

加权半线性椭圆系统稳定正解的 Liouville 定理

甘怡清, 胡良根*

(宁波大学 数学与统计学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 研究加权半线性椭圆系统

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(w(x)\nabla u) = w_1 v, \\ -\operatorname{div}(w(x)\nabla v) = w_2 u^p, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

其中, $p > 1$, $w(x)$ 、 $w_1(x)$ 和 $w_2(x)$ 是非负连续函数. 对于 $w_1 \neq w_2$ 和 $w_1 \equiv w_2$, 指数 p 属于次临界、临界和超临界的部分区间时, 证明了椭圆系统不存在稳定正解.

关键词: 稳定解; Liouville 定理; 权项; 迭代

中图分类号: O186

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2023) 02-0073-09

椭圆方程稳定解和有限 Morse 指标解的 Liouville 定理的研究兴趣起源于 Bahri 和 Lions 的工作^[1]. 2007 年, Farina^[2]研究了 Lane-Emden 方程 $-\Delta u = u^p$, 证明了当 $1 < p < p_{\text{LE}}$ 时, 方程不存在稳定解, 当 $p > p_{\text{LE}}$ 时, 方程存在稳定正解; 同时, 他也给出了 Lane-Emden 方程在次临界和超临界时, 不存在有限 Morse 指标解, 以及在临界时, 具有有限能量的有限 Morse 指标解, 其中,

$$p_{\text{LE}} = \begin{cases} \frac{(N-2)^2 - 4N + 8\sqrt{N-1}}{(N-2)(N-10)}, & N \geq 11, \\ +\infty, & 3 \leq N \leq 10, \end{cases}$$

为 Joseph-Lundgren 指数. 对于双调和 Lane-Emden 方程 $\Delta^2 u = |u|^{p-1} u$, Dávila 等^[3]通过建立解的单调公式, 在超临界情形时, 将方程非平凡整体解的不存在性转化为非平凡齐次解的不存在性, 从而给出类似于文献[2]的结果, 即稳定解、有限 Morse 指标解的完全分类.

Farina 方法和单调公式方法已被许多研究人员应用于研究 Hardy-Hénon 方程、加权椭圆系统和分数阶椭圆方程稳定解的 Liouville 定理^[4-5]. 如使用 Farina 方法, Cowan 等^[4]证明了加权椭圆方程 $-\operatorname{div}(w\nabla u) = w_1 u^p$ 不存在稳定解, 其中, w 和 w_1 是

非负函数.

然而, 上面两种方法对许多加权椭圆方程不适用. Cowan 等^[6]和 Dupaigne 等^[7]利用积分估计、解的正则性和 Bootstrap 迭代研究加权椭圆方程稳定解的 Liouville 定理. 利用文献[6-7]方法, 文献[8-9]研究椭圆系统(A)在 $w \equiv 1$ 和 $w_1 = w_2 = (1+|x|^2)^{\alpha/2}$ 时稳定解的 Liouville 定理. 2017 年, Hajlaoui 等^[10]改进文献[8]的结果, 利用新的比较性质处理了 $[1, \min\{4/3, p\}]$ 的情形. 最近, Mtiri^[11]研究了含 Grushin 算子的 Lane-Emden 系统稳定解的 Liouville 定理.

设 $w(x) = (1+|x|^2)^{\delta/2}$, $w_1(x) = (1+|x|^2)^{\alpha/2}$ 和 $w_2(x) = (1+|x|^2)^{\beta/2}$, 考虑椭圆系统:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(w(x)\nabla u) = w_1 v, \\ -\operatorname{div}(w(x)\nabla v) = w_2 u^p, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (\text{A})$$

经典稳定正解的性质, 其中 $p > 1$, 权项指数 $\delta > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ 满足:

$$(H) \quad 0 \leq \beta - \alpha \leq (N + \delta - 2)(p - 1).$$

(H1) 对于 $\alpha \neq \beta$, 下面两个条件中的一个条件成立:

$$(1) \quad \text{如果 } \alpha > \delta, \delta < 2 + \frac{\beta}{p+1} + \frac{\alpha}{2} \text{ 成立;}$$

收稿日期: 2022-06-30.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journal.g.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(62071262); 宁波市自然科学基金(2018A610194).

第一作者: 甘怡清(1998-), 女, 江西临川人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 非线性泛函分析. Email: 1580326142@qq.com

*通信作者: 胡良根(1977-), 男, 江西临川人, 教授, 主要研究方向: 非线性泛函分析. Email: hulianggen@nbu.edu.cn

(2) 如果 $\alpha \leq \delta$, $\delta < \frac{2\beta + 4(p+1) + 2p\alpha}{3p+1}$ 成立.

(H2) 对于 $\alpha = \beta$, 下面两个条件中的一个条件成立:

(1) 如果 $\alpha > \delta$, $\delta < 2 + \frac{(p+3)\alpha}{2(p+1)}$ 成立;

(2) 如果 $\alpha \leq \delta$, 有 $\delta < \frac{(p+1)(4+2\alpha)}{3p+1}$ 成立.

对于研究带梯度项的加权椭圆系统(A), 权项 $w_1 \neq w_2$ 会导致两个困难, 困难一: 如何建立解 (u, v) 的高阶指数幂积分被低阶指数幂积分所控制; 困难二: 探索解的 L^p 正则性. 本文得到两个主要结果.

定理 1 设条件(H)和(H1)成立, 满足下面两个条件之一:

(i) 对于 $\alpha \leq \delta$, 空间维数满足

$$N \leq 2 + \left[\frac{\beta + 2(p+1) + p\alpha}{p-1} - \frac{(3p+1)\delta}{2(p+1)} \right] \zeta;$$

(ii) 对于 $\alpha > \delta$, 满足

$$N \leq 2 + \left[\frac{\beta}{p+1} + \frac{\alpha}{2} + 2 - \delta \right] \zeta.$$

则系统(A)不存在稳定正解. 其中, ζ 是多项式

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}(p, \varepsilon, \zeta) = & \zeta^4 - \frac{32(p-\varepsilon)(p+1)}{(p-1)^2} \zeta^2 + \\ & \frac{32(p-\varepsilon)(p+1)(p+3)}{(p-1)^3} \zeta - \\ & \frac{64(p-\varepsilon)(p+1)^2}{(p-1)^4} \end{aligned}$$

的最大根, 式中, $\varepsilon > 0$ 是由下文引理 5 给出的非常小的数.

定理 2 设条件(H2)成立, 并且 $N \geq 3$, $\delta > 0$, $\alpha > 0$ 满足下面两个条件之一:

(i) 对于 $\alpha \leq \delta$, 满足

$$N < k + \left[\alpha - \frac{(3p+1)\delta}{2(p+1)} \right] \frac{k-2}{2};$$

(ii) 对于 $\alpha > \delta$, 空间维数满足

$$N < k + \left[\frac{(p+3)\alpha}{2(p+1)} - \delta \right] \frac{k-2}{2}.$$

则系统(A)不存在稳定正解. 这里,

$$p \in (1, p_*(k)),$$

$$p_*(k) = \begin{cases} +\infty, 5 \leq k \leq \bar{k}, \\ \frac{k+2 - \sqrt{k^2+4-4\sqrt{k^2+h_k^*}}}{k-6 - \sqrt{k^2+4-4\sqrt{k^2+h_k^*}}}, k > \bar{k} \end{cases}$$

和 $\bar{k} \in (12, 13)$ 是方程 $8(k-2)(k-4) = h_k^* := (k^2(k-4)^2)/16 + (k-2)^2/2 - 1$ 的最大根.

注 1 (1)建立稳定解的标准不等式和中间不等式, 联合测试函数和新的比较原理解决困难一.

(2)使用 Brezis-Kato 截断技术将正则性问题转化为代数不等式, 从而解决困难二.

(3)设(H2)成立, 记 $k = 2 + 2\zeta$, 满足下面两个条件之一:

(i) 如果 $\alpha \leq \delta$, 满足

$$N < 2 + \left[2 + \alpha - \frac{(3p+1)\delta}{2(p+1)} \right] \zeta;$$

(ii) 如果 $\alpha > \delta$, 满足

$$N < 2 + \left[\frac{(p+3)\alpha}{2(p+1)} + 2 - \delta \right] \zeta.$$

则系统(A)不存在稳定正解. 其中, ζ 是多项式

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}(p, \zeta) = & \zeta^4 - \frac{32p(p+1)}{(p-1)^2} \zeta^2 + \\ & \frac{32p(p+1)(p+3)}{(p-1)^3} \zeta + \frac{64p(p+1)^2}{(p-1)^4} \end{aligned}$$

的最大根.

(4)从定理 1 和定理 2 的结果来看, 当指数 p 属于次临界、临界和超临界一部分区间时, 系统(A)不存在稳定正解.

设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 的子集, $f, g \in C^1(\mathbb{R}^{N+2}, \Omega)$. 考虑椭圆系统:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(w\nabla u) = f(u, v, x), \\ -\operatorname{div}(w\nabla v) = g(u, v, x). \end{cases} \quad (\text{B})$$

定义 1^[13] 椭圆系统(B)的解 $(u, v) \in C^2(\Omega) \times C^2(\Omega)$ 称为稳定的, 如果特征值问题

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(w\nabla u) = f_u \phi + f_v \psi + e\phi, x \in \Omega, \\ -\operatorname{div}(w\nabla v) = g_u \phi + g_v \psi + e\psi, x \in \Omega, \\ \phi = \psi = 0, \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{C})$$

有第一正特征值 $e > 0$ 和相应的正光滑特征函数对 (ϕ, ψ) .

根据定义 1, 椭圆系统(A)的解 (u, v) 称为稳定

的, 如果存在正特征值 $e > 0$ 和相应的正光滑函数对 (ϕ, ψ) , 使得

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(w\nabla\phi) = w_1\psi + e\phi, x \in \Omega, \\ -\operatorname{div}(w\nabla\psi) = pw_2u^{p-1} + e\psi, x \in \Omega, \\ \phi = \psi = 0, \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

全文设 C 表示与其他变量无关的正常数, $B_r(x)$ 表示 $\mathbb{R}^N$ 上以 x 为中心 r 为半径的球, 并记 $B_r = B_r(0)$.

1 引理

类似于文献[12]中的引理 3、引理 7, 从定义 1 可以推出椭圆系统(A)稳定解的性质.

引理 1 设 (u, v) 是椭圆系统(A)的非负稳定解. 则对任意的 $\zeta \in C_0^2(\Omega)$, 有

$$p \int_{\Omega} w_2 u^{p-1} \zeta^2 dx \leq \int_{\Omega} \frac{|\operatorname{div}(w\nabla\zeta)|^2}{w_1} dx, \quad (2)$$

$$p \int_{\Omega} \sqrt{w_1 w_2} u^{\frac{p-1}{2}} \zeta^2 dx \leq \int_{\Omega} w |\nabla\zeta|^2 dx. \quad (3)$$

利用文献[9]中的引理 2.3 方法, 可得椭圆系统(A)稳定解的积分估计.

引理 2 设 (u, v) 是椭圆系统(A)的非负稳定解. 则对任意的 $R > 0$, 有积分估计

$$\int_{B_R} (w_1 v^2 + w_2 u^{p+1}) dx \leq CR^{\frac{N-2\beta+(p+1)(4+\alpha-2\delta)}{p-1}}. \quad (4)$$

引理 3 文献[11]中引理 5 对任意的整数 $j \geq 1$, 取 $R > 1$, $R_j = 2^j R$. 设 $1 \leq l < (N/(N-2))$, 存在某个 $C = C(j, l) < +\infty$, 使得对任意光滑函数 $z \geq 0$, 则

$$\left(\int_{B_{R_j}} z^l dx \right)^{1/l} \leq CR^{2+N(1/l-1)} \int_{B_{R_{j+1}}} |\Delta z| dx + CR^{N(1/l-1)} \int_{B_{R_{j+1}}} z dx.$$

2 定理 1 的证明

采用文献[14]中的方法建立一个新的比较原理.

引理 4 设条件(H)和(H1)成立, (u, v) 是椭圆系统(A)的稳定正解. 则有

$$\frac{w_2 u^{p+1}}{p+1} \leq \frac{w_1 v^2}{2}, x \in \mathbb{R}^N.$$

证明 记 $\gamma(x) := k\varphi(x)u^{(p+1)/2} - v$, 其中,

$$k = \sqrt{\frac{2}{p+1}}, \varphi(x) = \sqrt{\frac{w_2(x)}{w_1(x)}} = (1+|x|^2)^b, \\ b = \frac{\beta-\alpha}{4},$$

则计算可得:

$$\operatorname{div}(w\nabla\gamma) = \sqrt{w_1 w_2} u^{\frac{p-1}{2}} \left[\varphi u^{\frac{p+1}{2}} - \frac{v}{k} \right] + M(x),$$

其中,

$$M(x) = \frac{p^2-1}{4} k\varphi w u^{\frac{p+1}{2}} \left[\frac{\nabla u}{u} + \frac{4b}{p-1} \frac{x}{1+|x|^2} \right]^2 + \\ 2bkNu^{\frac{p+1}{2}} \frac{\varphi w}{(1+|x|^2)^2} + \\ 2bku^{\frac{p+1}{2}} \frac{\varphi w |x|^2}{(1+|x|^2)^2} \times \\ \left[N+2b+\delta-2 + \frac{2(p+1)b}{p-1} \right].$$

因为条件(H)成立, 可以推导出

$$N+2b+\delta-2 + \frac{2(p+1)b}{p-1} = N+\delta-2 + \frac{4b}{p-1} \geq 0,$$

这意味着 $M(x) \geq 0$. 因此

$$\operatorname{div}(w\nabla\gamma) \geq \sqrt{w_1 w_2} u^{\frac{p-1}{2}} \left[\varphi u^{\frac{p+1}{2}} - \frac{v}{k} \right],$$

则在集合 $G = \{x \in \mathbb{R}^N : \gamma(x) \geq 0\}$ 中, 有

$$\operatorname{div}(w\nabla\gamma) \geq 0. \quad (5)$$

选取 $1 < q < 2$, 对任意 $R > 0$, $t \in (0, R)$ 和 $s > 0$, 可以发现

$$(q-1) \int_{B_R \setminus B_t} (\gamma_+ + s)^{q-2} w |\nabla\gamma|^2 dx = \\ - \int_{B_R \setminus B_t} (\gamma_+ + s)^{q-1} \operatorname{div}(w\nabla\gamma) dx + \\ \int_{\partial B_R} (\gamma_+ + s)^{q-1} w \frac{\partial\gamma}{\partial\nu} dS + \\ \int_{\partial B_t} (\gamma_+ + s)^{q-1} w \frac{\partial\gamma}{\partial\nu} dS.$$

令 $s \rightarrow 0$, 由收敛定理和式(5)意味着

$$(q-1) \int_{B_R \setminus B_t} \gamma_+^{q-2} w |\nabla\gamma|^2 dx \leq \int_{\partial B_R} \gamma_+^{q-1} w \frac{\partial\gamma}{\partial\nu} dS + \\ \int_{\partial B_t} \gamma_+^{q-1} w \frac{\partial\gamma}{\partial\nu} dS.$$

令 $t = t_i \rightarrow 0$ 取极限, 并由 u 和 v 的正则性可得

$$(q-1) \int_{B_R} \gamma_+^{q-2} w |\nabla \gamma|^2 dx \leq \int_{\partial B_R} \gamma_+^{q-1} w \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} dS \leq \frac{R^{N-1}}{q} f'(R), \quad (6)$$

其中,

$$f(r) = \int_{S^{N-1}} w \gamma_+^q(r\theta) d\theta.$$

对任意 $R > R_0$, 由 Hölder 不等式可以推导出

$$\int_{R_0}^R r^{N-1} f(r) dr \leq C \left(\int_{B_R} w_2 u^{p+1} dx \right)^{\frac{q}{2}} \times \left(\int_{B_R} w^{\frac{2}{2-q}} w_1^{-\frac{q}{2-q}} dx \right)^{\frac{2-q}{2}}. \quad (7)$$

对于 $\alpha > \delta$, 选择 q 趋近于 2, 有 $N(2-q)/2 + \delta - q\alpha/2 < 0$. 联合式(4)和式(7)可得

$$\int_{R_0}^R r^{N-1} f(r) dr \leq CR^{\left(N - \frac{2\beta + (p+1)(4+\alpha-2\delta)}{p-1}\right)\frac{q}{2}} = o(R^N),$$

从而取序列 $R_i \rightarrow \infty$ 有 $f(R_i) \rightarrow 0$. 因此存在 $\tilde{R}_i \rightarrow +\infty$, 使得 $f'(\tilde{R}_i) \leq 0$. 则式(6)意味着 γ_+ 在 G 中是常数. 如果 $G = \mathbb{R}^N$, 则有 $k^2 w_2 u^{p+1} \geq C w_1 > 0$, 这与引理 2 矛盾, 即 $\gamma_+ \equiv 0$. 如果 $G \subsetneq \mathbb{R}^N$, 可知在 ∂G 上 $\gamma = 0$, 从而在 G 中有 $\gamma_+ \equiv 0$.

对于 $\alpha \leq \delta$, 选择 q 趋近于 2, 由式(4)可知:

$$\int_{R_0}^R r^{N-1} f(r) dr \leq CR^{N - \left(\frac{2\beta + (p+1)(4+\alpha-2\delta)}{p-1}\right)\frac{q}{2} + \delta - \frac{q}{2}\alpha} = o(R^N).$$

类似于以上讨论, 可得 $\gamma_+ \equiv 0$.

引理 5 设 (u, v) 是椭圆系统(A)的稳定正解. 则对任意的 $\tau > 2$ 和 $R > 1$, 有

$$\int_{B_{R_{j+1}}} w_2 u^p v^{\tau-1} dx \leq \frac{C}{R^2} \int_{B_{R_{j+1}}} w v^\tau dx,$$

其中, τ 满足

$$\mathfrak{T}(p, \varepsilon, \tau) = \tau^4 - \frac{32(p-\varepsilon)}{p+1} \tau^2 + \frac{32(p-\varepsilon)(p+3)}{(p+1)^2} \tau - \frac{64(p-\varepsilon)}{(p+1)^2} < 0,$$

而 $\varepsilon > 0$ 是一个非常小的常数.

证明 记

$$a(x) := \left(\frac{w_2(x)}{w_1(x)} \right)^{\frac{1}{p+1}} = (1 + |x|^2)^l,$$

其中,

$$l = \frac{\beta - \alpha}{2(p+1)}.$$

设 $\mathcal{U}(x) := a(x)u(x)$, 则在式(3)中取 $\mathcal{U}^{(\lambda+1)/2} \zeta$ 作为测试函数, 有

$$\begin{aligned} & \sqrt{p} \int_{\mathbb{R}^N} \sqrt{w_1 w_2} u^{\frac{p-1}{2}} \mathcal{U}^{\lambda+1} \zeta^2 dx \leq \\ & \int_{\mathbb{R}^N} w \mathcal{U}^{\lambda+1} |\nabla \zeta|^2 dx + \\ & \int_{\mathbb{R}^N} w |\nabla (\mathcal{U}^{\frac{\lambda+1}{2}})|^2 \zeta^2 dx + \\ & (\lambda+1) \int_{\mathbb{R}^N} w \mathcal{U}^\lambda \zeta \cdot \nabla \mathcal{U} \cdot \nabla \zeta dx. \end{aligned} \quad (8)$$

选取 $\Theta \in C_0^\infty(B_2)$, 且在 B_1 中有 $\Theta = 1$, 令

$$\zeta(x) := \Theta \left(\frac{x}{R_j} \right),$$

计算可得:

$$\begin{aligned} & (\lambda+1) \int_{\mathbb{R}^N} w \mathcal{U}^\lambda \zeta \nabla \mathcal{U} \cdot \nabla \zeta dx = \\ & - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{U}^{\lambda+1} \operatorname{div}(w \nabla (\zeta^2)) dx. \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} w |\nabla (\mathcal{U}^{\frac{\lambda+1}{2}})|^2 \zeta^2 dx = \frac{(\lambda+1)^2}{4\lambda} \times \\ & \int_{\mathbb{R}^N} [w_1 a \mathcal{U}^\lambda v \zeta^2 - \mathcal{U}^\lambda \operatorname{div}(w \nabla a) u \zeta^2] dx - \\ & \frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} w \mathcal{U}^\lambda \nabla a \cdot \nabla u \zeta^2 dx + \\ & \frac{\lambda+1}{4\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{U}^{\lambda+1} \operatorname{div}(w \nabla (\zeta^2)) dx. \end{aligned} \quad (10)$$

计算式(10)右边的第 2 项产生

$$\begin{aligned} & - \frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} w \mathcal{U}^\lambda \nabla a \nabla u \zeta^2 dx = \frac{(\lambda+1)l}{\lambda\delta} \times \\ & \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{U}^{\lambda+1} \nabla w \nabla (\zeta^2) dx + \frac{(\lambda+1)l}{2\lambda} \times \\ & \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{U}^{\lambda+1} \operatorname{div}[(1 + |x|^2)^{\frac{\delta}{2} + (\lambda+1)l-1} 2x] \zeta^2 dx. \end{aligned} \quad (11)$$

容易发现

$$l \operatorname{div}[(1 + |x|^2)^{\frac{\delta}{2} + (\lambda+1)l-1} 2x] = [(N + \delta + 2(\lambda+1)l - 2)|x|^2 + N] \frac{2l w a^{\lambda+1}}{(1 + |x|^2)^2},$$

$$\operatorname{div}(w \nabla a) = \frac{2l w a}{(1 + |x|^2)^2} \times$$

$$[(N + \delta + 2l - 2)|x|^2 + N] \geq 0,$$

$$\Delta w = [\delta(N + \delta - 2)|x|^2 + N\delta] \frac{w}{(1 + |x|^2)^2}.$$

选择 $\sigma := \frac{2l(N + \delta + 2(\lambda+1)l - 2)}{\delta(N + \delta - 2)}$, 将以上 2 个

算式代入式(11), 可得:

$$\frac{(\lambda+1)l}{2\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} u^{\lambda+1} \operatorname{div}[(1+|x|^2)^{\frac{\delta}{2}+(\lambda+1)l-1} 2x] \zeta^2 dx \leq$$

$$\frac{(\lambda+1)\sigma}{2\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{U}^{\lambda+1} \Delta w \zeta^2 dx.$$

由 $u > 0$, $2\delta < (\alpha + \beta + 4)$ 和使用 Young 不等式可以推导出:

$$\begin{aligned} & \frac{(\lambda+1)\sigma}{2\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{U}^{\lambda+1} \Delta w \zeta^2 dx \leq \\ & \varpi \int_{\mathbb{R}^N} \sqrt{w_1 w_2} u^{\frac{p-1}{2}} \mathcal{U}^{\lambda+1} \zeta^2 dx + \\ & \frac{C(\varpi)}{R^2} \int_{B_{R_{j+1}}} w(x) \mathcal{U}^{\lambda+1} dx, \end{aligned} \quad (12)$$

其中, $\varpi > 0$ 是一个非常小的正数. 将式(11)和式(12)代入式(10)可得:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} w |\nabla(\mathcal{U}^{\frac{\lambda+1}{2}})|^2 \zeta^2 dx \leq \\ & \varpi \int_{\mathbb{R}^N} \sqrt{w_1 w_2} u^{\frac{p-1}{2}} \mathcal{U}^{\lambda+1} \zeta^2 dx + \\ & \frac{(\lambda+1)^2}{4\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} w_1 a \mathcal{U}^{\lambda} v \zeta^2 dx + \\ & \frac{(\lambda+1)l}{\lambda\delta} \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{U}^{\lambda+1} \nabla w \nabla(\zeta^2) dx + \\ & \frac{\lambda+1}{4\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{U}^{\lambda+1} \operatorname{div}(w \nabla(\zeta^2)) dx + \\ & \frac{C(\varpi)}{R^2} \int_{B_{R_{j+1}}} w \mathcal{U}^{\lambda+1} dx. \end{aligned}$$

设 $\rho_1 := \frac{4\lambda(\sqrt{p}-\varpi)}{(\lambda+1)^2}$, 联合式(8)和式(9), 有

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \sqrt{w_1 w_2} u^{\frac{p-1}{2}} \mathcal{U}^{\lambda+1} \zeta^2 dx \leq \\ & \frac{1}{\rho_1} \int_{\mathbb{R}^N} w_1 a \mathcal{U}^{\lambda} v \zeta^2 dx + \frac{C}{R^2} \int_{B_{R_{j+1}}} w \mathcal{U}^{\lambda+1} dx. \end{aligned} \quad (13)$$

在式(3)中取测试函数 $v^{(\mu+1)/2} \zeta$, 发现

$$\begin{aligned} & \sqrt{p} \int_{\mathbb{R}^N} \sqrt{w_1 w_2} u^{\frac{p-1}{2}} v^{\mu+1} \zeta^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} w v^{\mu+1} |\nabla \zeta|^2 dx + \\ & \int_{\mathbb{R}^N} w |\nabla(v^{\mu+1})|^2 \zeta^2 dx - \\ & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} v^{\mu+1} \operatorname{div}(w \nabla(\zeta^2)) dx. \end{aligned} \quad (14)$$

计算式(14)右边第2项, 可得:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} w |\nabla(v^{\frac{\mu+1}{2}})|^2 \zeta^2 dx = \\ & \frac{(\mu+1)^2}{4\mu} \int_{\mathbb{R}^N} w_2 u^p v^{\mu} \zeta^2 dx + \\ & \frac{\mu+1}{4\mu} \int_{\mathbb{R}^N} v^{\mu+1} \operatorname{div}(w \nabla(\zeta^2)) dx. \end{aligned}$$

记 $\rho_2 := \frac{4\mu\sqrt{p}}{(\mu+1)^2}$, 式(14)意味着

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \sqrt{w_1 w_2} u^{\frac{p-1}{2}} v^{\mu+1} \zeta^2 dx \leq \\ & \frac{1}{\rho_2} \int_{\mathbb{R}^N} w_2 u^p v^{\mu} \zeta^2 dx + \\ & \frac{C}{R^2} \int_{B_{R_{j+1}}} w v^{\mu+1} dx. \end{aligned} \quad (15)$$

选择 λ 和 μ 的值满足:

$$\begin{aligned} & 2\lambda = (p+1)\mu + p - 1 \Leftrightarrow \lambda + 1 = \\ & \frac{(p+1)(\mu+1)}{2}. \end{aligned} \quad (16)$$

应用 Young 不等式可得:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho_1} \int_{\mathbb{R}^N} w_1 a \mathcal{U}^{\lambda} v \zeta^2 dx \leq \\ & \frac{\mu}{\mu+1} \int_{\mathbb{R}^N} \sqrt{w_1 w_2} u^{\frac{p-1}{2}} \mathcal{U}^{\lambda+1} \zeta^2 dx + \\ & \frac{1}{\rho_1^{\mu+1}(\mu+1)} \int_{\mathbb{R}^N} \sqrt{w_1 w_2} u^{\frac{p-1}{2}} v^{\mu+1} \zeta^2 dx. \end{aligned} \quad (17)$$

类似计算发现

$$\begin{aligned} & \rho_2^{\mu} \int_{\mathbb{R}^N} w_2 u^p v^{\mu} \zeta^2 dx \leq \\ & \frac{1}{\mu+1} \int_{\mathbb{R}^N} \sqrt{w_1 w_2} u^{\frac{p-1}{2}} \mathcal{U}^{\lambda+1} \zeta^2 dx + \\ & \frac{\rho_2^{\mu+1} \mu}{\mu+1} \int_{\mathbb{R}^N} \sqrt{w_1 w_2} u^{\frac{p-1}{2}} v^{\mu+1} \zeta^2 dx. \end{aligned} \quad (18)$$

记:

$$J_1 := \int_{\mathbb{R}^N} \sqrt{w_1 w_2} u^{\frac{p-1}{2}} \mathcal{U}^{\lambda+1} \zeta^2 dx,$$

$$J_2 := \int_{\mathbb{R}^N} \sqrt{w_1 w_2} u^{\frac{p-1}{2}} v^{\mu+1} \zeta^2 dx.$$

则联合引理 4, 以及式(13)、(15)、(17)和(18)

可得:

$$\begin{aligned} & \frac{(\rho_1 \rho_2)^{\mu+1} - 1}{\rho_1^{\mu+1}(\mu+1)} \int_{\mathbb{R}^N} \sqrt{w_1 w_2} u^{\frac{p-1}{2}} v^{\mu+1} \zeta^2 dx \leq \\ & \frac{C}{R^2} \int_{B_{R_{j+1}}} w v^{\mu+1} dx. \end{aligned}$$

由于 $a(x) := (w_2 / w_1)^{1/(p+1)}$, 引理 4 意味着

$$k w_2 u^p v^{\mu} \leq \sqrt{w_1 w_2} u^{\frac{p-1}{2}} v^{\mu+1},$$

则有

$$\frac{(\rho_1 \rho_2)^{\mu+1} - 1}{\rho_1^{\mu+1}(\mu+1)} \int_{\mathbb{R}^N} w_2 u^p v^{\mu} \zeta^2 dx \leq \frac{C}{R^2} \int_{B_{R_{j+1}}} w v^{\mu+1} dx.$$

由 ρ_1 、 ρ_2 的取值和式(16)发现

$$\rho_1 \rho_2 > 1 \Leftrightarrow 8(p-\varepsilon)[(p+1)(\tau-1)+p-1] \times \\ (\tau-1) > \frac{(p+1)^2}{4} \tau^4,$$

其中, $\varepsilon = \varpi \sqrt{p}$ 和 $\tau = \mu + 1$. 直接计算可得:

$$\mathfrak{I}(p, \varepsilon, \tau) = \tau^4 - \frac{32(p-\varepsilon)}{p+1} \tau^2 + \\ \frac{32(p-\varepsilon)(p+3)}{(p+1)^2} \tau - \frac{64(p-\varepsilon)}{(p+1)^2} < 0.$$

因此结论成立.

注 2 (1) 以下 2 个不等式等价:

$$(i) \quad \mathfrak{I}(p, \varepsilon, \tau) = \tau^4 - \frac{32(p-\varepsilon)}{p+1} \tau^2 + \\ \frac{32(p-\varepsilon)(p+3)}{(p+1)^2} \tau - \frac{64(p-\varepsilon)}{(p+1)^2} < 0.$$

$$(ii) \quad \mathfrak{H}(p, \varepsilon, \varsigma) = \varsigma^4 - 32(p-\varepsilon) \times \\ \left[\frac{(p+1)}{(p-1)^2} \varsigma^2 - \frac{(p+1)(p+3)}{(p-1)^3} \varsigma + \right. \\ \left. \frac{2(p+1)^2}{(p-1)^4} \right] < 0.$$

(2) 对任意 $\varepsilon > 0$, 不等式 $\mathfrak{I}(p, \varepsilon, \tau) > \mathfrak{I}(p, 0, \tau)$

和 $\mathfrak{H}(p, \varepsilon, \varsigma) > \mathfrak{H}(p, 0, \varsigma)$ 成立.

注 3 文献[9]中注 3.2 表明, $\forall \tau \in (2t_0^+, \tau_0)$, 有 $\mathfrak{I}(p, \varepsilon, \tau) < 0$ 和 $\mathfrak{I}(p, \varepsilon, 2t_0^-) < 0$. 这里,

$$t_0^+ := \sqrt{\frac{2p}{p+1}} + \sqrt{\frac{2p}{p+1} - \sqrt{\frac{2p}{p+1}}}, \\ t_0^- := \sqrt{\frac{2p}{p+1}} - \sqrt{\frac{2p}{p+1} - \sqrt{\frac{2p}{p+1}}}.$$

因此对任意 $\tau \in (2t_0^+, \tau_0)$, 可发现 $\mathfrak{I}(p, \varepsilon, \tau) < 0$ 恒成立.

引理 6 设 $1 \leq \ell < \frac{N}{N-2}$, $2t_0^- < \kappa \leq \tau$ 和引理 5

条件成立, 则存在 $j \in \mathbb{N}^+$, 使得

$$\left(\int_{B_{R_j}} (wv^\kappa)^\ell dx \right)^{\frac{1}{\ell}} \leq CR^{N\left(\frac{1}{\ell}-1\right)} \int_{B_{R_{j+2}}} wv^\kappa dx.$$

证明 设 $z := wv^\kappa$. 引理 2 意味着

$$\left(\int_{B_{R_j}} (wv^\kappa)^\ell dx \right)^{\frac{1}{\ell}} \leq CR^{2+N\left(\frac{1}{\ell}-1\right)} \int_{B_{R_{j+1}}} |\Delta(wv^\kappa)| dx + \\ CR^{N\left(\frac{1}{\ell}-1\right)} \int_{B_{R_{j+1}}} wv^\kappa dx. \quad (19)$$

计算式(19)右边的第 1 项, 可得:

$$\Delta(wv^\kappa) = \Delta wv^\kappa + \kappa(\kappa-1)wv^{\kappa-2} |\nabla v|^2 + \\ \nabla w \nabla(v^\kappa) - \kappa w_2 u^p v^{\kappa-1}, \quad (20)$$

两边积分产生

$$\int_{B_{R_{j+1}}} |\Delta(wv^\kappa)| dx \leq \int_{B_{R_{j+1}}} \Delta wv^\kappa dx + \\ \int_{B_{R_{j+1}}} |\nabla w \nabla(v^\kappa)| dx + \\ \kappa(\kappa-1) \int_{B_{R_{j+1}}} wv^{\kappa-2} |\nabla v|^2 dx + \\ \kappa \int_{B_{R_{j+1}}} w_2 u^p v^{\kappa-1} dx. \quad (21)$$

用 $v^{\kappa-1} \zeta^2$ 乘以系统(A), 并分部积分可得:

$$\int_{\mathbb{R}^N} w_2 u^p v^{\kappa-1} \zeta^2 dx = (\kappa-1) \int_{\mathbb{R}^N} wv^{\kappa-2} |\nabla v|^2 \zeta^2 dx + \\ 2 \int_{\mathbb{R}^N} wv^{\kappa-1} \zeta \nabla v \nabla \zeta dx.$$

取 $\zeta(x) := \Theta\left(\frac{x}{R_{j+1}}\right)$, 其中, $\Theta \in C_0^2(B_2)$, 且在

B_1 中 $\Theta \equiv 1$. 使用 Young 不等式可知

$$\int_{\mathbb{R}^N} wv^{\kappa-1} \zeta |\nabla v \nabla \zeta| dx \leq \\ \frac{\kappa-1}{8} \int_{\mathbb{R}^N} wv^{\kappa-2} |\nabla v|^2 \zeta^2 dx + \\ C \int_{\mathbb{R}^N} wv^\kappa |\nabla \zeta|^2 dx,$$

则联合引理 5 发现

$$\int_{\mathbb{R}^N} wv^{\kappa-2} |\nabla v|^2 \zeta^2 dx \leq \frac{C}{R^2} \int_{B_{R_{j+2}}} wv^\kappa dx \Rightarrow \\ \int_{\mathbb{R}^N} |wv^{\kappa-1} \zeta \nabla v \nabla \zeta| dx \leq \\ \frac{C}{R^2} \int_{B_{R_{j+2}}} wv^\kappa dx. \quad (22)$$

使用式(20)计算式(21)右边的第 1 项可得:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Delta wv^\kappa \zeta^2 dx = \kappa(\kappa-1) \int_{\mathbb{R}^N} wv^{\kappa-2} |\nabla v|^2 \zeta^2 dx - \\ \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w \nabla(v^\kappa) \zeta^2 dx - \kappa \int_{\mathbb{R}^N} w_2 u^p v^{\kappa-1} \zeta^2 dx + \\ 4\kappa \int_{\mathbb{R}^N} wv^{\kappa-1} \zeta \nabla v \nabla \zeta dx + \int_{\mathbb{R}^N} wv^\kappa \Delta(\zeta^2) dx.$$

从引理 5 和式(22)可知

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\Delta wv^\kappa + |\nabla w \nabla(v^\kappa)|] \zeta^2 dx \leq \\ \frac{C}{R^2} \int_{B_{R_{j+2}}} wv^\kappa dx + \\ 2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w \nabla(v^\kappa)| \zeta^2 dx. \quad (23)$$

可以发现

$$\frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^2} w \leq \frac{1}{\delta(N+\delta-2)} \Delta w,$$

再应用 Hölder 不等式意味着

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w \nabla (v^\kappa)| \zeta^2 dx &= \\ \delta \kappa \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{x \nabla v}{1+|x|^2} w v^{\kappa-1} \zeta^2 \right| dx &\leq \\ \frac{\delta \kappa}{\sqrt{\delta(N+\delta-2)}} \left(\frac{C}{R^2} \int_{B_{R_{j+2}}} w v^\kappa dx \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ \left(\int_{\mathbb{R}^N} \Delta w v^\kappa \zeta^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} &:= \mathcal{CAB}. \end{aligned}$$

记

$$\mathcal{C} := \frac{\delta \kappa}{\sqrt{\delta(N+\delta-2)}},$$

$$\mathcal{A}^2 := \frac{C}{R^2} \int_{B_{R_{j+2}}} w v^\kappa dx,$$

$$\mathcal{B}^2 := \int_{\mathbb{R}^N} \Delta w v^\kappa \zeta^2 dx.$$

则代入式(23)可得 $\mathcal{B}^2 \leq 2\mathcal{CAB} + \mathcal{A}^2$, 解得 $\mathcal{B} \leq (2\mathcal{C}+1)\mathcal{A}$. 即有

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \Delta w v^\kappa \zeta^2 dx &\leq \frac{C}{R^2} \int_{B_{R_{j+2}}} w v^\kappa dx \Rightarrow \\ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w \nabla (v^\kappa)| \zeta^2 dx &\leq \frac{C}{R^2} \int_{B_{R_{j+2}}} w v^\kappa dx. \end{aligned}$$

从而联合式(22)代入式(21)可得:

$$\int_{B_{R_{j+1}}} |\Delta(w v^\kappa)| dx \leq \frac{C}{R^2} \int_{B_{R_{j+2}}} w v^\kappa dx,$$

代入式(19)可知结论成立.

引理 7 设 $2t_0^- < \kappa \leq 2$, $\kappa \leq \ell < \frac{N}{N-2}\tau$ 和引理 5 条件成立, 则存在 $C < +\infty$ 和整数 $n \geq 1$, 使得对所有的 $R > 1$, 有

$$\left(\int_{B_R} (w^\kappa v)^\ell dx \right)^{\frac{1}{\ell}} \leq C R^{N\left(\frac{1}{\ell} - \frac{1}{\kappa}\right)} \left(\int_{B_{R_{3^n}}} (w^\kappa v)^\kappa dx \right)^{\frac{1}{\kappa}}.$$

证明 由注 2 和注 3, 选择 κ_1 和 $\{\ell_n\}$ 使得 $2t_0^- < \kappa_1 < 2$, $1 \leq \ell_n < \frac{N}{N-2}$, 定义 $\kappa_{n+1} := \kappa_n \ell_n$, 且有 $\kappa_{n+1} < \tau$. 则对所有的 $R \geq 1$ 和正整数 $n > 1$, 由引理 6 可知:

$$\begin{aligned} \left(\int_{B_R} (w^{\kappa_1} v)^{\kappa_1 \ell_1} dx \right)^{\frac{1}{\kappa_1 \ell_1}} &\leq \\ C R^{N\left(\frac{1}{\kappa_1 \ell_1} - \frac{1}{\kappa_1}\right)} \left(\int_{B_{R_3}} (w^{\kappa_1} v)^{\kappa_1} dx \right)^{\frac{1}{\kappa_1}} & \\ \vdots & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\int_{B_{R_{3^{n-1}}}} (w^{\kappa_1} v)^{\kappa_n \ell_n} dx \right)^{\frac{1}{\kappa_n \ell_n}} &\leq \\ C R^{N\left(\frac{1}{\kappa_n \ell_n} - \frac{1}{\kappa_n}\right)} \left(\int_{B_{R_{3^n}}} (w^{\kappa_1} v)^{\kappa_n} dx \right)^{\frac{1}{\kappa_n}} & \end{aligned}$$

从而形成一个伸缩序列, 则进行迭代运算可得:

$$\begin{aligned} \left(\int_{B_R} (w^{\kappa_1} v)^{\kappa_n \ell_n} dx \right)^{\frac{1}{\kappa_n \ell_n}} &\leq \\ C R^{N\left(\frac{1}{\kappa_n \ell_n} - \frac{1}{\kappa_1}\right)} \left(\int_{B_{R_{3^n}}} w v^{\kappa_1} dx \right)^{\frac{1}{\kappa_1}} &. \end{aligned} \quad (24)$$

选择适当的序列 $\{\ell_n\}$, 使得 $\kappa_n \ell_n \rightarrow \frac{N\tau}{N-2}$. 从

注 3 可知, 选取 $\kappa = \kappa_1 \in (2t_0^-, 2)$, 使得 $\Im(p, \varepsilon, \kappa) < 0$ 成立. 因此对于任意的 $R \geq 1$, 从式(24)可以推出结论正确.

定理 1 的证明 选择 $\kappa < 2$, 且趋近于 2, 由引理 7 可知:

$$\left(\int_{B_R} (w^\kappa v)^\ell dx \right)^{\frac{1}{\ell}} \leq C R^{N\left(\frac{1}{\ell} - \frac{1}{\kappa}\right)} \left(\int_{B_{R_{3^n}}} (w^\kappa v)^\kappa dx \right)^{\frac{1}{\kappa}}.$$

情形 I $\alpha \leq \delta$. 对所有的 $R > 1$, 由引理 2 和使用 Hölder 不等式可得:

$$\begin{aligned} \left(\int_{B_{R_{3^n}}} w v^\kappa dx \right)^{\frac{1}{\ell}} &\leq \left(\int_{B_{R_{3^n}}} w_1 v^2 dx \right)^{\frac{\kappa}{2\ell}} \times \\ \left(\int_{B_{R_{3^n}}} w_1^{\frac{\kappa}{\kappa-2}} w^{\frac{2}{2-\kappa}} dx \right)^{\frac{2-\kappa}{2\ell}} &\leq \\ C R^{N\left(\frac{1}{\ell} - \frac{1}{\kappa}\right) + \frac{1}{\kappa} N - \frac{1}{2} \left[\frac{2\beta + 4(p+1) + 2p\alpha - (3p+1)\delta}{p-1} \right]} &. \end{aligned} \quad (25)$$

记:

$$\tau := \frac{p-1}{p+1} \zeta,$$

由定理 1 的假设(i)可知:

$$N < \frac{2\beta + 4(p+1) + 2p\alpha - (3p+1)\delta}{p-1} \frac{N\tau}{N-2}.$$

取

$$\ell \rightarrow \frac{N\tau}{N-2},$$

则有

$$N < \frac{2\beta + 4(p+1) + 2p\alpha - (3p+1)\delta}{p-1} \frac{\ell}{2}.$$

从而可以推出:

$$N\left(\frac{1}{\ell} - \frac{1}{\kappa}\right) + \frac{1}{\kappa}N - \frac{1}{2}\left[\frac{2\beta + 4(p+1) + 2p\alpha - (3p+1)\delta}{p-1}\right] < 0.$$

则代入式(25)可知, 当 $R \rightarrow +\infty$ 时, 有

$$\int_{B_R} wv^\kappa dx = 0,$$

即可得 $v \equiv 0$, 矛盾.

情形 II $\alpha > \delta$. 类似于以上的讨论, 对所有的 $R > 1$, 有

$$\left(\int_{B_{R_3^n}} wv^\kappa dx\right)^{\frac{1}{\ell}} \leq CR^{\frac{N}{\ell} - \frac{1}{2}\left[\frac{2\beta + (p+1)(4+\alpha-2\delta)}{p-1}\right]}.$$

$$\text{记 } \tau := \frac{p-1}{p+1}\varsigma,$$

则由定理 1 的条件(ii), 有

$$N < \frac{2\beta + (p+1)(4+\alpha-2\delta)}{p-1} \frac{N\tau}{N-2}.$$

选取

$$\ell \rightarrow \frac{N\tau}{N-2},$$

则

$$\frac{N}{\ell} - \frac{1}{2}\left[\frac{2\beta + (p+1)(4+\alpha-2\delta)}{p-1}\right] < 0,$$

类似于情形 I 可知结论成立.

3 定理 2 的证明

下面设条件(H2)总成立. 类似于引理 4、引理 5 和引理 7 的证明可得:

引理 8 设 (u, v) 是椭圆系统(A)的稳定正解. 则有

$$\frac{u^{p+1}}{p+1} \leq \frac{v^2}{2}, x \in \mathbb{R}^N.$$

引理 9 设 (u, v) 是椭圆系统(A)的稳定正解, 则对于任意的 $\tau > 2$ 和 $R > 1$, 有

$$\int_{B_{R_j}} w_1 u^p v^{\tau-1} dx \leq \frac{C}{R^2} \int_{B_{R_{j+1}}} wv^\tau dx,$$

这里的 τ 满足:

$$\mathfrak{I}(p, \tau) = \tau^4 - \frac{32p}{p+1}\tau^2 + \frac{32p(p+3)}{(p+1)^2}\tau - \frac{64p}{(p+1)^2} < 0.$$

引理 10 设 $2t_0^- < \kappa < 2$, $\kappa \leq \ell < \frac{N}{N-2}\tau$ 和引

理 9 的条件成立. 则存在一个 $C < +\infty$ 和整数 $n \geq 1$, 使得对所有的 $R > 1$, 有

$$\left(\int_{B_R} (w^\kappa v)^\ell dx\right)^{\frac{1}{\ell}} \leq CR^{N\left(\frac{1}{\ell} - \frac{1}{\kappa}\right)} \left(\int_{B_{R_3^n}} wv^\kappa dx\right)^{\frac{1}{\kappa}}.$$

定理 2 的证明分两种情况进行讨论.

情形 I $\alpha \leq \delta$. 对任意的 $R > 1$, 由引理 2 和 Hölder 不等式可得

$$\left(\int_{B_{R_3^n}} wv^\kappa dx\right)^{\frac{1}{\ell}} \leq CR^{\frac{N}{\ell} - \frac{1}{2}\left[\frac{(p+1)(4+2\alpha) - (3p+1)\delta}{p-1}\right]}. \quad (26)$$

$$\text{记 } \tau := \frac{(p-1)(k-2)}{2(p+1)},$$

则由定理 2 的条件(i)发现

$$N < 2 + \frac{(p+1)(4+2\alpha) - (3p+1)\delta}{p-1} \tau,$$

选取 ℓ 小于且趋近于 $\frac{N\tau}{N-2}$, 从而有

$$\frac{N}{\ell} - \frac{1}{2}\left[\frac{(p+1)(4+2\alpha) - (3p+1)\delta}{p-1}\right] < 0,$$

则从(26)式可知, 当 $R \rightarrow +\infty$ 时, 有 $\int_{B_R} wv^k dx = 0$, 因此有 $v \equiv 0$, 矛盾.

情形 II $\alpha > \delta$. 对所有的 $R > 1$, 类似于情形 I 可得:

$$\left(\int_{B_{R_3^n}} wv^\kappa dx\right)^{\frac{1}{\ell}} \leq CR^{\frac{N}{\ell} - \frac{1}{2}\left[\frac{2\alpha + (p+1)(4+\alpha-2\delta)}{p-1}\right]}.$$

$$\text{记 } \tau := \frac{(p-1)(k-2)}{2(p+1)},$$

选取 ℓ 小于且趋近于 $\frac{N\tau}{N-2}$, 则由定理 2 的条件(ii)可知:

$$\frac{N}{\ell} - \frac{1}{2}\left[\frac{(p+1)(4+2\alpha) - (3p+1)\delta}{p-1}\right] < 0,$$

从而容易推出结论成立.

参考文献:

- [1] Bahri A, Lions P L. Solutions of superlinear elliptic equations and their Morse indices[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1992, 45(9):1205-1215.
- [2] Farina A. On the classification of solutions of the Lane-Emden equation on unbounded domains of $\mathbb{R}^N$ [J]. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 2007,

- 87(5):537-561.
- [3] Dávila J, Dupaigne L, Wang K L, et al. A monotonicity formula and a Liouville-type theorem for a fourth order supercritical problem[J]. *Advances in Mathematics*, 2014, 258:240-285.
- [4] Cowan C, Fazly M. On stable entire solutions of semilinear elliptic equations with weights[J]. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2011, 140(6):2003-2012.
- [5] Duong A T, Nguyen V H. Liouville type theorems for some fractional elliptic problems[J]. *Nonlinear Analysis*, 2021, 210:112383.
- [6] Cowan C, Ghoussoub N. Regularity of semi-stable solutions to fourth order nonlinear eigenvalue problems on general domains[J]. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 2014, 49(1/2):291-305.
- [7] Dupaigne L, Ghergu M, Goubet O, et al. The Gel'fand problem for the biharmonic operator[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2013, 208(3):725-752.
- [8] Hu L G. Liouville type results for semi-stable solutions of the weighted Lane-Emden system[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2015, 432(1): 429-440.
- [9] Hu L G, Zeng J. Liouville type theorems for stable solutions of the weighted elliptic system[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2016, 437(2): 882-901.
- [10] Hajlaoui H, Harrabi A, Mtiri F, et al. Liouville theorems for stable solutions of the weighted Lane-Emden system [J]. *Discrete & Continuous Dynamical Systems: A*, 2017, 37(1):265-279.
- [11] Mtiri F. Liouville type theorems for stable solutions of elliptic system involving the Grushin operator[J]. *Communications on Pure & Applied Analysis*, 2022, 21(2):541-553.
- [12] Cowan C. Liouville theorems for stable Lane-Emden systems and biharmonic problems[J]. *Nonlinearity*, 2013, 26(8):2357-2371.
- [13] Montenegro M. Minimal solutions for a class of elliptic systems[J]. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 2005, 37(3):405-416.
- [14] Souplet P. The proof of the Lane-Emden conjecture in four space dimensions[J]. *Advances in Mathematics*, 2009, 221(5):1409-1427.

Liouville type theorems for stable solutions of semilinear elliptic system with weights

GAN Yiqing, HU Lianggen*

(School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: In this paper, we study the following semilinear elliptic system with weights

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(w(x)\nabla u) = w_1 v, \\ -\operatorname{div}(w(x)\nabla v) = w_2 u^p, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

where $p > 1$, $w(x)$, $w_1(x)$ and $w_2(x)$ are nonnegative continuous functions. For the two cases $w_1 \neq w_2$ and $w_1 \equiv w_2$, it is proved that there is no stable positive solutions for the elliptic system when the exponent p belongs to the subcritical, critical and supercritical partial intervals.

Key words: stable solutions; Liouville type theorem; weights; iteration

(责任编辑 章践立)