

两分量 Novikov 方程的爆破准则和持续性

陈 涵, 严可欣, 蒋先江*

(宁波大学 数学与统计学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 研究了两分量 Novikov 系统柯西问题强解的两大性质, 该类方程组可以看作是 Novikov 方程的推广. 一方面, 利用一维线性运输方程相关性质和 Morse-Type 估计讨论该问题解的精准爆破, 得到新的爆破条件; 另一方面, 利用时频分析理论研究了方程组在 L^p 权重空间上的持续性结论.

关键词: 两分量 Novikov 系统; 柯西问题; 爆破准则; 持续性

中图分类号: O175

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2023) 03-0036-07

本文研究下列两分量 Novikov 系统:

$$\begin{cases} m_t + (u^2 + v^2)m_x + 3(uu_x + vv_x)m + (vu_x - uv_x)n = 0, t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ n_t + (u^2 + v^2)n_x + 3(uu_x + vv_x)n + (uv_x - vu_x)m = 0, t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), v(0, x) = v_0(x), x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1)$$

式中: $m = u - u_{xx}, n = v - v_{xx}$. 这个方程组(1)式最早是由 Li 等^[1]提出, 并证明了该系统包括 Lax 对和双哈密顿系统的可积性. 随后 Qu 等^[2]研究了该系统在 Besov 空间下的局部适定性和解的爆破现象, 并证明在 $\mathbb{S}$ 上存在单尖峰孤立子, 在 $\mathbb{R}$ 上存在单尖峰孤立子解和多尖峰孤立子解. 最近, Wang 等^[3]研究在周期情形下和非周期情形下, 两分量 Novikov 方程系统解对初值的不一致依赖性, 以及该解映射在 Sobolev 空间中的 Hölder 连续性.

当 $v = 0$ 时, 两分量 Novikov 系统(1)式约化成著名的 Novikov 方程:

$$m_t + 3uu_x m + u^2 m_x = 0, m = u - u_{xx}. \quad (2)$$

这个方程最早是由 Novikov^[4]在研究非局部偏微分方程的对称分类中得出的. Novikov 方程具有非常丰富的研究成果, Hone 和 Wang 等^[5-6]证明了其具有双哈密顿结构和无穷守恒律, 并且完全可积. 进一步, 关于方程(2)式在 Besov 空间和 Sobolev 空间的局部适定性、持续性、解的爆破现象和全局

存在性等结论可以参考文献[7-10].

另外一个两分量 Novikov 系统称之为 Geng-Xue 方程:

$$\begin{cases} m_t + uvm_x + 3vu_x m = 0, \\ n_t + uvn_x + 3uv_x n = 0. \end{cases} \quad (3)$$

式(3)是由 Geng 和 Xue 在文献[11]中提出作为 Novikov 两分量推广. Geng-Xue 方程解的爆破现象和持续性问题在文献[12]中被讨论, 关于式(3)的局部适定性、可积性、双哈密顿系统以及解对初值的不一致依赖性等结论可以参考文献[13-16]. 值得一提的是, Geng-Xue 方程和式(1)相比没有 H^1 守恒律.

1 爆破条件

首先, 回忆方程组(1)式的局部适定性结论, 通过 Littlewood-Paley 定理及 Besov 空间定义性质, 得到在 Sobolev 空间上局部适定性的结果如下:

定理 1^[2] 假设 $s > 3/2$, $z_0 = (u_0, v_0) \in H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$, 则存在一个最大生存时间 $T > 0$, 使得初值问题(1)有唯一解 $z = (u, v) \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T]; H^{s-1}(\mathbb{R})) \times C([0, T]; H^s(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T]; H^{s-1}(\mathbb{R}))$, 且解连续依赖于初值.

下面给出 Morse-type 估计和一维运输方程一些常用的引理.

收稿日期: 2022-07-08.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journal.g.nbu.edu.cn/>

基金项目: 浙江省自然科学基金(LY22A010005).

第一作者: 陈涵(1998-), 女, 浙江宁波人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 可积系统. E-mail: 354186140@qq.com

*通信作者: 蒋先江(1976-), 男, 浙江象山人, 讲师, 主要研究方向: 偏微分方程. E-mail: jiangxianjiang@nbu.edu.cn

引理 1^[17]

$$\|fg\|_{H^s} \leq C(\|f\|_{H^s}\|g\|_{L^\infty} + \|g\|_{H^s}\|f\|_{L^\infty}), \quad (4)$$

$$\|f\partial_x g\|_{H^s} \leq C(\|f\|_{H^{s+1}}\|g\|_{L^\infty} + \|\partial_x g\|_{H^s}\|f\|_{L^\infty}). \quad (5)$$

引理 2^[17] 考虑如下线性运输方程的初值问题:

$$\begin{cases} f_t + v f_x = F, \\ f(0, x) = f_0(x). \end{cases} \quad (6)$$

令 $s \in (0, 1)$, 假设 $f_0 \in H^s(\mathbb{R})$, $F \in L^1([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$, $v, v_x \in L^1([0, T]; L^\infty(\mathbb{R}))$, 并且 $f \in L^\infty([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$ 是方程组(6)式的解, 则下列估计成立:

$$\|f(t)\|_{H^s} \leq \|f_0\|_{H^s} + \int_0^t \|F(\tau)\|_{H^s} d\tau + C \int_0^t V'(\tau) \|f(\tau)\|_{H^s} d\tau, \quad (7)$$

$$\|f(t)\|_{H^s} \leq e^{CV(t)} \left(\|f_0\|_{H^s} + \int_0^t e^{-CV(\tau)} \|F(\tau)\|_{H^s} d\tau \right), \quad (8)$$

其中,

$$V(t) = \int_0^t (\|v(\tau)\|_{L^\infty} + \|v_x(\tau)\|_{L^\infty}) d\tau,$$

C 为只依赖于 s 的常数.

在文献[2]中得到已有的爆破结论:

定理 2^[2] 假设 $s > 3/2$, $z_0 = (u_0, v_0) \in H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$, 那么两分量 Novikov 系统柯西问题(1)对应解在有限时间 $T > 0$ 内爆破当且仅当

$$\liminf_{t \rightarrow T} (uu_x + vv_x) = -\infty. \quad (9)$$

本文将进一步研究关于对应解 (m, n) 的爆破条件.

定理 3 假设 $s > 1/2$, $(m_0, n_0) \in H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$, 令 $T > 0$ 是两分量 Novikov 系统柯西问题(1)强解 (m, n) 的最大生存时间. 如果 $T < \infty$, 那么

$$\int_0^T (\|m(t)\|_{L^\infty} + \|n(t)\|_{L^\infty})^2 dt = \infty. \quad (10)$$

证明 对于 $s \in (1/2, 1)$, 利用引理 2 有

$$\|m(t)\|_{H^s} \leq \|m_0\|_{H^s} + C \int_0^t \{-3(uu_x + vv_x)m - (vu_x - uv_x)n\|_{H^s} + U'(\tau) \|m\|_{H^s} d\tau, \quad (11)$$

其中,

$$U(t) = \int_0^t (u^2 + v^2 \|_{L^\infty} + 2 \|uu_x + vv_x\|_{L^\infty}) d\tau.$$

因为 $u = p \times m$, $p(x) = e^{-|x|/2}$, $u_x = \partial_x p \times m$ 以及 $u_{xx} = u - m$, 结合 Young 不等式有

$$\|u\|_{L^\infty}, \|u_x\|_{L^\infty}, \|u_{xx}\|_{L^\infty} \leq C \|m\|_{L^\infty}, \quad (12)$$

$$\|u\|_{H^s}, \|u_x\|_{H^s}, \|u_{xx}\|_{H^s} \leq C \|m\|_{H^s}. \quad (13)$$

同理, $\|v\|_{L^\infty}, \|v_x\|_{L^\infty}, \|v_{xx}\|_{L^\infty} \leq C \|n\|_{L^\infty}$ 和 $\|v\|_{H^s}, \|v_x\|_{H^s}, \|v_{xx}\|_{H^s} \leq C \|n\|_{H^s}$ 成立.

借助上面的估计和引理 1 有

$$\|3(uu_x + vv_x)m + (vu_x - uv_x)n\|_{H^s} \leq C(\|m\|_{L^\infty}^2 + \|n\|_{L^\infty}^2) \|m\|_{H^s} + \|m\|_{L^\infty} \|n\|_{L^\infty} \|n\|_{H^s} \leq$$

$$C(\|m\|_{L^\infty} + \|n\|_{L^\infty})^2 (\|m\|_{H^s} + \|n\|_{H^s}),$$

$$U'(t) = \|u^2 + v^2\|_{L^\infty} + 2 \|uu_x + vv_x\|_{L^\infty} \leq$$

$$C(\|m\|_{L^\infty}^2 + \|n\|_{L^\infty}^2).$$

代入(11)式, 得到

$$\|m(t)\|_{H^s} \leq \|m_0\|_{H^s} + C \int_0^t (\|m\|_{L^\infty} + \|n\|_{L^\infty})^2 (\|m\|_{H^s} + \|n\|_{H^s}) d\tau, \quad (14)$$

同样地,

$$\|n(t)\|_{H^s} \leq \|n_0\|_{H^s} + C \int_0^t (\|m\|_{L^\infty} + \|n\|_{L^\infty})^2 (\|m\|_{H^s} + \|n\|_{H^s}) d\tau. \quad (15)$$

结合式(14)和(15), 应用 Gronwall 不等式得到

$$\|m(t) + n(t)\|_{H^s} \leq \|m_0 + n_0\|_{H^s} e^{C \int_0^t (\|m\|_{L^\infty} + \|n\|_{L^\infty})^2 d\tau}. \quad (16)$$

所以, 如果最大生存时间 $T < \infty$ 满足

$$\int_0^t (\|m\|_{L^\infty} + \|n\|_{L^\infty})^2 d\tau < \infty,$$

可推断出

$$\limsup_{t \rightarrow T} (\|m(t)\|_{H^s} + \|n(t)\|_{H^s}) < \infty$$

和最大生存时间 $T < \infty$ 的假设相矛盾, 即完成了定理 3 中 $s \in (1/2, 1)$ 的部分.

对于 $s \in [1, 2)$, 将方程组(1)中第一个方程关于 x 求导:

$$m_{tx} + (u^2 + v^2)m_{xx} = -5(uu_x + vv_x)m_x - 3(uu_x + vv_x)_x m - ((vu_x - uv_x)n)_x \triangleq R_1(t, x). \quad (17)$$

由于 $s-1 \in (0, 1)$, 可利用引理 2 得

$$\|m_x\|_{H^{s-1}} \leq \|\partial_x m_0\|_{H^{s-1}} + C \int_0^t (\|R_1(\tau)\|_{H^{s-1}} + U'(\tau) \|m_x\|_{H^{s-1}}) d\tau. \quad (18)$$

利用引理 1 以及式(12)和(13), 有下列估计:

$$\begin{aligned} & \|5(uu_x + vv_x)m_x + 3(uu_x + vv_x)_x m\|_{H^{s-1}} \leq \\ & C(\|uu_x + vv_x\|_{H^s} \|m\|_{L^\infty} + \|m_x\|_{H^{s-1}} \|uu_x + vv_x\|_{L^\infty}) \leq C(\|m\|_{L^\infty}^2 + \|n\|_{L^\infty}^2) \|m\|_{H^s} + \\ & \|m\|_{L^\infty} \|n\|_{L^\infty} \|n\|_{H^s}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\partial_x(vu_x - uv_x)n\|_{H^{s-1}} &\leq C\|(vu_x - uv_x)n\|_{H^s} \leq \\ &C\left(\|m\|_{L^\infty}^2 + \|n\|_{L^\infty}^2\right)\|m\|_{H^s} + \\ &\|m\|_{L^\infty}\|n\|_{L^\infty}\|n\|_{H^s}. \end{aligned}$$

代入(18)式, 得到

$$\begin{aligned} \|m_x\|_{H^{s-1}} &\leq \|m_0\|_{H^s} + C\int_0^t (\|m\|_{L^\infty} + \|n\|_{L^\infty})^2 \cdot \\ &(\|m\|_{H^s} + \|n\|_{H^s})d\tau, \end{aligned} \quad (19)$$

同样地,

$$\begin{aligned} \|n_x\|_{H^{s-1}} &\leq \|n_0\|_{H^s} + C\int_0^t (\|m\|_{L^\infty} + \|n\|_{L^\infty})^2 \cdot \\ &(\|m\|_{H^s} + \|n\|_{H^s})d\tau. \end{aligned} \quad (20)$$

类似 $s \in (1/2, 1)$ 的方法, 证得定理在 $s \in [1, 2)$ 情况下仍然成立.

最后, 设 $2 \leq k \in \mathbb{N}$, 利用数学归纳法假设式(14)在 $s \in [k-1, k)$ 是成立的, 下证对于 $s \in [k, k+1)$ 仍然成立. 将式(1)中第 1 个方程关于 x 求导 k 次, 则有

$$\begin{aligned} \partial_t(\partial_x^k m) + (u^2 + v^2)\partial_x(\partial_x^k m) = \\ -\sum_{l=0}^{k-1} C_k^l \partial_x^{k-l}(u^2 + v^2)\partial_x^{l+1} m - \partial_x^k(3(uu_x + \\ vv_x)m + (vu_x - uv_x)n) \triangleq F_1(t, x). \end{aligned} \quad (21)$$

此时, $s-k \in [0, 1)$, 利用引理 2 可以得到

$$\begin{aligned} \|\partial_x^k m\|_{H^{s-k}} &\leq \|\partial_x^k m_0\|_{H^{s-k}} + C\int_0^t (\|F_1(\tau)\|_{H^{s-k}} + \\ &U'(\tau)\|\partial_x^k m\|_{H^{s-k}})d\tau. \end{aligned} \quad (22)$$

利用引理 1 以及式(12)和(13), 有下面的估计:

$$\begin{aligned} \|\sum_{l=0}^{k-1} C_k^l \partial_x^{k-l}(u^2 + v^2)\partial_x^{l+1} m\|_{H^{s-k}} &\leq C\sum_{l=0}^{k-1} C_k^l (\|\partial_x^{k-l} \cdot \\ &(u^2 + v^2)\|_{H^{s-k+1}}\|\partial_x^l m\|_{L^\infty} + \|\partial_x^{k-l}(u^2 + v^2)\|_{L^\infty} \cdot \\ &\|\partial_x^{l+1} m\|_{H^{s-k}}) \leq C\sum_{l=0}^{k-1} C_k^l (\|u^2 + v^2\|_{H^{s-l+1}} \cdot \\ &\|\partial_x^l m\|_{L^\infty} + \|\partial_x^{k-l}(u^2 + v^2)\|_{L^\infty}\|m\|_{H^{s-k+l+1}}) \leq \\ &C\sum_{l=0}^{k-1} C_k^l (\|u^2 + v^2\|_{H^{s-l+1}}\|m\|_{H^{l+1/2+\varepsilon_0}} + \\ &\|u^2 + v^2\|_{H^{k-l/2+\varepsilon_0}}\|m\|_{H^{s-k+l+1}}) \leq \\ &C(k)(\|m\|_{H^{k-1/2+\varepsilon_0}}^2 + \|n\|_{H^{k-1/2+\varepsilon_0}}^2)\|m\|_{H^s}, \\ \|\partial_x^k(3(uu_x + vv_x)m + (vu_x - uv_x)n)\|_{H^{s-k}} &\leq \\ C(\|(uu_x + vv_x)m\|_{H^s} + \|(vu_x - uv_x)n\|_{H^s}) &\leq \\ C(\|m\|_{L^\infty}^2 + \|n\|_{L^\infty}^2)\|m\|_{H^s} + \|m\|_{L^\infty}\|n\|_{L^\infty} \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|n\|_{H^s}) &\leq C(\|m\|_{H^{k-1/2+\varepsilon_0}}^2 + \|n\|_{H^{k-1/2+\varepsilon_0}}^2) \cdot \\ &\|m\|_{H^s} + \|m\|_{H^{k-1/2+\varepsilon_0}}\|n\|_{H^{k-1/2+\varepsilon_0}}\|n\|_{H^s}. \end{aligned}$$

这里运用 Sobolev 嵌入定理, 当 $\varepsilon_0 \in (0, 1/4)$ 时, $H^{1/2+\varepsilon_0}$ 嵌入 L^∞ , $H^{k-1/2+\varepsilon_0} L^\infty$ 嵌入 L^∞ . 代入式(22), 得到

$$\begin{aligned} \|\partial_x^k m\|_{H^{s-k}} &\leq \|m_0\|_{H^s} + C\int_0^t (\|m\|_{H^{k-1/2+\varepsilon_0}} + \|n\|_{H^{k-1/2+\varepsilon_0}})^2 \cdot \\ &(\|m\|_{H^s} + \|n\|_{H^s})d\tau, \end{aligned} \quad (23)$$

同样地,

$$\begin{aligned} \|\partial_x^k n\|_{H^{s-k}} &\leq \|n_0\|_{H^s} + C\int_0^t (\|m\|_{H^{k-1/2+\varepsilon_0}} + \|n\|_{H^{k-1/2+\varepsilon_0}})^2 \cdot \\ &(\|m\|_{H^s} + \|n\|_{H^s})d\tau, \end{aligned} \quad (24)$$

结合式(23)和(24), 应用 Gronwall 不等式

$$\begin{aligned} \|m(t)\|_{H^s} + \|n(t)\|_{H^s} &\leq (\|m_0\|_{H^s} + \|n_0\|_{H^s}) \cdot \\ &\exp\left\{C\int_0^t (\|m\|_{H^{k-1/2+\varepsilon_0}} + \|n\|_{H^{k-1/2+\varepsilon_0}})^2 d\tau\right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

如果 $T < \infty$ 且满足 $\int_0^T (\|m\|_{H^{k-1/2+\varepsilon_0}} + \|n\|_{H^{k-1/2+\varepsilon_0}})^2 d\tau$, 根据 $3/2 + \varepsilon_0 \in (1, 2)$, 再通过数学归纳法得到当 $k \geq 2$ 时, $(\|m\|_{H^{k-1/2+\varepsilon_0}} + \|n\|_{H^{k-1/2+\varepsilon_0}})^2$ 在 $t \in (0, T)$ 一致有界. 所以

$$\limsup_{t \rightarrow T} (\|m(t)\|_{H^s} + \|n(t)\|_{H^s}) < \infty,$$

这与 T 为最大生存时间的假设相矛盾, 即完成了定理 3 的所有证明.

推论 1 假设 $s > 1/2$, $(m_0, n_0) \in H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$, 令 $T > 0$ 是两分量 Novikov 系统柯西问题(1)强解 (m, n) 的最大生存时间. 那么解 (m, n) 在有限时间爆破当且仅当

$$\limsup_{t \rightarrow T} \|m(t) + n(t)\|_{L^\infty} = \infty.$$

下面进一步应用运输方程特征线法研究方程的精准爆破现象. 首先考虑速度为 $u^2 + v^2$ 的常微分方程:

$$\begin{cases} dq(t, x)/dt = (u^2 + v^2)(t, q(t, x)), \\ (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}, \\ q(0, x) = x, x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (26)$$

引理 3 假设 $s > 1/2$, $(m_0, n_0) \in H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$, 令 $T > 0$ 是两分量 Novikov 系统柯西问题(1)强解 (m, n) 的最大生存时间. 那么, 方程组(26)式有唯一解 $q \in C^1([0, t) \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$, 且 $q(t, \cdot)$ 是在 $\mathbb{R}$ 上的递增微分同胚映射, 同时满足

$$q_x(t, x) = \exp\left(2\int_0^t (uu_x + vv_x)(s, q(s, x))ds\right) > 0,$$

$$(t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}. \quad (27)$$

引理 4 解 $m+n, m-n$ 具有符号不变性, 进而 $(m+n)(t, q(t, x)) =$

$$\exp \left[-3 \int_0^t (uu_x + vv_x)(s, q(s, x)) ds + \int_0^t (uv_x - vu_x)(s, q(s, x)) ds \right] (m_0 + n_0), \quad (28)$$

$$(m-n)(t, q(t, x)) =$$

$$\exp \left[-3 \int_0^t (uu_x + vv_x)(s, q(s, x)) ds - \int_0^t (uv_x - vu_x)(s, q(s, x)) ds \right] (m_0 + n_0). \quad (29)$$

定理 4 假设 $s > 1/2$, $(m_0, n_0) \in H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$, 令 $T > 0$ 为两分量 Novikov 系统柯西问题(1)强解 (m, n) 的最大生存时间. 那么解 (m, n) 在有限时间爆破当且仅当

$$\liminf_{t \rightarrow T} \inf_{x \in \mathbb{R}} \{ (uu_x + vv_x)(t, x) \} = -\infty,$$

或

$$\limsup_{t \rightarrow T} (\| (uv_x - u_x v)(t, \cdot) \|_{L^\infty}) = \infty. \quad (30)$$

证明 假设解 (m, n) 在有限时间内爆破, 且存在常数 $C > 0$, 使得对于任意 $(t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}$ 有

$$\begin{aligned} (uu_x + vv_x)(t, x) &\geq -C, \\ \| (uv_x - u_x v)(t, \cdot) \|_{L^\infty} &\leq C. \end{aligned}$$

根据式(28)和 Sobolev 嵌入不等式, 有

$$\| (m+n)(t, \cdot) \|_{L^\infty} = \| (m+n)(t, q(t, \cdot)) \|_{L^\infty} \leq C e^{Ct} \| m_0 + n_0 \|_{H^s}, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T (\| m(t) \|_{L^\infty} + \| n(t) \|_{L^\infty})^2 dt &\leq C^2 T e^{2CT}. \\ (\| m_0 \|_{H^s} + \| n_0 \|_{H^s})^2 &< \infty, \end{aligned} \quad (32)$$

这和定理 3 产生矛盾.

另一方面, 利用 Sobolev 嵌入定理, 若

$$\liminf_{t \rightarrow T} \inf_{x \in \mathbb{R}} \{ (uu_x + vv_x)(t, x) \} = -\infty,$$

或

$$\limsup_{t \rightarrow T} (\| (uv_x - u_x v)(t, \cdot) \|_{L^\infty}) = \infty,$$

那么解 (m, n) 会在有限时间里爆破.

2 持续性

利用时频分析理论研究可积两分量 Novikov 系统(1)在 L^p 权重空间 $L^p := L^p(\mathbb{R}, \phi^p(x) dx)$ 的持续性. 目标是找到一类权重函数 ϕ , 使得下式成立:

$$\sup_{t \in [0, T)} (\| z(t) \phi \|_{L^p} + \| \partial_x z(t) \phi \|_{L^p}) < \infty.$$

首先, 给出一些辅助函数定义^[19]:

定义 1 对 $\forall x, y \in \mathbb{R}$, 权重函数 $\omega: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $\omega(x+y) \leq \omega(x)\omega(y)$, 则称 ω 为次乘函数.

定义 2 给定一个非负次乘函数 ω , 定义函数 ϕ 是 ω -适中函数, 当且仅当 $\forall x, y \in \mathbb{R}, \exists C_0 > 0: \phi(x+y) \leq C_0 \omega(x)\phi(y)$.

定义 3 局部绝对连续函数 $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 对于某些 $A > 0$, 有 $|\phi'(x)| \leq A |\phi(x)|$ 对 $x \in \mathbb{R}$ 几乎处处成立, 且 ϕ 是 ω -适中函数, 次乘函数 ω 满足

$$\inf_{\mathbb{R}} \omega > 0 \text{ 和 } \int_{\mathbb{R}} \frac{\omega(x)}{e^{|x|}} dx < \infty,$$

则称 ϕ 为容许权重函数.

定理 5 假设 $s > 3/2, T > 0$, 且 $2 \leq p \leq \infty$, 令 $z = (u, v) \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T]; H^{s-1}(\mathbb{R})) \times C([0, T]; H^s(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T]; H^{s-1}(\mathbb{R}))$ 是两分量 Novikov 系统柯西问题(1)的一个强解, 初值 $z(0, x) = z_0$ 满足 $z_0 \phi, (\partial_x z_0) \phi \in L^p(\mathbb{R}) \times L^p(\mathbb{R})$, 其中, ϕ 是方程的一个容许权重函数, 那么对于任意 $t \in [0, T]$, 有以下不等式成立:

$$\begin{aligned} \| z(t) \phi \|_{L^p} + \| (\partial_x z(t)) \phi \|_{L^p} &\leq (\| z_0 \phi \|_{L^p} + \\ &\| (\partial_x z_0) \phi \|_{L^p}) \exp \{ C M^2 t \}, \end{aligned} \quad (33)$$

其中, 常数 $C > 0$, 仅依赖于 ϕ 和 ω ,

$$M \equiv \sup_{t \in [0, T]} (\| z(t) \|_{L^\infty} + \| \partial_x z(t) \|_{L^\infty}) < \infty.$$

注 如果取一般的标准权重函数:

$$\phi = \phi_{a,b,c,d} = e^{a|x|^b} (1+|x|)^c \log(e+|x|)^d. \quad (34)$$

情形 1 取 $\phi = \phi_{0,0,c,0}$, 对于 $c > 0, p = \infty$, 定理揭示了强解的代数衰减.

情形 2 当 $x \geq 0$ 时, 取 $\phi = \phi_{a,1,0,0}$; 当 $x \leq 0$ 时, 取 $\phi = 1$, 对于 $0 \leq a < 1, p = \infty$, 定理揭示了强解的指数衰减.

证明 将方程组(1)改写成弱解形式:

$$\begin{cases} u_t + (u^2 + v^2)u_x + A_1(u, v) + B_1(u, v) = 0, \\ v_t + (u^2 + v^2)v_x + A_2(u, v) + B_2(u, v) = 0, \end{cases} \quad (35)$$

$$\begin{cases} A_1(u, v) = \frac{1}{2} G(u_x^3 + u_x v_x^2), B_1(u, v) = \\ \partial_x G \left(u^3 + uv^2 + \frac{3}{2} uu_x^2 + vv_x v_x + \frac{1}{2} uv_x^2 \right), \\ A_2(u, v) = \frac{1}{2} G(v_x^3 + v_x u_x^2), B_2(u, v) = \\ \partial_x G \left(v^3 + vu^2 + \frac{3}{2} vv_x^2 + uv_x u_x + \frac{1}{2} vu_x^2 \right), \end{cases}$$

其中,核函数 $G(x) = e^{|x|}/2$. 又根据 $z = (u, v) \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R})) \times C([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$ 的假设, 得到

$$M \equiv \sup_{t \in [0, T]} (\|z(t)\|_{L^\infty} + \|\partial_x z(t)\|_{L^\infty}) < \infty.$$

对于任何 $N \in \mathbb{Z}^+$, 考虑 $\phi(x)$ 的 N -截断函数: $f(x) = f_N(x) = \min\{\phi, N\}$. 显然有 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是局部绝对连续, 且 $\|f\|_{L^\infty}$ 和 $|f'(x)| \leq A|f(x)|$, x 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处成立. 进一步, 若 $C_1 = \max\{C_0, \alpha^{-1}\}$, 其中 $\alpha \triangleq \inf_{\mathbb{R}} \omega(x) > 0$ 有

$$f(x+y) \leq C_1 \omega(x) f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

得到 ϕ 的截断函数 f 关于 N 也是一致 ω -适中的.

下面先考虑 $2 \leq p < \infty$ 的情况.

将式(35)中第 1 个方程乘以 $f|uf|^{p-2}(uf)$, 再在 $\mathbb{R}$ 上关于 x 作积分, 得到

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |uf|^{p-2}(uf)(u_t f) dx + \int_{\mathbb{R}} |uf|^{p-2}(uf)(u^2 + v^2) u_x f dx + \int_{\mathbb{R}} |uf|^{p-2}(uf) f \cdot (A_1(u, v) + B_1(u, v)) dx = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

对式(35)每项作估计

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |uf|^{p-2}(uf)(u_t f) dx &= \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|uf\|_{L^p}^p = \|uf\|_{L^p}^{p-1} \frac{d}{dt} \|uf\|_{L^p}, \\ \left| \int_{\mathbb{R}} |uf|^{p-2}(uf)(u^2 + v^2) u_x f dx \right| &\leq \|u^2 + v^2\|_{L^\infty} \|uf\|_{L^p}^{p-1} \|u_x f\|_{L^p} \leq CM^2 \|uf\|_{L^p}^{p-1} \|u_x f\|_{L^p}, \\ \left| \int_{\mathbb{R}} |uf|^{p-2}(uf) f \cdot (A_1(u, v) + B_1(u, v)) dx \right| &\leq \|uf\|_{L^p}^{p-1} \|f \cdot (A_1(u, v) + B_1(u, v))\|_{L^p} \leq \\ &C \|uf\|_{L^p}^{p-1} \left\{ \|G\omega\|_{L^1} \|f \cdot (\frac{1}{2}u^3 + \frac{1}{2}uv^2)\|_{L^p} + \|(\partial_x G)\omega\|_{L^1} \|f \cdot (u^3 + uv^2 + \frac{3}{2}uu_x^2 + vu_x v_x + \frac{1}{2}uv_x^2)\|_{L^p} \right\} \leq CM^2 \|uf\|_{L^p}^p + \\ &\|uf\|_{L^p}^{p-1} \|u_x f\|_{L^p}. \end{aligned}$$

在估计中, 使用 Hölder 不等式, 参考文献[19]中的命题 3.1 和 3.2 以及定义中 $\int_{\mathbb{R}} \frac{\omega(x)}{e^{|x|}} dx < \infty$. 最后可以得到

$$\frac{d}{dt} \|uf\|_{L^p} \leq CM^2 (\|uf\|_{L^p} + \|u_x f\|_{L^p}). \quad (37)$$

下面估计 $u_x f$. 将方程关于 x 求导可得

$$\begin{aligned} u_{xt} + (u^2 + v^2)u_{xx} + \partial_x A_1(u, v) + G(u^3 + uv^2 + \frac{3}{2}uu_x^2 + vu_x v_x + \frac{1}{2}uv_x^2) - (u^3 + uv^2 - \frac{1}{2}uu_x^2 - vu_x v_x + \frac{1}{2}uv_x^2) &= 0. \end{aligned}$$

等式两端乘以 $f|u_x f|^{p-2}(u_x f)$, 再在 $\mathbb{R}$ 上关于 x 作积分, 注意到

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |u_x f|^{p-2}(u_x f)(u_{xt} f) dx &= \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|u_x f\|_{L^p}^p = \|u_x f\|_{L^p}^{p-1} \frac{d}{dt} \|u_x f\|_{L^p}, \\ \left| \int_{\mathbb{R}} |u_x f|^{p-2}(u_x f)(u^2 + v^2) u_{xx} f dx \right| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}} -\frac{|u_x f|^p}{p} (2uu_x + 2vv_x) dx \right| + \\ &A \left| \int_{\mathbb{R}} |u_x f|^p (u^2 + v^2) dx \right| \leq CM^2 \|u_x f\|_{L^p}^p, \\ \left| \int_{\mathbb{R}} |u_x f|^{p-2}(u_x f) f (\partial_x A_1(u, v) + G(u^3 + uv^2 + \frac{3}{2}uu_x^2 + vu_x v_x + \frac{1}{2}uv_x^2)) dx \right| &\leq C \|u_x f\|_{L^p}^{p-1} \cdot \\ \left\{ \|(\partial_x G)\omega\|_{L^1} \|f(\frac{1}{2}u^3 + \frac{1}{2}uv^2)\|_{L^p} + \|G\omega\|_{L^1} \|f \cdot (u^3 + uv^2 + \frac{3}{2}uu_x^2 + vu_x v_x + \frac{1}{2}uv_x^2)\|_{L^p} \right\} &\leq \\ CM^2 \|u_x f\|_{L^p}^{p-1} (\|uf\|_{L^p} + \|u_x f\|_{L^p}), \\ \left| \int_{\mathbb{R}} |u_x f|^{p-2}(u_x f) f \left(u^3 + uv^2 - \frac{1}{2}uu_x^2 - vu_x v_x + \frac{1}{2}uv_x^2 \right) dx \right| &\leq CM^2 \|u_x f\|_{L^p}^{p-1} \cdot \\ (\|uf\|_{L^p} + \|u_x f\|_{L^p}). \end{aligned}$$

其中, 第 2 个估计中利用 $u_{xx} = (u_x f)_x - u_x f' \leq (u_x f)_x + Au_x f$. 所以可以得到

$$\frac{d}{dt} \|u_x f\|_{L^p} \leq CM^2 (\|uf\|_{L^p} + \|u_x f\|_{L^p}). \quad (38)$$

结合式(37)和(38), 应用 Gronwall 不等式得到, 对于任何 $t \in [0, T]$ 有

$$\begin{aligned} \|u(t) f\|_{L^p} + \|(\partial_x u)(t) f\|_{L^p} &\leq (\|u_0 f\|_{L^p} + \|(\partial_x u_0) f\|_{L^p}) \exp\{CM^2 t\}. \end{aligned} \quad (39)$$

将 $N \rightarrow \infty$, 根据 $u_0 \phi, (\partial_x u_0) \phi \in L^p(\mathbb{R})$, 对于任何 $t \in [0, T]$ 运用 Lebesgue 有界收敛原则

$$\begin{aligned} \|u(t) \phi\|_{L^p} + \|(\partial_x u)(t) \phi\|_{L^p} &\leq (\|u_0 \phi\|_{L^p} + \|(\partial_x u_0) \phi\|_{L^p}) \exp\{CM^2 t\}, \end{aligned} \quad (40)$$

同样地, 用类似方式估计变量 v , 结合式(40)得出对于任何 $t \in [0, T]$ 有

$$\|z(t)\phi\|_{L^p} + \|(\partial_x z)(t)\phi\|_{L^p} \leq (\|z_0\phi\|_{L^p} + \|(\partial_x z_0)\phi\|_{L^p}) \exp\{CM^2 t\}. \quad (41)$$

最后考虑 $p = \infty$ 的情况.

因对于任何 $f \in L^\infty \cap L^2$, 有 $\|f\|_{L^\infty} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L^p}$

成立, 所以式(41)仍然成立, 即完成定理 5 证明.

然而, 定理 5 不适用加权函数 $\phi_{1,1,c,d}$, 当 $c < 0$, $d \in \mathbb{R}, 1/|c| < p \leq \infty$ 时定理仍然成立. 所以下面考虑更一般的结果.

定理 6 假设 $s > 3/2$, $2 \leq p \leq \infty$, ϕ 是 ω -适中加权函数满足 $|\phi'(x)| \leq A|\phi(x)|$, 且 $\inf_{\mathbb{R}} \omega > 0$, $\omega e^{-|x|} \in L^p(\mathbb{R})$, 初值 $z_0 = z|_{t=0} = (u_0, v_0)$ 满足

$$\begin{cases} z_0\phi \in L^p(\mathbb{R}), & (\partial_x z_0)\phi \in L^p(\mathbb{R}), \\ z_0\phi^{1/3} \in L^3(\mathbb{R}), & (\partial_x z_0)\phi^{1/3} \in L^3(\mathbb{R}). \end{cases}$$

令 $z = (u, v) \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T]; H^{s-1}(\mathbb{R})) \times C([0, T]; H^s(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T]; H^{s-1}(\mathbb{R}))$ 是两分量 Novikov 系统柯西问题(1)的一个强解, 那么

$$\sup_{t \in [0, T]} (\|z(t)\phi\|_{L^p} + \|z_x(t)\phi\|_{L^p}) < \infty, \quad (42)$$

$$\sup_{t \in [0, T]} (\|z(t)\phi^{1/3}\|_{L^3} + \|z_x(t)\phi^{1/3}\|_{L^3}) < \infty. \quad (43)$$

证明 首先注意到 $\phi^{1/3}$ 是 $\omega^{1/3}$ -适中函数满足 $(\phi^{1/3})'(x) \leq A\phi^{1/3}(x)/3$, 且 $\inf_{\mathbb{R}} \phi^{1/3} > 0$, $\omega^{1/3}e^{-|x|/3} \in L^p(\mathbb{R})$, 由 Hölder 不等式得到 $\omega^{1/3}e^{-|x|} \in L^p(\mathbb{R})$. 将加权函数 $\phi^{1/3}$ 和 $p = 3$ 应用于定理 5 得到

$$\begin{aligned} \|u(t)\phi^{1/3}\|_{L^3} + \|(\partial_x u)(t)\phi^{1/3}\|_{L^3} &\leq (\|u_0\phi^{1/3}\|_{L^3} + \|(\partial_x u_0)\phi^{1/3}\|_{L^3}) \exp\{CM^2 t\}, \\ \|v(t)\phi^{1/3}\|_{L^3} + \|(\partial_x v)(t)\phi^{1/3}\|_{L^3} &\leq (\|v_0\phi^{1/3}\|_{L^3} + \|(\partial_x v_0)\phi^{1/3}\|_{L^3}) \exp\{CM^2 t\}. \end{aligned}$$

另一方面从定理 5 的证明中, 容易得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\|uf\|_{L^p} + \|u_x f\|_{L^p}) &\leq CM^2 (\|uf\|_{L^p} + \|u_x f\|_{L^p}) + \|f[A_1(u, v) + B_1(u, v)]\|_{L^p} + \\ &\|f\partial_x [A_1(u, v) + B_1(u, v)]\|_{L^p}. \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\|vf\|_{L^p} + \|v_x f\|_{L^p}) &\leq CM^2 (\|vf\|_{L^p} + \|v_x f\|_{L^p}) + \|f[A_2(u, v) + B_2(u, v)]\|_{L^p} + \\ &\|f\partial_x [A_2(u, v) + B_2(u, v)]\|_{L^p}. \end{aligned} \quad (45)$$

下面估计 $\|f[A_1(u, v) + B_1(u, v)]\|_{L^p}$ 和 $\|f\partial_x [A_1(u, v) + B_1(u, v)]\|_{L^p}$.

$$\begin{aligned} \|f[A_1(u, v) + B_1(u, v)]\|_{L^p} &\leq C(G\omega\|f\|_{L^p} + \left\| \left(\frac{1}{2}u_x^3 + \frac{1}{2}uv_x^2 \right) \right\|_{L^1} + \|(\partial_x G)\omega\|_{L^p} \|f(u^3 + uv^2 + \frac{3}{2}uu_x^2 + vu_x v_x + \frac{1}{2}uv_x^2)\|_{L^1}) \leq \\ &C(\|f^{1/3}u_x\|_{L^3}^3 + \|f^{1/3}u\|_{L^3} \|f^{1/3}v_x\|_{L^3}^2 + \|f^{1/3}u\|_{L^3}^3 + \|f^{1/3}u\|_{L^3} \|f^{1/3}v\|_{L^3}^2 + \|f^{1/3}u\|_{L^3} \|f^{1/3}u_x\|_{L^3}^2 + \|f^{1/3}v\|_{L^3} \cdot \\ &\|f^{1/3}u_x\|_{L^3} \|f^{1/3}v_x\|_{L^3}) \leq C_0 \exp\{3CM^2 t\}, \end{aligned}$$

其中, 常数 C_0 仅依赖于函数 ϕ 和初值.

$$\|f\partial_x [A_1(u, v) + B_1(u, v)]\|_{L^p} \leq \|f\partial_x G\|_{L^p} \cdot$$

$$\begin{aligned} &\left\| \left(\frac{1}{2}u_x^3 + \frac{1}{2}uv_x^2 \right) \right\|_{L^p} + \|fG(u^3 + uv^2 + \frac{3}{2}uu_x^2 + vu_x v_x + \frac{1}{2}uv_x^2)\|_{L^p} + \|f(u^3 + uv^2 + \frac{3}{2}uu_x^2 + vu_x v_x + \frac{1}{2}uv_x^2)\|_{L^p} \leq \\ &C_0 \exp\{3CM^2 t\} + CM^2 (\|uf\|_{L^p} + \|u_x f\|_{L^p}). \end{aligned}$$

将上面 2 个估计代入(44)式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\|uf\|_{L^p} + \|u_x f\|_{L^p}) &\leq CM^2 (\|uf\|_{L^p} + \|u_x f\|_{L^p} + \\ &\|u_x f\|_{L^p}) + \widetilde{C}_0 \exp\{3CM^2 t\}, \end{aligned} \quad (46)$$

同样地,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\|vf\|_{L^p} + \|v_x f\|_{L^p}) &\leq CM^2 (\|vf\|_{L^p} + \|v_x f\|_{L^p} + \\ &\|v_x f\|_{L^p}) + \widetilde{C}_0 \exp\{3CM^2 t\}. \end{aligned} \quad (47)$$

令 $N \rightarrow \infty$, 就得到 $2 \leq p < \infty$ 情况的结论, 这里的常数都仅依赖于函数 ϕ 和初值. 当 $p = \infty$ 的情况可以利用极限理论证明, 因此完成定理 6 证明.

参考文献:

- [1] Li H M, Li Y Q, Chen Y. Bi-Hamiltonian structure of multi-component Novikov equation[J]. Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 2014, 21(4):509-520.
- [2] Qu C Z, Fu Y. On the Cauchy problem and peakons of a two-component Novikov system[J]. 中国科学(数学英文版), 2020, 63(10):1965-1996.
- [3] Wang H Q, Chen M M, Jin Y P. On the Cauchy problem

- for the two-component Novikov system with peakons[J]. *Applicable Analysis*, 2022, 10:1-26.
- [4] Novikov V. Generalizations of the Camassa-Holm equation[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2009, 42(34):342002.
- [5] Degasperis A, Holm D D, Hone A W. A new integral equation with peakon solutions[J]. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2002, 133:1463-1474.
- [6] Hone A N W, Wang J P. Integrable peakon equations with cubic nonlinearity[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2008, 41(37):372002.
- [7] Himonas A, Holliman C. The Cauchy problem for the Novikov equation[J]. *Nonlinearity*, 2012, 25:449-479.
- [8] Ni L D, Zhou Y. Well-posedness and persistence properties for the Novikov equation[J]. *Journal of Differential Equations*, 2011, 250(7):3002-3021.
- [9] Wu X L, Yin Z Y. Well-posedness and global existence for the Novikov equation[J]. *Annali Scuola Normale Superiore – Classe Di Scienze*, 2012, 11:707-727.
- [10] Wu X L, Yin Z Y. A note on the Cauchy problem of the Novikov equation[J]. *Applicable Analysis*, 2013, 92(6):1116-1137.
- [11] Geng X G, Xue B. An extension of integrable peakon equations with cubic nonlinearity[J]. *Nonlinearity*, 2009, 22(8):1847-1856.
- [12] Chen R, Qiao Z J, Zhou S M. Persistence properties and wave-breaking criteria for the Geng-Xue system[J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2019, 42(18):6999-7010.
- [13] Himonas A A, Mantzavinos D. The initial value problem for a Novikov system[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 2016, 57(7):319-1252.
- [14] Mi Y S, Mu C L, Tao W A. On the Cauchy problem for the two-component Novikov equation[J]. *Advances in Mathematical Physics*, 2013, 2013:810725.
- [15] Li N H, Liu Q P. On bi-Hamiltonian structure of two-component Novikov equation[J]. *Physics Letters A*, 2013, 377(3/4):257-261.
- [16] Wang H Q, Fu Y. A note on the Cauchy problem for the periodic two-component Novikov system[J]. *Applicable Analysis*, 2020, 99(6):1042-1065.
- [17] Bahouri H, Chemin J Y, Danchin R. *Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations*[M]. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- [18] Gui G L, Liu Y. On the global existence and wave-breaking criteria for the two-component Camassa-Holm system[J]. *Journal of Functional Analysis*, 2010, 258(12):4251-4278.
- [19] Brandolese L. Breakdown for the Camassa-Holm equation using decay criteria and persistence in weighted spaces[J]. *International Mathematics Research Notices*, 2011, 2012(22):5161-5181.

Blow-up criterion and persistence properties for a two-component Novikov system

CHEN Han, YAN Kexin, JIANG Xianjiang*

(School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: In this paper, we study two properties of strong solutions of Cauchy problem for integrable two-component Novikov system, which can be regarded as extension of Novikov equation. We present a precise blow-up scenario and some new blow-up results for strong solutions using one-dimensional transport equation and Morse-type estimates. Moreover, the persistence properties of the solutions to the system in weighted L^p spaces are defined by making use of the approach in time-frequency analysis.

Key words: two-component Novikov system; Cauchy problem; blow-up criterion; persistence properties

(责任编辑 章践立)