

一种证明二次有理 Bézier 曲线曲率分布特征的新方法

王亚丽, 徐晨东*

(宁波大学 数学与统计学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 本文给出了一种证明二次有理 Bézier 曲线曲率分布特征的新方法. 该方法主要通过利用圆锥曲线的几何特征, 得到圆锥曲线段的对称轴方程; 并基于控制顶点和对称轴的位置, 给出了二次有理 Bézier 曲线的曲率分布特征定理. 这个方法与其他学者提出的方法相比更简单, 更容易理解.

关键词: 圆锥曲线; 二次有理 Bézier 曲线; 曲率

中图分类号: O187.1

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2023) 02-0082-08

圆锥曲线在几何造型设计中具有重要的作用. 在 CAGD 领域, 通常用 Bernstein-Bézier 形式来表示圆锥曲线, 很多学者关于这方面做了大量的研究. 1987 年, 基于圆锥曲线的性质, Lee^[1]提出可以采用二次有理 Bézier 曲线来表示圆锥曲线, 并给出了圆锥曲线的中心、顶点、焦点等公式. 2011 年, Sánchez-Reyes^[2]通过复杂算法用简单的方式计算了圆锥曲线段的几何特征. 同年, Cantón 等^[3]得到了控制多边形和权值给定的圆锥曲线段的几何特征的计算.

曲率是曲线和曲面最重要的几何特征之一, 在几何造型中有着广泛应用, 例如形状描述、字符识别、过山车轨道设计和公路设计等方面. 鉴于曲率的重要性, 众多人员对此也做了研究. 1992 年, Sapidis 等^[4]研究了有理 Bézier 曲线曲率单调性的充分必要条件. 1998 年, Ahn 等^[5]利用圆锥曲线的对称性以及曲线细分的性质研究了对称和非对称二次有理 Bézier 曲线曲率的极值特征. 1999 年, Suenaga 等^[6]利用微分性质和笛卡尔规则给出了标准二次有理 Bézier 曲线曲率单调或有局部极值的充分必要条件. 2000 年, Frey 等^[7]分析了用标准二次有理 Bézier 曲线表示的圆锥曲线曲率的分布, 并指出如果曲线的端点和权值固定, 则圆锥曲线曲率单调的充要条件是中间的控制顶点位于通过圆

弧定义的边界内; 如果控制边夹角小于等于 90° , 则能求出曲率严格单调的权值. 同年, 王玉林等^[8]也研究了二次有理 Bézier 曲线曲率的单调条件, 得到了与 Frey 相同的结果, 并得出有理 Bézier 曲线比 Bézier 曲线曲率单调条件具有更大的自由度. 2003 年, 王玉林等^[9]将曲线曲率单调的判别式转化为 Bernstein-Bézier 形式, 并利用 Bernstein 基的正单位分解性给出了一般平面有理 Bézier 曲线曲率单调的充分条件. 2004 年, Wang 等^[10]又给出了 3 次有理 Bézier 曲线和 n 次有理 Bézier 曲线曲率单调的充分条件.

1 圆锥曲线的几何特征

圆锥曲线段 $P(t)$ 是一条标准的二次有理 Bézier 曲线,

$$P(t) = \frac{P_0 B_0^2(t) + \omega P_1 B_1^2(t) + P_2 B_2^2(t)}{B_0^2(t) + \omega B_1^2(t) + B_2^2(t)}, t \in [0, 1], (1)$$

其中, $P_0, P_1, P_2 \in R^2$ 为曲线的控制顶点, $\omega \in R$ 为控制顶点 P_1 的权因子, $B_i^n(t)$ 为 n 次 Bernstein 基函数:

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, i = 0, 1, \dots, n.$$

对于控制顶点 P_1 的权因子 ω : 当 $0 < \omega < 1$ 时, 圆锥曲线为椭圆; 当 $\omega = 1$ 时, 圆锥曲线为抛物线; 当 $\omega > 1$ 时, 圆锥曲线为双曲线.

收稿日期: 2022-02-16.

宁波大学学报(理工版) 网址: <http://journal.lg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金 (11101230, 11371209).

第一作者: 王亚丽 (1990-), 女, 河南洛阳人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 计算几何. E-mail: 18892614929@163.com

*通信作者: 徐晨东 (1977-), 男, 浙江慈溪人, 博士/副教授, 主要研究方向: 计算几何. E-mail: xuchendong@nbu.edu.cn

对于文献[1], 设 $U = P_0 - P_1, V = P_2 - P_1$. 相似的符号在下文中被采用:

$$\begin{cases} k = \frac{1}{4\omega^2}, \varepsilon = \frac{2k}{4k-1}, \alpha = |U|^2, \\ \beta = U \times V, \gamma = |V|^2, \\ \phi = \alpha\gamma - \beta^2 = |U \times V|^2, \psi = \alpha + \gamma + 2\beta = \\ |U + V|^2, \\ \sigma = \alpha + \gamma - 2\beta = |U - V|^2. \end{cases} \quad (2)$$

当该曲线段为抛物线时, 其焦点 F 和顶点 X 分别为:

$$F = P_1 + \frac{\gamma U + \alpha V}{\psi},$$

$$X = P_1 + \left(\frac{\gamma + \beta}{\psi} \right)^2 U + \left(\frac{\alpha + \beta}{\psi} \right)^2 V.$$

当该曲线段为椭圆或双曲线时, 则它们的中心 C 为:

$$C = P_1 + \frac{2k}{4k-1}(U + V).$$

双曲线实轴和椭圆长轴上顶点为:

$$X_{1,2} = P_1 + (\varepsilon \pm d_1 x_0)U + (\varepsilon \pm d_1 y_0)V.$$

双曲线虚轴和椭圆短轴上顶点为:

$$X_{3,4} = P_1 + (\varepsilon \pm d_2 x_0)U + (\varepsilon \pm d_2 y_0)V.$$

其中,

$$x_0 = (\beta\lambda_1 - 2k + 1) / \left(\alpha(\beta\lambda_1 - 2k + 1)^2 + \right. \\ \left. 2\beta(\beta\lambda_1 - 2k + 1)(2k - \alpha\lambda_1) + \right. \\ \left. \gamma(2k - \alpha\lambda_1)^2 \right)^{1/2},$$

$$y_0 = (2k - \alpha\lambda_1) / \left(\alpha(\beta\lambda_1 - 2k + 1)^2 + \right. \\ \left. 2\beta(\beta\lambda_1 - 2k + 1)(2k - \alpha\lambda_1) + \right. \\ \left. \gamma(2k - \alpha\lambda_1)^2 \right)^{1/2}.$$

$d_i = \sqrt{\varepsilon / \lambda_i}, i = 1, 2$, 其中, d_1 为双曲线实半轴或椭圆长半轴的长, d_2 为双曲线虚半轴或椭圆短半轴的长. λ_i 是特征方程(3)式的根. 当 $\omega > 1$ 时, $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$; 当 $0 < \omega < 1$ 时, $0 < \lambda_1 < \lambda_2$.

$$\phi\lambda^2 - 2(k\sigma + \beta)\lambda + (4k + 1) = 0. \quad (3)$$

2 曲率变化特征定理的证明

由二次有理 Bézier 曲线的几何不变性和仿射不变性可知, 曲线的形状与坐标系的选择无关. 为计算简单, 将控制顶点 P_0 看作坐标原点, P_1 位于 x

轴上, 则二次有理 Bézier 曲线的控制顶点为: $P_0 = (0, 0), P_1 = (u, v), P_2 = (-1, 0)$, 所以圆锥曲线的形状取决于控制顶点 P_1 和它的权值 ω , 从而二次有理 Bézier 曲线的曲率也是由控制顶点 P_1 和它的权值 ω 决定. 因为二次有理 Bézier 曲线具有对称性, 直线 $x = -1/2$ 是控制顶点 P_0 和 P_2 的对称轴, 所以假定 $u < -1/2$. 又因为二次有理 Bézier 曲线的控制顶点是不共线的, 所以不妨假设 $v > 0$.

则 $U = (-u, -v), V = (-1 - u, -v)$. (2)式中,

$$\begin{cases} \alpha = u^2 + v^2, \beta = u(1 + u) + v^2, \gamma = (1 + u)^2 + v^2, \\ \phi = v^2, \psi = (1 + 2u)^2 + 4v^2, \sigma = 1. \end{cases}$$

2.1 抛物线段的曲率分布定理

当 $\omega = 0$ 时, 二次有理 Bézier 曲线 $P(t)$ 是抛物曲线段, 则抛物线的焦点 F 和顶点 X 如下:

$$F = \left(\frac{u^2(1 + 2u) + v^2(2u - 1)}{(1 + 2u)^2 + 4v^2}, \frac{2v(u + u^2 + v^2)}{(1 + 2u)^2 + 4v^2} \right),$$

$$X = \left(\frac{(u + 2u^2 + 2v^2)(u(1 + 2u)^2 - 2v^2(1 - 2u))}{((1 + 2u)^2 + 4v^2)^2}, \right. \\ \left. \frac{2v(u + 2u^2 + 2v^2)(1 + u(2u + 3) + 2v^2)}{((1 + 2u)^2 + 4v^2)^2} \right).$$

所以穿过抛物线焦点和顶点的直线方程为:

$$y = \frac{2v}{1 + 2u}x + \frac{2v(u + 2u^2 + 2v^2)}{(1 + 2u)((1 + 2u)^2 + 4v^2)}. \quad (4)$$

将式(4)化为隐式形式: $f_1(x, y) = 0$.

其中,

$$f_1(x, y) = y - \frac{2v}{1 + 2u}x - \frac{2v(u + 2u^2 + 2v^2)}{(1 + 2u)((1 + 2u)^2 + 4v^2)},$$

则

$$f_1(P_0) = -\frac{2v(u + 2u^2 + 2v^2)}{(1 + 2u)((1 + 2u)^2 + 4v^2)},$$

$$f_1(P_1) = -\frac{v}{(1 + 2u)^2 + 4v^2},$$

$$f_1(P_2) = -\frac{2v(1 + 3u + 2u^2 + 2v^2)}{(1 + 2u)((1 + 2u)^2 + 4v^2)}.$$

当 $f_1(P_0) > 0, f_1(P_2) > 0$ 时, $|f_1(P_0)| - |f_1(P_2)| = -2v / (1 + 2u) > 0$, 所以 P_0 到直线式(4)的距离恒大于 P_2 到该直线的距离.

当 $u \in (-1, -1/2)$, $v \in (0, v_0)$ 时, $f_1(P_0) > 0, f_1(P_1) > 0, f_1(P_2) > 0$, 所以 P_0, P_1, P_2 都位于直线式

(4)同侧, 且 P_0 到直线式(4)的距离恒大于 P_2 到该直线的距离. 则二次有理 Bézier 曲线 $P(t)$ 的曲率是单调递增; 当 $u \in (-\infty, -1], v \in (0, +\infty)$ 或 $u \in (-1, -1/2), v \in (v_0, +\infty)$ 时, $f_1(P_0) > 0, f_1(P_1) > 0, f_1(P_2) < 0$. 所以 P_0, P_1 位于直线式(4)一侧, P_2 在该直线另一侧, 则二次有理 Bézier 曲线 $P(t)$ 的曲率有极大值.

为表述方便, 定义:

$$D = \{(u, v) | u < -1/2\},$$

$$D_1 = \{(u, v) | -1 < u < -1/2\},$$

$$D_2 = \{(u, v) | 2u^2 + 2v^2 + 3u + 1 < 0\}.$$

如图 1 所示, 则由上述的推导可得定理 1.

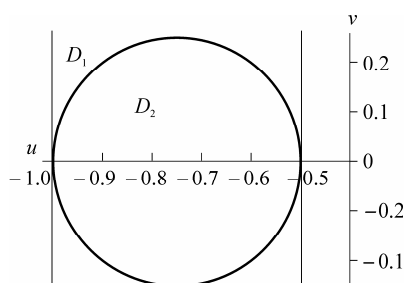


图 1 当 $\omega=1$ 时, 区域 D_1, D_2 的示意图

定理 1 对二次有理 Bézier 曲线段 $P(t)$, 若 $\omega=1$,

(1)当 $(u, v) \in D_2$ 时, 二次有理 Bézier 曲线段 $P(t)$ 的曲率是单调递增;

(2)当 $(u, v) \in (D - D_1)$ 或 $(u, v) \in (D_1 - D_2)$ 时, 二次有理 Bézier 曲线段 $P(t)$ 的曲率有极大值.

2.2 双曲线的曲率分布定理

当 $\omega > 1$ 时, 二次有理 Bézier 曲线段 $P(t)$ 是双曲线, 则双曲线的中心坐标 C 为:

$$C = \left(\frac{1+2u\omega^2}{2(\omega^2-1)}, \frac{v\omega^2}{\omega^2-1} \right).$$

下求双曲线的顶点坐标, 把 $k, \beta, \varphi, \sigma$ 的值代入式(3), 可得:

$$4\omega^2 v^2 \lambda^2 - 2(1+4\omega^2 u(1+u)+4\omega^2 v^2)\lambda + 4(1-\omega^2) = 0.$$

由求根公式可得:

$$\lambda_i = \frac{1+4u\omega^2+4u^2\omega^2+4v^2\omega^2 \pm m}{4v^2\omega^2}, i=1, 2,$$

其中,

$$m = (16v^2\omega^2(\omega^2-1) + (1+4u\omega^2+4u^2\omega^2+4v^2\omega^2)^2)^{1/2}.$$

则双曲线实轴上的顶点为:

$$X_{1,2} = (u, v) + (\varepsilon \pm d_1 x_0)(-u, -v) + (\varepsilon \pm d_1 y_0)(-1-u, -v).$$

所以,

$$X_1 - X_2 = (-2d_1 u(x_0 + y_0) - 2d_1 y_0 - 2d_1 v(x_0 + y_0)).$$

设双曲线实轴所在的方程为 $y = k_1 x + b_1$, 则

$$k_1 = \frac{-2d_1 v(x_0 + y_0)}{-2d_1 u(x_0 + y_0) - 2d_1 y_0} = \frac{-1 - 4\omega^2(u + u^2 - v^2) + m}{4v\omega^2(1+2u)},$$

$$b_1 = \frac{n - (1+2u\omega^2)m}{8v\omega^2(\omega^2-1)(1+2u)},$$

其中,

$$n = 1 + 2\omega^2(3u + 2u^2 - 2v^2) + 8\omega^4(u^3 + u^2 + uv^2 + v^2).$$

所以双曲线实轴所在的直线方程为:

$$y = \frac{-1 - 4\omega^2(u + u^2 - v^2) + m}{4v\omega^2(1+2u)}x + \frac{n - (1+2u\omega^2)m}{8v\omega^2(\omega^2-1)(1+2u)},$$

化为隐式形式 $f_2(x, y) = 0$. 其中,

$$f_2(x, y) = y + \frac{1 + 4\omega^2(u + u^2 - v^2) - m}{4v\omega^2(1+2u)}x -$$

$$\frac{n - (1+2u\omega^2)m}{8v\omega^2(\omega^2-1)(1+2u)}, \quad (5)$$

则

$$f_2(P_0) = -\frac{n - (1+2u\omega^2)m}{8v\omega^2(\omega^2-1)(1+2u)},$$

$$f_2(P_1) = -\frac{1 + 4\omega^2(u + u^2 - v^2) - m}{8v\omega^2(\omega^2-1)},$$

$$f_2(P_2) = (1 + 2\omega^2(u + 2u^2 - 2v^2 - 1) - 8u\omega^4((1+u)^2 + v^2) - m(1 - 2(1+u)\omega^2)) / (8v\omega^2(\omega^2-1)(1+2u)).$$

同理, 双曲线虚轴所在直线方程的隐式形式为 $f_2(x, y) = 0$, 其中,

$$f_3(x, y) = y + \frac{1 + 4\omega^2(u + u^2 - v^2) + m}{4v\omega^2(1+2u)}x -$$

$$\frac{n + (1+2u\omega^2)m}{8v\omega^2(\omega^2-1)(1+2u)}, \quad (6)$$

则

$$f_3(P_0) = -\frac{n + (1 + 2u\omega^2)m}{8v\omega^2(\omega^2 - 1)(1 + 2u)},$$

$$f_3(P_1) = -\frac{1 + 4\omega^2(u + u^2 + v^2) + m}{8v\omega^2(\omega^2 - 1)},$$

$$f_3(P_2) = (1 + 2\omega^2(u + 2u^2 - 2v^2 - 1) - 8u\omega^4((1 + u)^2 + v^2) + m(1 - 2(1 + u)\omega^2)) / (8v\omega^2(\omega^2 - 1)(1 + 2u)).$$

当 $f_2(P_0) > 0, f_2(P_2) > 0, f_3(P_0) < 0, f_3(P_2) < 0$ 时,

$$|f_2(P_0)| - |f_2(P_2)| = \frac{1 + 4\omega^2(u + u^2 - v^2) - m}{4v\omega^2(1 + 2u)} > 0,$$

$$|f_3(P_0)| - |f_3(P_2)| = -\frac{1 + 4\omega^2(u + u^2 - v^2) + m}{4v\omega^2(1 + 2u)} > 0,$$

所以, P_0 到实轴距离大于 P_2 到实轴距离, P_0 到虚轴距离大于 P_2 到虚轴距离.

当 $u \in (-1, 1/(2\omega^2) - 1), v \in (0, v_1)$ 时, $f_2(P_0) > 0, f_2(P_1) > 0, f_2(P_2) > 0, f_3(P_0) < 0, f_3(P_1) < 0, f_3(P_2) < 0$, 所以 P_0, P_1, P_2 都位于实轴上方虚轴的右侧, 且 P_0 到实轴距离大于 P_2 到实轴距离, P_0 到虚轴距离大于 P_2 到虚轴距离, 则二次有理 Bézier 曲线段 $P(t)$ 的曲率是单调递增; 当 $u \in (-1, 1/(2\omega^2) - 1), v \in (v_1, +\infty)$ 或 $u \in (-\infty, -1] \cup [1/(2\omega^2) - 1, -1/2], v \in (0, +\infty)$ 时, $f_2(P_0) > 0, f_2(P_1) > 0, f_2(P_2) < 0, f_3(P_0) < 0, f_3(P_1) < 0, f_3(P_2) < 0$, 所以控制顶点 P_0, P_1 位于实轴的上方、虚轴的右侧, P_2 位于实轴的下方、虚轴的右侧, 则二次有理 Bézier 曲线段 $P(t)$ 的曲率有极大值.

为了下文表述方便, 定义:

$$D_3 = \{(u, v) | -1 < u < 1/(2\omega^2) - 1\},$$

$$D_4 = \{(u, v) | 2\omega^2((1 + u)^2 + v^2) - (1 + u) < 0\}.$$

如图 2 所示, 则由上述的推导可得定理 2.

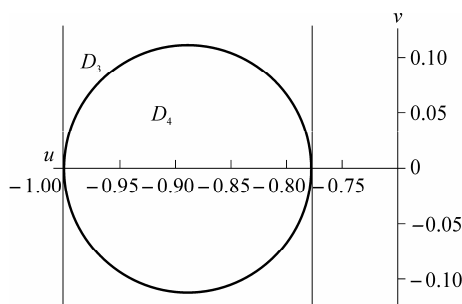


图 2 当 $\omega = 3/2$ 时, 区域 D_3, D_4 的示意图

定理 2 对二次有理 Bézier 曲线段 $P(t)$, 若

$\omega > 1$,

(1) 当 $(u, v) \in D_4$ 时, 二次有理 Bézier 曲线段 $P(t)$ 的曲率是单调递增的;

(2) 当 $(u, v) \in (D - D_3)$ 或 $(u, v) \in (D_3 - D_4)$ 时, 二次有理 Bézier 曲线段 $P(t)$ 的曲率有极大值.

2.3 椭圆的曲率分布定理

当 $0 < \omega < 1$ 时, 二次有理 Bézier 曲线段 $P(t)$ 是椭圆, 椭圆中心和顶点的计算方法与双曲线相同, 由双曲线的计算结果可以得到椭圆长轴所在方程的隐式形式(5)和 $f_2(P_0), f_2(P_1), f_2(P_2)$, 以及椭圆短轴所在直线方程的隐式形式(6)和 $f_3(P_0), f_3(P_1), f_3(P_2)$.

当 $f_2(P_0) > 0, f_2(P_2) > 0, f_3(P_0) > 0, f_3(P_2) > 0$ 时,

$$|f_2(P_0)| - |f_2(P_2)| = \frac{1 + 4\omega^2(u + u^2 - v^2) - m}{4v\omega^2(1 + 2u)} > 0,$$

$$|f_3(P_0)| - |f_3(P_2)| = \frac{1 + 4\omega^2(u + u^2 - v^2) + m}{4v\omega^2(1 + 2u)} < 0.$$

所以 P_0 到长轴的距离大于 P_2 到长轴的距离, P_0 到短轴的距离大于 P_2 到短轴的距离.

当 $u \in (-1, -1/2) \cap (-1/(2\omega^2), -1/2), v \in (0, v_1) \cap (v_2, +\infty)$ 或 $u \in (-1, -1/2) \cap (-\infty, -1/(2\omega^2)], v \in (0, v_1)$ 时, $f_2(P_0) > 0, f_2(P_1) > 0, f_2(P_2) > 0, f_3(P_0) > 0, f_3(P_1) > 0, f_3(P_2) > 0$. 则控制顶点 P_0, P_1, P_2 位于长轴的上方、短轴的左侧, 且 P_0 到长轴的距离大于 P_2 到长轴的距离, P_0 到短轴的距离小于 P_2 到短轴的距离, 所以二次有理 Bézier 曲线段 $P(t)$ 的曲率是单调递增的.

当 $u \in (-1, -1/2) \cap (-1/(2\omega^2), -1/2), v \in (0, v_1) \cap (0, v_2)$ 时, $f_2(P_0) > 0, f_2(P_1) > 0, f_2(P_2) > 0, f_3(P_0) < 0, f_3(P_1) > 0, f_3(P_2) > 0$, 则控制顶点 P_0 位于长轴的上方、短轴的左侧, P_1, P_2 位于长轴的上方、短轴的右侧, 所以二次有理 Bézier 曲线段 $P(t)$ 的曲率有极小值.

当 $u \in (-1, -1/2) \cap (-1/(2\omega^2), -1/2), v \in (v_1, +\infty) \cap (v_2, +\infty)$ 或 $u \in (-1, -1/2) \cap (-\infty, -1/(2\omega^2)], v \in (v_1, +\infty)$ 或 $u \in (-\infty, -1] \cap (-1/(2\omega^2), -1/2), v \in (v_2, +\infty)$ 或 $u \in (-\infty, -1] \cap (-\infty, -1/(2\omega^2)], v \in (0, +\infty)$ 时, $f_2(P_0) > 0, f_2(P_1) > 0, f_2(P_2) < 0, f_3(P_0) > 0, f_3(P_1) > 0, f_3(P_2) > 0$, 则控制顶点 P_0, P_1 位于长轴的上方、短轴的左侧, P_2 位于长轴的下方、短轴的左侧, 所以二次有理 Bézier 曲线段 $P(t)$ 的曲率有极大值.

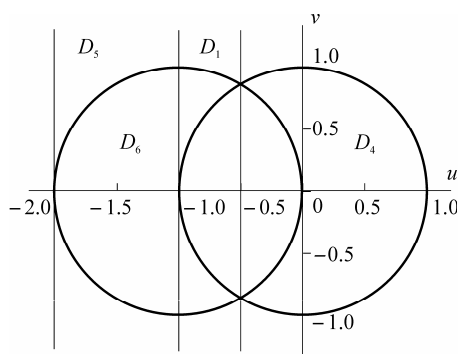
当 $u \in (-1, -1/2) \cap (-1/(2\omega^2), -1/2)$, $v \in (v_1, +\infty) \cap (0, v_2)$ 或 $u \in (-\infty, -1] \cap (-1/(2\omega^2), -1/2]$, $v \in (0, v_2)$ 时, $f_2(P_0) > 0, f_2(P_1) > 0, f_2(P_2) < 0, f_3(P_0) < 0, f_3(P_1) > 0, f_3(P_2) > 0$, 则控制顶点 P_0 位于长轴的上方、短轴的右侧, P_1 位于长轴的上方、短轴的左侧, P_2 位于长轴的下方、短轴的左侧, 所以二次有理 Bézier 曲线段 $P(t)$ 的曲率有极小值.

为了下文表述方便, 定义:

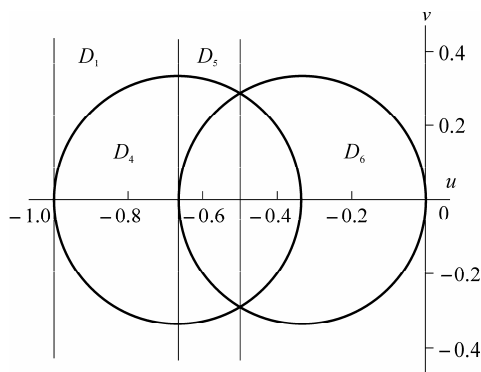
$$D_5 = \{(u, v) | -1/(2\omega^2) < u < -1/2\},$$

$$D_6 = \{(u, v) | 2\omega^2(v^2 + u)^2 + u < 0\}.$$

$(D_6)^c$ 是 D_6 的补集, 如图 3 所示, 则由上述的推导可得定理 3 和定理 4.



(a) $\omega = 1/2$



(b) $\omega = \sqrt{3}/2$

图 3 区域 D_1 、 D_4 、 D_5 、 D_6 的示意图

定理 3 对二次有理 Bézier 曲线段 $P(t)$, 若 $\sqrt{2}/2 \leq \omega < 1$,

(1) 当 $(u, v) \in D_1 \cap D_4 \cap D_6$ 时, 二次有理 Bézier 曲线段 $P(t)$ 的曲率有极小值;

(2) 当 $(u, v) \in (D - D_5)$ 或 $(u, v) \in (D_5 - D_1) \cap (D_6)^c$ 或 $(u, v) \in D_1 \cap (D_4)^c \cap (D_6)^c$ 时, 二次有理 Bézier 曲线段 $P(t)$ 的曲率有极大值;

(3) 当 $(u, v) \in D_1 \cap (D_4)^c \cap D_6$ 或 $(u, v) \in (D_5 -$

$D_1) \cap D_6$ 时, 二次有理 Bézier 曲线段 $P(t)$ 的曲率既有极大值又有极小值.

定理 4 对二次有理 Bézier 曲线段 $P(t)$, 若 $0 < \omega < \sqrt{2}/2$,

(1) 当 $(u, v) \in D_4 \cap D_5 \cap (D_6)^c$ 或 $(u, v) \in (D_1 - D_5) \cap D_4$ 时, 二次有理 Bézier 曲线段 $P(t)$ 的曲率是单调递增的;

(2) 当 $(u, v) \in D_4 \cap D_5 \cap D_6$ 时, 二次有理 Bézier 曲线段 $P(t)$ 的曲率有极小值;

(3) 当 $(u, v) \in (D - D_1)$ 或 $(u, v) \in (D_1 - D_5) \cap (D_4)^c$ 或 $(u, v) \in D_5 \cap (D_4)^c \cap (D_6)^c$ 时, 二次有理 Bézier 曲线段 $P(t)$ 的曲率有极大值.

由上述的定理, 可以得到如下结论:

推论 1 对于 $u = -1/2$, 如果 $4\omega^2(v^2 + 1/4) - 1 = 0$, 则二次有理 Bézier 曲线段 $P(t)$ 是圆弧曲线段.

推论 2 对于 $u = -1/2$, 则二次有理 Bézier 曲线段 $P(t)$ 的曲率有唯一的极大值.

3 实例

为验证所得到的定理, 给出以下实例.

例 1 当 $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (-2/3, 1/5)$, $P_2 = (-1, 0)$, $\omega = 1$ 时, 抛物线焦点和顶点所在直线方程为:

$$y = -\frac{6}{5}x - \frac{408}{305}.$$

抛物曲线段和其曲率分布图如图 4 所示, 因

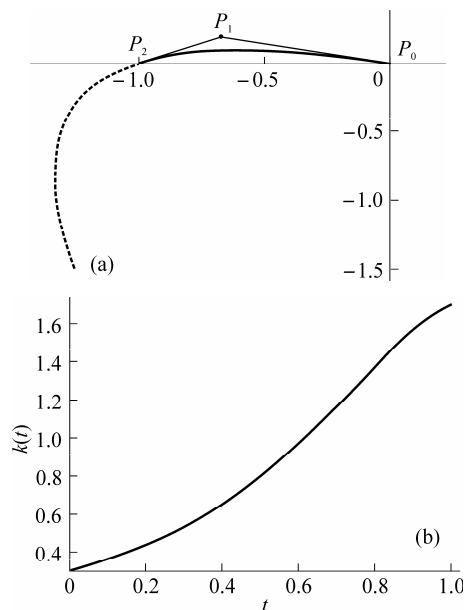


图 4 (a) 当 $u = -3/2, v = 1/5, \omega = 1$ 时, 抛物曲线段;
(b) 抛物曲线段的曲率图

此二次有理 Bézier 曲线的曲率是单调递增.

例 2 当 $P_0 = (0, 0), P_1 = (-2, 2), P_2 = (-1, 0), \omega = 1$ 时, 抛物线的焦点和顶点所在直线方程为:

$$y = -\frac{4}{3}x - \frac{56}{75}.$$

抛物曲线段和其曲率分布图如图 5 所示, 因此二次有理 Bézier 曲线的曲率有极大值.

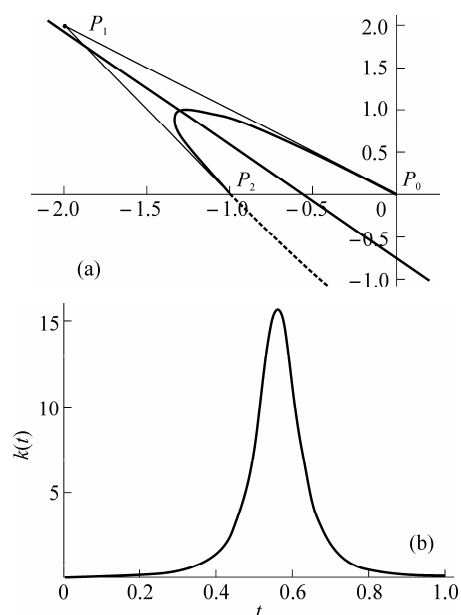


图 5 (a)当 $u = -2, v = 2, \omega = 1$ 时, 抛物曲线段;
(b)抛物曲线段的曲率图

例 3 当 $P_0 = (0, 0), P_1 = (-8/9, 1/10), P_2 = (-1, 0), \omega = 3/2$ 时, 双曲线实轴和虚轴所在直线方程为:

$$y = \frac{19 \pm \sqrt{397261}}{360}x + \frac{227 \pm 2\sqrt{397261}}{1050}.$$

双曲线和其曲率分布图如图 6 所示, 因此二次有理 Bézier 曲线的曲率是单调递增.

例 4 当 $P_0 = (0, 0), P_1 = (-8/9, 1/4), P_2 = (-1, 0), \omega = 3/2$ 时, 双曲线实轴和虚轴所在直线方程为:

$$y = -\frac{1}{252}(65 \pm \sqrt{67729})x - \frac{1}{420}(-59 \pm 2\sqrt{67729}).$$

双曲线和其曲率分布图如图 7 所示, 因此二次有理 Bézier 曲线的曲率有极大值.

例 5 当 $P_0 = (0, 0), P_1 = (-5/6, 1/4), P_2 = (-1, 0), \omega = \sqrt{3}/2$ 时, 椭圆长轴和短轴所在直线方程为:

$$y = -\frac{1}{24}(-19 \pm \sqrt{937})x + \frac{1}{48}(-55 \pm \sqrt{937}).$$

椭圆曲线段和其曲率分布图如图 8 所示, 因此二

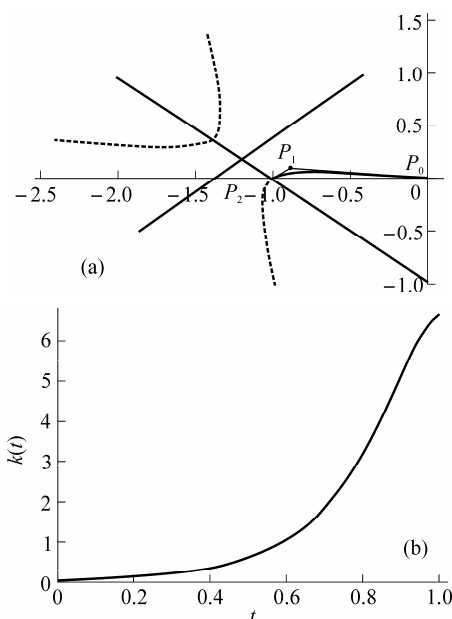


图 6 (a)当 $u = -8/9, v = 1/10, \omega = 3/2$ 时, 双曲线段;
(b)双曲线段的曲率图

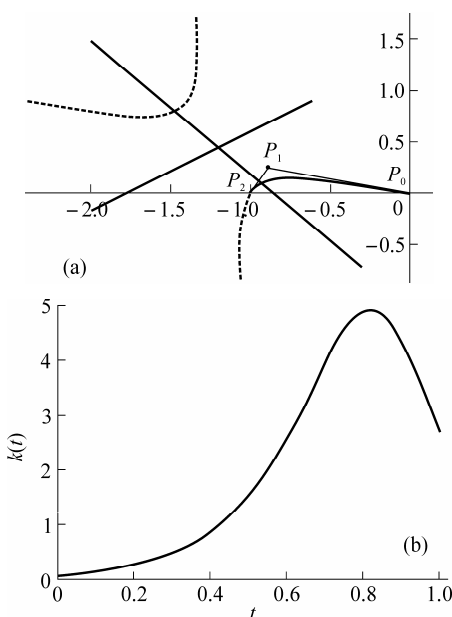


图 7 (a)当 $u = -8/9, v = 1/4, \omega = 3/2$ 时, 双曲线段;
(b)双曲线段的曲率图

次有理 Bézier 曲线的曲率是单调递增的.

例 6 当 $P_0 = (0, 0), P_1 = (-7/12, \sqrt{94}/12), P_2 = (-1, 0), \omega = 1/2$ 时, 椭圆长轴和短轴所在直线方程:

$$y = -\frac{\sqrt{94}}{47}\left(-\frac{15}{4} \pm \frac{\sqrt{601}}{4}\right)x - \frac{\sqrt{94}}{47}\left(-\frac{67}{144} \pm \frac{17\sqrt{601}}{144}\right).$$

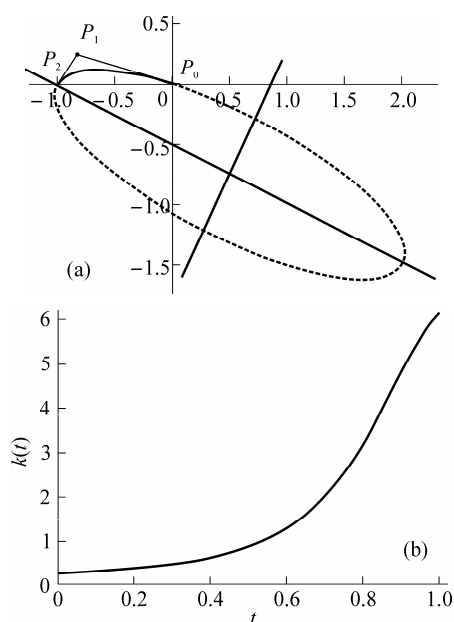


图 8 (a)当 $u = -5/6, v = 1/4, \omega = \sqrt{3}/2$ 时, 椭圆曲线段; (b)椭圆曲线段的曲率图

椭圆线段和其曲率分布图如图 9 所示, 因此二次有理 Bézier 曲线的曲率有极小值.

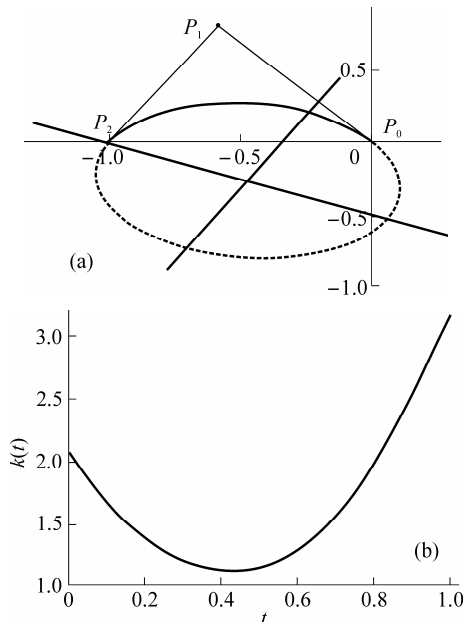


图 9 (a)当 $u = -7/12, v = \sqrt{94}/12, \omega = 1/2$ 时, 椭圆曲线段; (b)椭圆曲线段的曲率图

例 7 当 $P_0 = (0, 0), P_1 = (-3/2, 1), P_2 = (-1, 0), \omega = 1/2$ 时, 椭圆长轴和短轴所在直线方程为:

$$y = -\frac{1}{8}(-3 \pm \sqrt{73})x - \frac{1}{48}(13 \pm \sqrt{73}).$$

椭圆线段和其曲率分布图如图 10 所示, 因此

二次有理 Bézier 曲线的曲率有极大值.

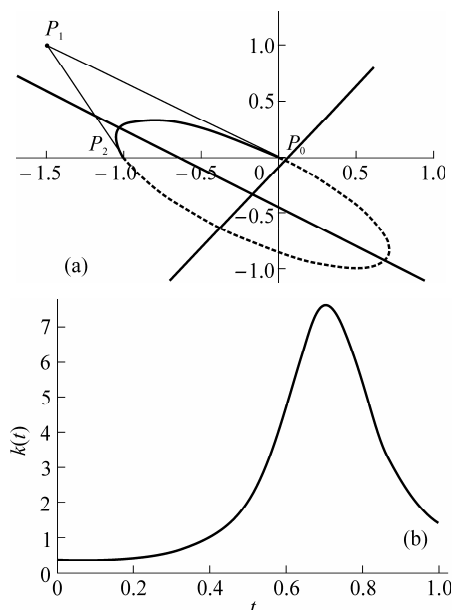


图 10 (a)当 $u = -3/2, v = 1, \omega = 1/2$ 时, 椭圆曲线段; (b)椭圆曲线段的曲率图

例 8 当 $P_0 = (0, 0), P_1 = (-3/2, \sqrt{6}/3), P_2 = (-1, 0), \omega = 1/2$ 时, 椭圆长轴和短轴所在直线方程为:

$$y = -\frac{\sqrt{6}}{6}(-1 \pm \sqrt{7})x - \frac{\sqrt{6}}{27}(1 \pm 2\sqrt{7}).$$

椭圆线段和其曲率分布图如图 11 所示, 因此二次有理 Bézier 曲线的曲率既有极大值, 也有极小值.

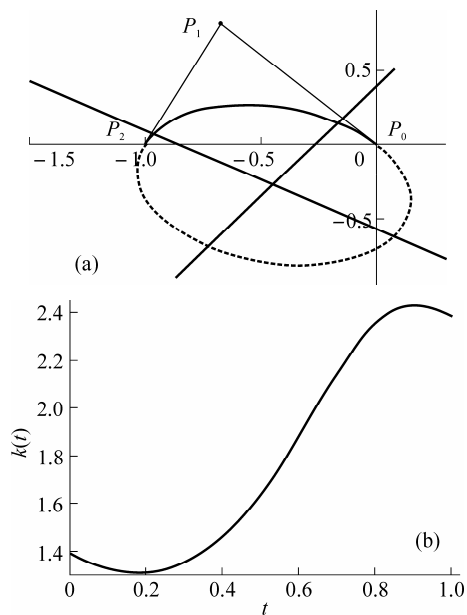


图 11 (a)当 $u = -2/3, v = \sqrt{6}/3, \omega = 1/2$ 时, 椭圆曲线段; (b)椭圆曲线段的曲率图

4 总结

本文利用圆锥曲线的几何特征分析了权值取不同值时, 圆锥曲线曲率变化特征的充分必要条件. Sapidis 等^[4]完全利用代数的方法来证明二次有理 Bézier 曲线曲率的分布特征, Ahn 等^[5]采用代数与图形相结合的方法给出了二次有理 Bézier 曲线曲率变化特征的充分必要条件, 而本文主要借助文献^[1]的结果, 利用圆锥曲线的几何特征给出了二次有理 Bézier 曲线曲率变化特征的充分必要条件. 与前人研究相比, 本文证明过程更加简单、易懂.

参考文献:

- [1] Lee E T Y. The rational Bézier representation for conics[M]//Farin G. Geometric Modeling: Algorithms and New Trends. SIAM, Academic Press, 1987:3-19.
- [2] Sánchez-Reyes J. Simple determination via complex arithmetic of geometric characteristics of Bézier conics[J]. Computer Aided Geometric Design, 2011, 28(6):345-348.
- [3] Cantón A, Fernández-Jambrina L, María E R. Geometric characteristics of conics in Bézier form[J]. Computer-Aided Design, 2011, 43(11):1413-1421.
- [4] Sapidis N S, Frey W H. Controlling the curvature of a quadratic Bézier curves[J]. Computer Aided Geometric Design, 1992, 9(2):85-91.
- [5] Ahn Y J, Kim H O. Curvatures of the quadratic rational Bézier curves[J]. Computers & Mathematics with Applications, 1998, 36(9):71-83.
- [6] Suenaga K, Sakai M. On curvatures of rational quadratic Bézier segments[J]. Reports of the Faculty of Science Kagoshima University, 1999, 32:15-20.
- [7] Frey W H, Field D A. Designing Bézier conic segments with monotone curvature[J]. Computer Aided Geometric Design, 2000, 17(6):457-483.
- [8] 王玉林, 汪叔淳, 李迪, 等. 二次有理 Bézier 曲线曲率单调条件的研究[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2000, 12(7):507-511.
- [9] 王玉林, 汪叔淳, 张鲁邹, 等. 平面有理 Bézier 曲线曲率单调变化的一个充分条件[J]. 山东理工大学学报(自然科学版), 2003, 17(1):51-54.
- [10] Wang Y L, Zhao B Y, Zhang L Z, et al. Designing fair curves using monotone curvature pieces[J]. Computer Aided Geometric Design, 2004, 21(5):515-527.

A geometric proof of curvature distribution theorems of quadratic rational Bézier curves

WANG Yali, XU Chendong*

(School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: A new method for the proof of the curvature distribution theorems of the quadratic rational Bézier curves is presented. With this method, we derive the line equations of symmetric axes of the conic curves by taking advantage of the geometric features of these curves. Based on the relative position relations between the control points and the symmetric axes, the curvature distribution theorems of the quadratic rational Bézier segments are derived. This method proves simpler and easier than those previous ones in terms of expression and comprehension.

Key words: conics; rational quadratic Bézier segment; curvature

(责任编辑 章践立)