 c_3
0.88	0.2	150	38	58 500	0.003	0.010	80.0

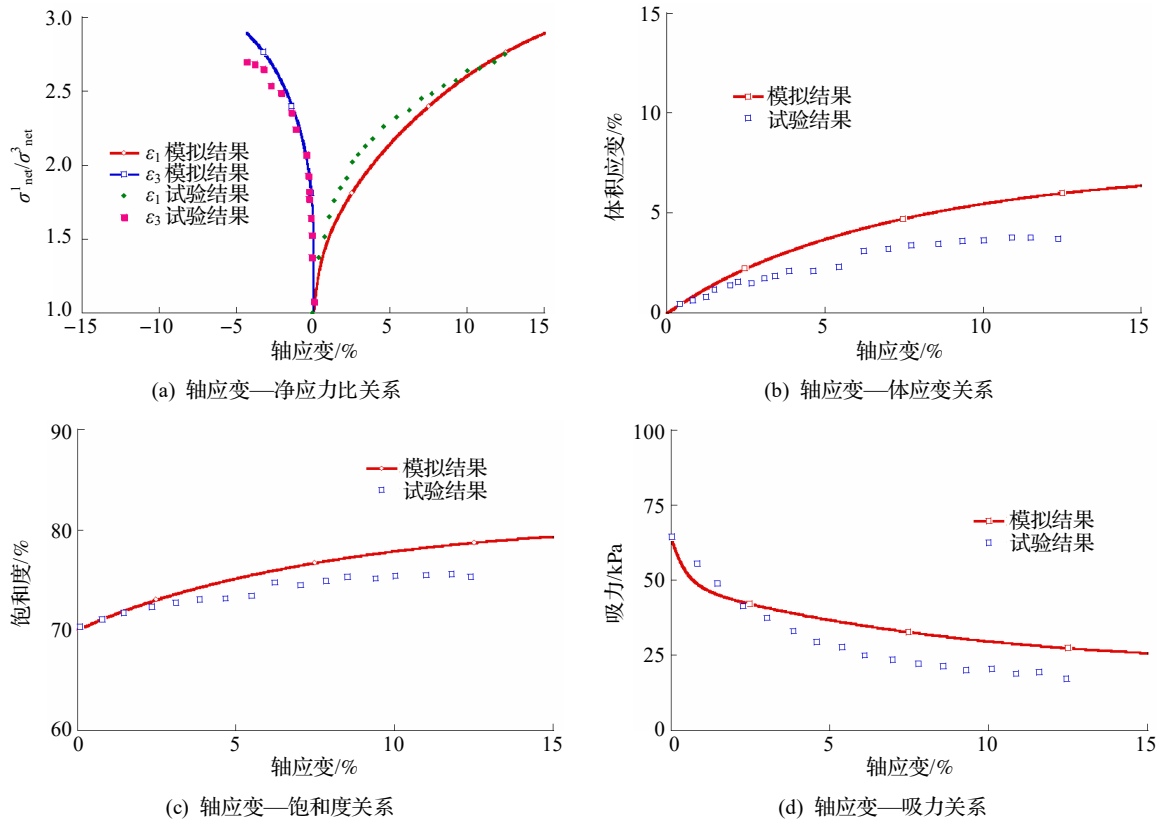


图 1 不排水条件下三轴压缩试验结果与模拟结果

2.2 排水排气试验

Qiu^[14]对非饱和 Masada 土(一种日本典型的完全风花岗岩土)进行了恒定吸力和围压下的三轴排水试验. 试验中土体的初始孔隙比为 0.58, 净应力恒定为 50 kPa, 分别进行了吸力为 80 kPa 和

100 kPa 的排水试验, 对应的饱和度分别为 0.51 和 0.48, 初始超固结比为 0.32, 初始结构性为 0.85, 试验过程中孔隙水压恒定为 0, 吸力通过孔隙气压施加, 分别为 80 kPa 和 100 kPa. 模拟的本构模型参数与土水特征曲线参数见表 3、表 4.

表 3 非饱和 Masada 土本构模型参数

压缩指数	回弹指数	临界状态应力比	泊松比	参考孔隙比 (饱和土正常固结 98 kPa)	参考孔隙比(非饱和土正常固结 98 kPa)	超固结比发展控制参数	结构性发展控制参数	各向异性发展控制参数
0.089	0.008	1.18	0.25	0.69	0.71	2.6	0.5	1.0

表4 非饱和 Masada 土土水特征曲线参数

最大饱和度	最小饱和度	排水曲线进气 值/kPa	进水曲线进气 值/kPa	滞回循环初始 刚度	控制参数 c_1	控制参数 c_2	控制参数 c_3
0.7	0.3	5.0	1.0	20 000	0.012	0.10	50.0

图2所示为排水条件下进行的三轴试验结果与数值模拟结果对比。从图2中可以看出在排水条件下,首先土体偏应力增加,出现体积压缩,随着三轴加载的过程持续,土体偏应力减小,出现体积膨胀的现象。从图2可以看出数值计算结果能较好地与试验结果吻合。

2.3 不排水不排气试验

为了验证本文所提出理论方法在不排水不排气条件下的非饱和土三轴剪切试验中的合理性,采用 Unno 等^[9]进行的完全不排水不排气条件的非饱和土动三轴试验进行验证。试验所用材料为非饱和火山砂土,试验给定初始条件分别为:吸力 6 kPa,孔隙气压 6 kPa,饱和度 0.789,孔隙比 0.93,初始超固结比 0.025,初始结构性 0.95,围压 24.6 kPa。试验过程中,采用逐级施加循环轴向应变荷

载,初始轴向应变为 0.2%,随后每级荷载循环 10 次后轴向应变递增 0.2%,经过 6 级加载后试验结束。本构模拟所采用的模型参数与土水特征曲线参数见表5、表6。

图3所示为不排水不排气条件下的动三轴试验结果与理论模拟结果对比,从图3中可以看出,在不排水不排气的条件下,非饱和土在经历了循环加载之后,平均有效应力逐渐降低,直至趋于0;孔隙气压和孔隙水压在非饱和土循环加载之后逐渐增大并达到一个稳定值;非饱和土在循环加载后土体饱和度逐渐增加,基质吸力逐渐减小,最终趋于0。通过对比分析试验结果与理论模拟结果,可以看出本文所提出的预测理论能够较好地描述非饱和土在不排水与不排气条件下的力学特性行为。

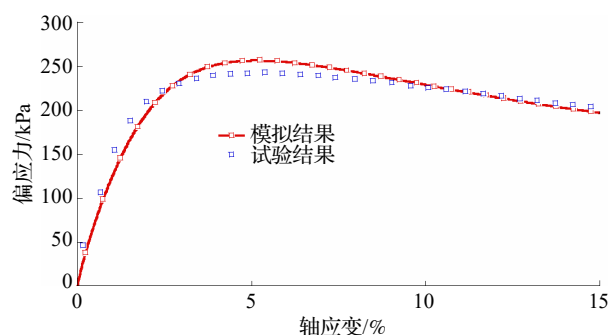
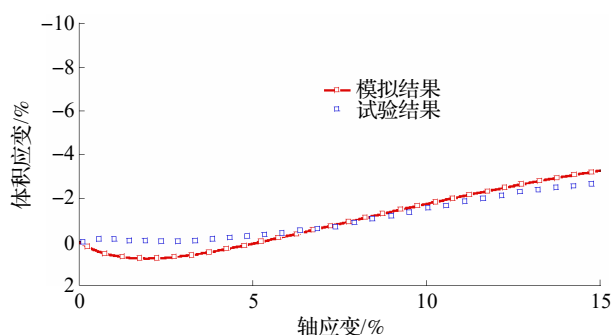
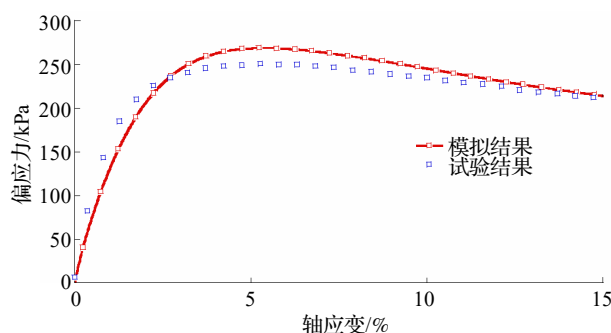
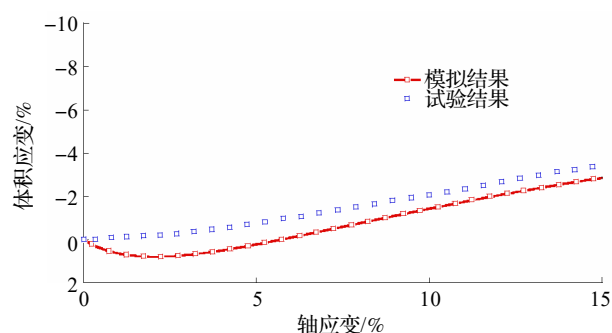
(a) 轴应变—偏应力关系($s=100$ kPa)(b) 轴应变—体积应变关系($s=100$ kPa)(c) 轴应变—偏应力关系($s=80$ kPa)(d) 轴应变—体积应变关系($s=80$ kPa)

图2 排水排气条件非饱和土三轴试验结果与模拟结果

表 5 非饱和火山砂土本构模型参数表

压缩指数	回弹指数	临界状态应力比	泊松比	参考孔隙比 (饱和土正常固结 98 kPa)	参考孔隙比(非饱和土正常固结 98 kPa)	超固结比发展控制参数	结构性发展控制参数	各向异性发展控制参数
0.113	0.025	1.0	0.38	1.08	1.45	0.01	1.4	0.01

表 6 非饱和火山砂土土水特征曲线参数

最大饱和度	最小饱和度	排水曲线进气值/kPa	进水曲线进气值/kPa	滞回循环初始刚度	控制参数 c_1	控制参数 c_2	控制参数 c_3
1.0	0.3	25	0.5	800	0.015	0.18	8 000.0

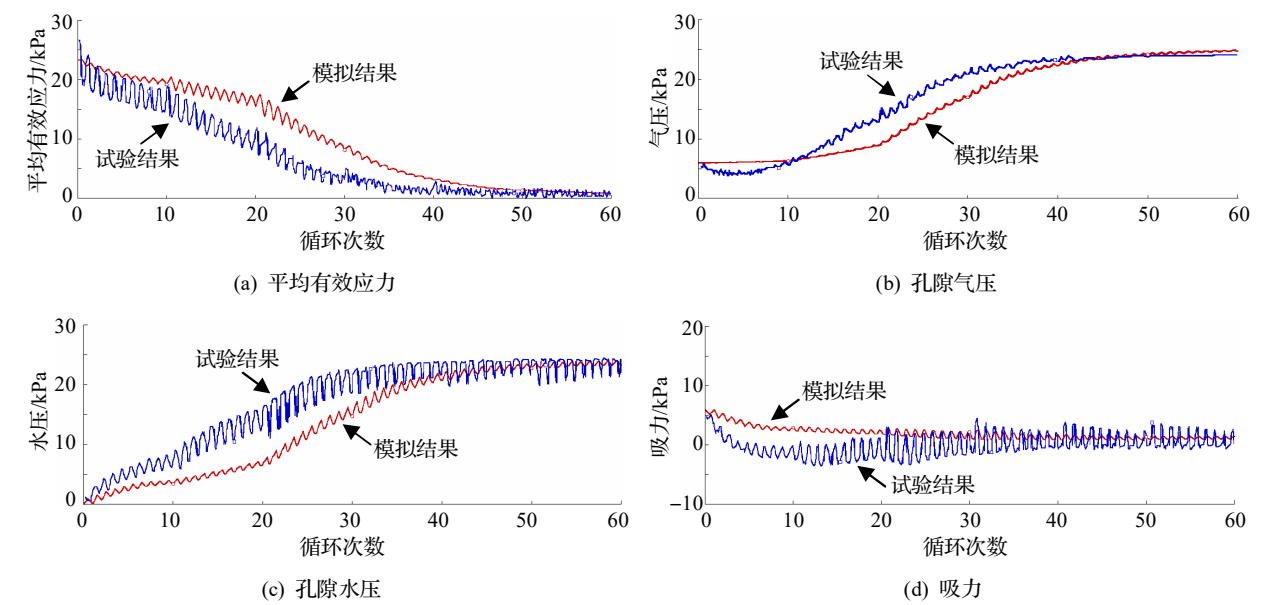


图 3 不排水不排气条件下非饱和土动三轴试验结果与模拟结果

3 结论

(1)基于非饱和土弹塑性本构模型和土水特征曲线模型, 推导了不同排水排气条件下(不排水、排气, 不排水不排气, 排水排气)非饱和土理论模拟预测控制方程. 根据不同条件下的初始已知量, 给出了相应的应变、气压及饱和度增量的计算方法, 进而利用控制方程可求得相应应力及水压值.

(2)通过对不同排水排气条件下的非饱和土三轴试验并与理论模拟进行对比分析, 验证了本文所提出的理论模拟方法能较好地描述非饱和土在不同排水排气条件下的力学特性行为.

(3)非饱和土不排水不排气条件下控制方程的推导应用了理想气体假设(玻意耳定律). 因此, 完全不排气条件下控制方程的应用应满足温度恒定.

参考文献:

[1] Alonso E E, Gens A, Josa A. A constitutive model for partially saturated soils[J]. Géotechnique, 1990, 40(3): 405-430.

[2] Miao L C, Cui Y J, Cui Y. Hydromechanical behaviors of unsaturated soils[J]. Journal of Materials in Civil Engineering, 2015, 27(7):04014209.

[3] Sun D A, Sheng D C, Cui H B, et al. A density-dependent elastoplastic hydro-mechanical model for unsaturated compacted soils[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2007, 31(11): 1257-1279.

[4] Sheng D S, Fredlund D G, Gens A. A new modelling approach for unsaturated soils using independent stress variables[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2008, 45(4): 511-534.

- [5] Zhang F, Ikariya T. A new model for unsaturated soil using skeleton stress and degree of saturation as state variables[J]. *Soils and Foundations*, 2011, 51(1):67-81.
- [6] 赵成刚, 刘艳. 连续孔隙介质土力学及其在非饱和土本构关系中的应用[J]. *岩土工程学报*, 2009, 31(9): 1324-1335.
- [7] Liu C, Xu J. Experimental study on the effects of initial conditions on liquefaction of saturated and unsaturated sand[J]. *International Journal of Geomechanics*, 2015, 15(6):04014100.
- [8] Oka F, Kodaka T, Suzuki H, et al. Experimental study on the behavior of unsaturated compacted silt under triaxial compression[J]. *Soils and Foundations*, 2010, 50(1):27-44.
- [9] Unno T, Kazama M, Uzuoka R, et al. Liquefaction of unsaturated sand considering the pore air pressure and volume compressibility of the soil particle skeleton[J]. *Soils and Foundations*, 2008, 48(1):87-99.
- [10] Uzuoka R, Unno T, Sento N, et al. Effect of pore air pressure on cyclic behavior of unsaturated sandy soil [M]//*Unsaturated Soils: Research & Applications*, Sydney: CRC Press, 2014:783-789.
- [11] 刘文化, 杨庆, 唐小微, 等. 不排水条件下非饱和土水力-力学耦合特性数值模拟[J]. *岩土工程学报*, 2017, 39(3):486-494.
- [12] 汪俊敏, 熊勇林, 杨骥莱, 等. 不饱和土动弹塑性本构模型研究[J]. *岩土力学*, 2019, 40(6):2323-2331.
- [13] Sun D, Sheng D, Xiang L, et al. Elastoplastic prediction of hydro-mechanical behaviour of unsaturated soils under undrained conditions[J]. *Computers and Geotechnics*, 2008, 35(6):845-852.
- [14] Qiu X Y. Experimental study on the hydro-mechanical behavior of saturated/unsaturated soil and its unified constitutive modeling[D]. Nagoya: Nagoya Institute of Technology, 2017. (in Japanese)

A unified method of soil water-force-air coupling constitutive model for unsaturated soil

DU Jianhang¹, SANG Qinyang¹, XIONG Yonglin^{1,2*}

(1.School of Civil & Environmental Engineering and Geography Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China;

2.Key Laboratory of Impact and Safety Engineering of Ministry of Education, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: Unsaturated soils may still cause soil deformation under the undrained and unvented conditions. Therefore, it is necessary to consider the change of void ratio in the simulation of elastoplastic constitutive theory of unsaturated soil. This paper derives the predictive control equations of elastoplastic constitutive theory of unsaturated soil under different drainage and exhaust conditions (undrained and exhausted, undrained and unvented, drained and exhausted), which can be used to predict the mechanical behaviors of unsaturated soil under different drainage and exhaust conditions. Through comparative analysis with experimental results, it can be seen that this method can reproduce the experimental results well and describe the hydraulic coupling behavior of unsaturated soils under different drainage and exhaust conditions.

Key words: unsaturated soil; constitutive model; undrained and unvented; water-force-air coupling; numerical simulation

(责任编辑 韩 超)