

DOI: 10.20098/j.cnki.1001-5132.2023.0235

常弹性方差模型下含资本利得税的最优投资策略

李千妍, 王伟*

(宁波大学 数学与统计学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 研究风险资产价格动态满足常弹性方差模型且考虑资本利得税情形下的最优投资问题. 假定金融市场中有无风险债券和风险资产两种可投资资产, 风险资产的价格动态满足常弹性方差模型且这两种资产的收益都将被征收不同税率的税收. 基于最大化终端财富期望效用的目标, 利用随机动态规划原理建立相应的 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程, 通过求解 HJB 方程并利用一阶最优条件, 分别得到幂效用和指数效用下最优投资策略的解析解, 最后给出数值结果和经济学解释.

关键词: 资本利得税; 常弹性方差; 动态规划; 最优投资

中图分类号: O211.9

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2023) 04-0104-08

Merton^[1-2]首次考虑了连续时间模型下的投资和消费问题, 并应用随机动态规划方法得到最优投资和消费策略的解析表达式, 从而奠定了连续时间投资消费理论. 自此以后, 最优投资优化问题一直是金融工程和金融数学领域的热点问题之一. Bielecki 等^[3]假定金融市场存在可投资的带违约风险的公司债券, 且风险资产价格满足几何布朗运动, 利用动态规划原理得到了最优投资策略. Elliott 等^[4]利用连续时间马尔可夫链描述市场经济状态, 研究了机制转换模型下的最优投资问题. 由于金融市场中一些重大事件的发生会导致股票价格出现不连续的跳跃, 因此 Jin 等^[5]假定风险资产价格满足跳扩散过程, 研究投资者面临投资限制时的最优投资组合问题. 近几年的相关研究参见文献[6-8]. 然而, 这些研究都假定金融市场中风险资产的波动率为常数. 事实上, 大量实证研究表明市场中风险资产的对数收益率具有尖峰厚尾特征, 且波动率不是常数, 而是具有波动率微笑现象. 于是学者们提出了许多不同的金融模型来描述市场中风险资产的价格过程, 常弹性方差模型就是其中之一.

常弹性方差模型最先由 Cox 等^[9]提出, 模型假定风险资产的波动率与其价格相关, 研究了该模型下衍生产品的定价问题. 在常弹性方差模型下的最优投资研究领域, Zhao 等^[10]研究了常弹性方差模型下指数效用型投资者的最优多资产配置问题. Li 等^[11]假定劳动者的收入是随机的, 风险资产价格满足常弹性方差模型下确定缴费型养老金的时间一致投资问题, 接着 Li 等^[12]进一步考虑了市场中存在违约债券的情况, 研究了常弹性方差模型下带有违约债券的确定缴费型养老金的最优均衡投资策略问题. 刘小涛等^[13]假设风险资产价格服从常弹性方差模型, 研究了双曲绝对风险厌恶效用和动态非自融资下的最优投资问题. 阿春香等^[14]假设保险公司的财富过程服从时滞随机微分方程, 风险资产价格满足常弹性方差模型, 研究了负指数效用最大化目标下的时滞最优投资与再保险控制问题. 然而这些文献只考虑了市场风险而忽视了模型风险, 行为经济学领域的研究学者指出, 市场中投资者在投资时不仅仅会考虑市场风险, 而且对经济因素的概率分布也是持有怀疑态度的, 这就是所谓的模型风险. 于是, Deng 等^[15]

收稿日期: 2023-02-22.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journal.g.nbu.edu.cn/>

基金项目: 教育部人文社科基金(18YJC910012).

第一作者: 李千妍(1998-), 女, 安徽宣城人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 应用概率. E-mail: 2111071019@nbu.edu.cn

*通信作者: 王伟(1982-), 男, 安徽安庆人, 教授, 主要研究方向: 应用概率. E-mail: wangwei2@nbu.edu.cn

进一步考虑模型风险, 研究了常弹性方差模型下含违约债券的最优投资问题.

但是, 上述研究均未考虑投资获得收益将被征收资本利得税的问题, 目前这方面的研究较少, Gallmeyer 等^[16]研究了资本利得税和多个风险资产价格背景下的消费组合问题, 并给出了一种新的交易灵活性策略. 与此不同, Ma 等^[17]假定风险资产价格满足跳扩散模型, 同时考虑了含资本利得税情形下的最优投资和消费问题, 并得到了最优投资和消费策略的表达式. 本文用常弹性方差模型描述市场中风险资产的价格动态, 考虑投资获得的资产收益将被征收资本利得税的情形, 通过 Ito 公式和随机动态规划方法得到 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程, 分别考虑幂效用和指数效用下的最优投资问题, 利用最优投资策略的解析表达式和 Matlab 软件得到数值结果, 并给出模型参数对最优投资策略的影响分析和经济学解释.

1 金融市场

考虑一个无摩擦且无套利的金融市场, 市场中的投资者在 $[0, T]$ 时间段内可连续进行交易且不考虑交易费用. 用一个带域流的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, P)$ 来描述金融市场中的不确定性, 其中 P 是概率测度. 假设金融市场中存在两种可投资的资产, 一种是无风险资产, 一种是风险资产股票.

无风险资产的价格过程为

$$\frac{dB_t}{B_t} = rdt, \quad (1)$$

式中: $r > 0$ 表示无风险利率.

令 S_t 表示 t 时刻风险资产股票的价格, 满足

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + kS_t^\beta dW_t, \quad (2)$$

式中: μ 为股票的预期瞬时收益率, 且 $\mu > r$; kS_t^β 为瞬时波动率; k 为波动率系数; $\beta < 0$ 为弹性系数; $\{W_t: t \geq 0\}$ 为定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, P)$ 上的一维标准布朗运动.

假设政府对资本利得税以对称的方式连续征税, 即当资产价格上涨时, 投资者需要缴纳税款, 否则得到退款. 在这里, 对无风险资产的收益征收税率用 $\tau_0 \in (0, 1)$ 来表示, 风险资产的收益征收税率用 $\tau_1 \in (0, 1)$ 来表示, 则税后回报率分别为 $1 - \tau_0$ 、

$1 - \tau_1$.

令 V_t 表示 $t \in (0, T)$ 时刻的财富, V_0 表示 $t = 0$ 时的初始财富. π_t 和 $1 - \pi_t$ 分别表示投入风险资产和无风险资产占财富的比例, 则动态财富过程满足

$$dV_t = (1 - \tau_1) \frac{\pi_t V_t}{S_t} dS_t + (1 - \tau_0) \frac{(1 - \pi_t) V_t}{B_t} dB_t. \quad (3)$$

将式(1)和式(2)代入式(3), 可得财富过程满足如下微分方程:

$$dV_t = V_t [(1 - \tau_0)(1 - \pi_t)r + (1 - \tau_1)\pi_t\mu]dt + (1 - \tau_1)\pi_t k S_t^\beta dW_t. \quad (4)$$

定义 1(可允许投资策略) 假设 $\{\pi_t\}_{0 \leq t \leq T}$ 是 $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ 可测的, 且满足 $E[\int_0^T (\pi_t)^2 dt] < \infty$, 其中 $E[\cdot]$ 表示在统计概率测度 P 下的期望. 如果方程(4)有唯一强解, 则称策略 π_t 是一个可允许投资策略.

令 $\Pi = \{\pi_t | t \in [0, T]\}$ 表示所有可允许投资策略的集合. 假设投资者的投资目标是使得终端财富的期望效用达到最大, 即

$$\max_{\pi_t \in \Pi} E[U(V(T))], \quad (5)$$

式中: $U(\cdot)$ 为效用函数.

定义问题(5)的值函数为

$$H(t, s, v) = \max_{\pi_t \in \Pi} E[U(V_T) | S_t = s, V_t = v], \quad (6)$$

其中边界条件 $H(T, s, v) = U(v)$.

应用随机动态规划原理, 值函数 $H(t, s, v)$ 满足如下 HJB 方程:

$$\max_{\pi_t \in \Pi} h(t, s, v) = 0, \quad (7)$$

式中:

$$\begin{aligned} h(t, s, v) = & H_t + (1 - \tau_0)rvH_v + \mu sH_s + \\ & \frac{1}{2}k^2s^{2\beta+2}H_{ss} + \frac{1}{2}\pi^2(1 - \tau_1)^2k^2v^2s^{2\beta}H_{vv} + \\ & (1 - \tau_1)\pi\mu vH_v - \pi(1 - \tau_0)rvH_v + \\ & (1 - \tau_1)k^2\pi s^{2\beta+1}vH_{vs} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

这里 H_t 、 H_s 、 H_v 是 $H(t, s, v)$ 关于 t 、 s 、 v 的一阶导数; H_{ss} 、 H_{vv} 分别是 $H(t, s, v)$ 关于 s 、 v 的二阶导数; H_{vs} 是 $H(t, s, v)$ 关于 v 、 s 的混合偏导数. 对方程(7), 利用一阶最优条件可得

$$\pi_t^* = \frac{[(1 - \tau_0)r - (1 - \tau_1)\mu]H_v - (1 - \tau_1)k^2s^{2\beta+1}H_{vs}}{(1 - \tau_1)v k^2 s^{2\beta} H_{vv}}, \quad (9)$$

再将式(9)代入方程(8), 得

$$H_t + (1 - \tau_0)rvH_v + \mu sH_s + \frac{1}{2}k^2s^{2\beta+2}H_{ss} + \frac{rs(1 - \tau_0)H_vH_{vs} - \mu sH_vH_{vs}}{(1 - \tau_1)H_{vv}H_{vv}} - \frac{[r(1 - \tau_0) - \mu(1 - \tau_1)]^2H_v^2}{2(1 - \tau_1)^2k^2s^{2\beta}H_{vv}} - \frac{k^2s^{2\beta+2}H_{ss}^2}{2H_{vv}} = 0, \quad (10)$$

其中边界条件 $H(T, s, v) = U(v)$.

2 最优投资策略

目前研究比较常用的效用函数有幂效用、指数效用和对数效用, 而对数效用是幂效用的特殊情况, 因此选取幂效用和指数效用作为决策的目标函数, 确定最优投资策略以实现投资者的终端财富期望效用最大化.

2.1 幂效用下的最优投资策略

假设投资者的效用函数是幂效用函数, 满足

$$U(v) = \frac{v^p}{p}, \quad (11)$$

式中: $p < 1$ 且 $p \neq 0$.

为了表达方便, 令 $\Delta = b^2 - 4ac$, $a = -2k^2\beta^2$, $b = \frac{2\mu\beta}{1-p} - \frac{2r\beta(1-\tau_0)p}{(1-\tau_1)(1-p)}$, $c = -\frac{p[r(1-\tau_0) - \mu(1-\tau_1)]^2}{2k^2(1-p)^2(1-\tau_1)^2}$, $w_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, $w_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

定理 1 幂效用函数下的最优投资策略 π_t^* 满足

$$\pi_t^* = \frac{1}{(1-\tau_1)s^{2\beta}} \left\{ \frac{\mu(1-\tau_1) - r(1-\tau_0)}{(1-p)k^2(1-\tau_1)} - 2\beta B(t) \right\}, \quad (12)$$

式中:

$$B(t) = \begin{cases} \frac{w_1w_2e^{-\sqrt{\Delta}(T-t)} - w_1w_2}{w_1e^{-\sqrt{\Delta}(T-t)} - w_2}, & \Delta > 0, \\ \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \tan \left[\arctan \frac{b}{\sqrt{-\Delta}} - \frac{\sqrt{-\Delta}(T-t)}{2} \right] - \frac{b}{2a}, & \Delta < 0, \\ \frac{b}{2a + ab(T-t)} - \frac{b}{2a}, & \Delta = 0. \end{cases} \quad (13)$$

证明 根据效用函数的形式, 首先猜测式(10)的解满足

$$H(t, s, v) = \left(A(t)e^{B(t)s^{-2\beta}} \right)^{1-p} \frac{v^p}{p}, \quad (14)$$

其中边界条件为 $A(T) = 1$, $B(T) = 0$. 对值函数 $H(t, s, v)$ 关于 t 、 s 、 v 分别求导可得

$$\begin{cases} H_t = (1-p) \left(A_t + A(t)B_t s^{-2\beta} \right) e^{B(t)s^{-2\beta}} \times \left(A(t)e^{B(t)s^{-2\beta}} \right)^{-p} v^p / p, \\ H_v = \left(A(t)e^{B(t)s^{-2\beta}} \right)^{1-p} v^{p-1}, \\ H_s = -2\beta(1-p)s^{-2\beta-1}A(t)^{1-p}B(t) \left(e^{B(t)s^{-2\beta}} \right)^{1-p} \times v^p / p, \\ H_{vv} = -(1-p) \left(A(t)e^{B(t)s^{-2\beta}} \right)^{1-p} v^{p-2}, \\ H_{vs} = -2\beta(1-p)s^{-2\beta-1}A(t)^{1-p}B(t) \left(e^{B(t)s^{-2\beta}} \right)^{1-p} \times v^{p-1}, \\ H_{ss} = 4\beta^2(1-p)^2s^{-4\beta-2}A(t)^{1-p}B(t)^2 \times \left(e^{B(t)s^{-2\beta}} \right)^{1-p} v^p / p + 2\beta(2\beta+1)(1-p) \times s^{-2\beta-2}A(t)^{1-p}B(t) \left(e^{B(t)s^{-2\beta}} \right)^{1-p} v^p / p. \end{cases} \quad (15)$$

将式(15)代入式(10), 可以得到

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{A_t}{A(t)} + \beta(2\beta+1)k^2B(t) + \frac{(1-\tau_0)rp}{1-p} \right\} v^p + \\ & s^{-2\beta} \left\{ B_t + \left[\frac{2rp\beta(1-\tau_0)}{(1-\tau_1)(1-p)} - \frac{2\mu\beta}{1-p} \right] B(t) + \right. \\ & \left. 2k^2\beta^2B(t)^2 + \frac{[r(1-\tau_0) - \mu(1-\tau_1)]^2p}{2(1-\tau_1)^2k^2(1-p)^2} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

对方程(16)进行变量分离可得如下两个方程:

$$\frac{A_t}{A(t)} + \beta(2\beta+1)k^2B(t) + \frac{(1-\tau_0)rp}{1-p} = 0, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & B_t + 2k^2\beta^2B(t)^2 + \left[\frac{2rp\beta(1-\tau_0)}{(1-\tau_1)(1-p)} - \frac{2\mu\beta}{1-p} \right] B(t) + \\ & \frac{p[r(1-\tau_0) - \mu(1-\tau_1)]^2}{2k^2(1-p)^2(1-\tau_1)^2} = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

方程(18)是一个黎卡提方程, 直接对方程求解可得 $B(t)$ 满足式(13). 求解方程(17)可得

$$A(t) = e^{\beta(2\beta+1)k^2 \int_t^T B(u)du + \frac{(1-\tau_0)rp}{1-p}(T-t)}, \quad (19)$$

最后将式(15)中的 H_v 、 H_{vv} 、 H_{vs} 代入式(9)可得

$$\pi_t^* = \frac{1}{(1-\tau_1)s^{2\beta}} \left\{ \frac{\mu(1-\tau_1)-r(1-\tau_0)}{(1-p)k^2(1-\tau_1)} - 2\beta B(t) \right\}. \quad (20)$$

注1~3是定理1的特殊情况, 其中注1是风险资产价格满足几何布朗运动且对资产收益征收资本利得税时的最优投资策略, 注2是对市场中资产收益不征收资本利得税时在常弹性方差模型下的最优投资策略, 注3是经典 Merton 最优投资策略.

注1 当风险资产价格满足几何布朗运动, 即 $\beta=0$ 时, 幂效用函数下的最优投资策略满足

$$\pi_t^* = \frac{\mu(1-\tau_1)-r(1-\tau_0)}{(1-p)k^2(1-\tau_1)^2}. \quad (21)$$

证明 将 $\beta=0$ 代入式(12)即可得到式(21).

注2 当对市场中的资产收益不征收资本利得税, 即 $\tau_0=\tau_1=0$ 时, 幂效用函数下最优投资策略满足

$$\pi_t^* = \frac{(\mu-r)s^{-2\beta}}{(1-p)k^2} - 2\beta B(t)s^{-2\beta}. \quad (22)$$

证明 将 $\tau_0=\tau_1=0$ 代入式(12)即可得到式(22).

注3 当风险资产价格满足几何布朗运动且对市场中的资产收益不征收资本利得税, 即 $\beta=0$, $\tau_0=\tau_1=0$ 时, 幂效用函数下最优投资策略满足

$$\pi_t^* = \frac{\mu-r}{(1-p)k^2}. \quad (23)$$

证明 将 $\beta=0$ 代入式(22)即可得到式(23).

2.2 指数效用下的最优投资策略

指数效用函数在保险精算学中具有非常重要的作用, 它是唯一能体现“零效用”公平保费原则的效用函数. 假设投资者的效用函数是指数效用函数, 满足:

$$U(v) = -\frac{1}{q}e^{-qv}, \quad (24)$$

式中: $q>0$.

定理2 指数效用下的最优投资策略 π_t^* 为

$$\pi_t^* = \left[\frac{\mu(1-\tau_1)-r(1-\tau_0)}{(1-\tau_1)^2 q v k^2 s^{2\beta}} + \frac{2\beta s^{-2\beta} \bar{B}(t)}{(1-\tau_1)v} \right] \times e^{-(1-\tau_0)r(T-t)}. \quad (25)$$

证明 在式(24)所述指数效用函数情况下, 猜测方程(10)的解满足

$$H(t, s, v) = -\frac{1}{q} e^{-q[m(t)v + \bar{A}(t) + \bar{B}(t)s^{-2\beta}]}, \quad (26)$$

其中边界条件 $m(T)=1$, $\bar{A}(T)=0$, $\bar{B}(T)=0$. 值函数 $H(t, s, v)$ 关于 t 、 s 、 v 分别求导可得

$$\begin{cases} H_t = -q[m_t v + \bar{A}_t + \bar{B}_t s^{-2\beta}] H(t, s, v), \\ H_v = -q m(t) H(t, s, v), \\ H_{vv} = q^2 m(t)^2 H(t, s, v), \\ H_s = 2q\beta s^{-2\beta-1} \bar{B}(t) H(t, s, v), \\ H_{ss} = [4q^2 \beta^2 s^{-4\beta-2} \bar{B}^2(t) - 4q\beta^2 s^{-2\beta-2} \bar{B}(t) - 2q\beta s^{-2\beta-2} \bar{B}(t)] H(t, s, v), \\ H_{vs} = -2\beta q^2 m(t) s^{-2\beta-1} \bar{B}(t) H(t, s, v), \end{cases} \quad (27)$$

式中: m_t 是 $m(t)$ 对 t 的导数. 再将式(27)代入式(10), 可以得到如下方程:

$$\begin{aligned} & [m_t + r(1-\tau_0)m(t)]v + \bar{A}_t + \beta(2\beta+1)k^2 \bar{B}(t) + \\ & s^{-2\beta} \left\{ \bar{B}_t - \frac{2r(1-\tau_0)}{1-\tau_1} \beta \bar{B}(t) + \frac{[r(1-\tau_0)-\mu(1-\tau_1)]^2}{2q(1-\tau_1)^2 k^2} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

对方程(28)进行分离变量可得

$$\begin{cases} m_t + r(1-\tau_0)m(t) = 0, \\ \bar{A}_t + \beta(2\beta+1)k^2 \bar{B}(t) = 0, \\ \bar{B}_t - \frac{(1-\tau_0)}{1-\tau_1} 2r\beta \bar{B}(t) + \frac{[r(1-\tau_0)-\mu(1-\tau_1)]^2}{2q(1-\tau_1)^2 k^2} = 0. \end{cases} \quad (29)$$

然后对式(29)求解, 可以得到其方程解的表达式满足

$$\begin{cases} m(t) = e^{(1-\tau_0)r(T-t)}, \\ \bar{B}(t) = \frac{[r(1-\tau_0)-\mu(1-\tau_1)]^2}{4(1-\tau_0)(1-\tau_1)r\beta q k^2} \left[1 - e^{\frac{1-\tau_0}{1-\tau_1} 2r\beta(t-T)} \right], \\ \bar{A}(t) = \frac{(2\beta+1)[r(1-\tau_0)-\mu(1-\tau_1)]^2}{4(1-\tau_0)(1-\tau_1)r q} \times \\ \left[\frac{(1-\tau_1) \left(1 - e^{\frac{1-\tau_0}{1-\tau_1} 2r\beta(t-T)} \right)}{(1-\tau_0)2r\beta} \right]. \end{cases} \quad (30)$$

将式(30)中的 $m(t)$ 、 $\bar{B}(t)$ 、 $\bar{A}(t)$ 代入式(27), 再将式(27)中的 H_v 、 H_{vv} 、 H_{vs} 代入式(9), 可得 π_t^* 满足

$$\pi_t^* = \frac{[\mu(1-\tau_1)-r(1-\tau_0)] + 2(1-\tau_1)\beta k^2 q \bar{B}(t)}{(1-\tau_1)^2 q v k^2 s^{2\beta} m(t)}, \quad (31)$$

最后由 $m(t) = e^{(1-\tau_0)r(T-t)}$ 可得最优投资策略 π_t^* 由式(25)表示.

下面考虑定理 2 的几个特殊情况——当对市场中的资产收益不征收资本利得税时, 指数效用函数下最优投资策略的表达式.

注 4 当风险资产价格满足几何布朗运动, 即 $\beta = 0$ 时, 指数效用函数下最优投资策略满足

$$\pi_t^* = \frac{\mu(1-\tau_1) - r(1-\tau_0)}{(1-\tau_1)^2 qvk^2} e^{-(1-\tau_0)r(T-t)}. \quad (32)$$

证明 将 $\beta = 0$ 代入式(25)即可得到式(32).

注 5 当对市场中的资产收益不征收资本利得税, 即 $\tau_0 = \tau_1 = 0$ 时, 指数效用函数下最优投资策略满足

$$\pi_t^* = \frac{(\mu-r)s^{-2\beta} e^{-r(T-t)}}{qvk^2} \left\{ 1 + \frac{\mu-r}{2r} (1 - e^{-2r\beta(T-t)}) \right\}. \quad (33)$$

证明 将 $\tau_0 = \tau_1 = 0$ 代入式(25)即可得到式(33).

注 6 当风险资产价格满足几何布朗运动且对市场中的资产收益不征收资本利得税, 即 $\beta = 0$, $\tau_0 = \tau_1 = 0$ 时, 指数效用函数下最优投资策略满足

$$\pi_t^* = \frac{(\mu-r)e^{-r(T-t)}}{qvk^2}. \quad (34)$$

证明 将 $\beta = 0$ 代入式(33)即可得到式(34).

3 数值分析

本节给出幂效用和指数效用下最优投资策略 π_t^* 的数值结果和经济学解释, 分析模型参数、风险厌恶系数和资产收益所得税率对最优投资策略的影响. 为了简便, 仅分析 $t=0$ 的情况, 对于 $t>0$ 的情况, 采用相同方法即可得到最优投资策略.

数值分析中的模型参数值部分参考文献[18]. 初始财富的价值为 100, 即 $V_0 = v = 100$. 风险厌恶系数分别为 $p = -4$, $q = 0.05$. 在整个数值分析过程中, 除非另有说明, 所有模型参数值见表 1.

表 1 模型参数值

r	τ_0	τ_1	μ	β	k
0.03	0.1	0.2	0.12	-1	6
s	p	q	v	T	t
20	-4	0.05	100	5	0

图 1 和图 2 揭示了在幂效用和指数效用下风险厌恶系数 p 、 q 以及风险资产价格的弹性系数 β 对

最优投资策略的影响程度. 由图 1 和图 2 可以发现, 不论在幂效用还是指数效用下, 最优投资策略与弹性系数 β 的绝对值之间都呈正相关. 这意味着弹性系数 β 的负值越大, 投资在风险资产上的比例越高, 随着 β 的负增长, 股票价格出现大幅波动的可能性减小, 股票价格的市场风险降低. 因此, 投资者愿意提高投资股票的比例. 此外, 从图 1 和图 2 中还可以看出, 随着风险厌恶系数的增加, 投资风险资产的比例降低, 与预期一致. 其原因是风险厌恶系数代表投资者对风险的厌恶程度, 投资者对风险的厌恶程度越高, 投资者投资风险资产的比例越低, 投资无风险资产的比例越高.

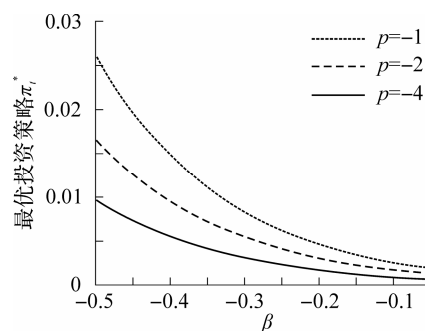


图 1 幂效用下 β 、 p 对最优投资策略 π_t^* 的影响

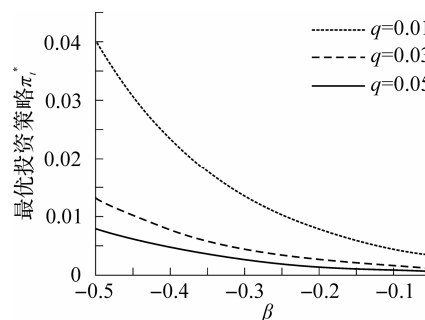
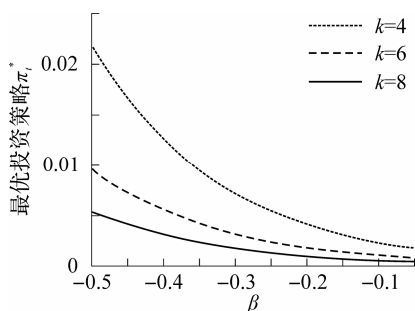
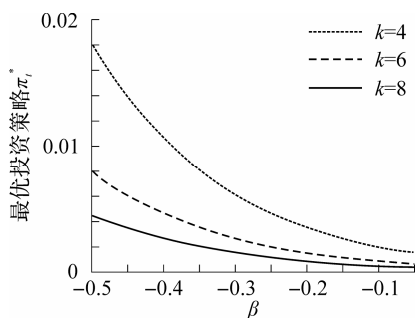


图 2 指数效用下 β 、 q 对最优投资策略 π_t^* 的影响

通过分析图 3 和图 4 可以发现, 波动率系数 k 和最优投资策略 π_t^* 之间呈负相关, 无论是在幂效用下还是指数效用下, 随着波动率系数的增大, 最优投资策略随之减小. 这是因为波动率系数和股票的波动率有关, 从股票波动率的表达式可以看出, 当波动率系数越大时, 股票价格的波动率越大, 因此股票价格的风险越大. 当投资者面临更高的波动率风险时, 自然会降低对风险资产股票的投资比例. 此外, 对比图 3 和图 4 还可以发现, 在幂效用和指数效用下, 数值结果相差不大而且趋势相同.

图3 幂效用下 β 、 k 对最优投资策略 π_t^* 的影响图4 指数效用下 β 、 k 对最优投资策略 π_t^* 的影响

由图5和图6可知, 风险资产的预期收益率 μ 与最优投资策略 π_t^* 呈正相关, 预期收益率 μ 越高, 意味着投资者投资风险资产的回报越大, 因此投资者会加大对风险资产的投资比例. 预期收益率 μ 在0到0.03之间时, 最优投资策略 π_t^* 是负值; 预期收益率 μ 大于0.03时, 最优投资策略 π_t^* 是正值; 预期收益率 $\mu=0.03$ 时, 最优投资策略 $\pi_t^*=0$. 这是因为无风险利率 $r=0.03$, 故当预期收益率 μ 在0到0.03之间时, 风险溢价 $\mu-r$ 为负, 对于投资者来说, 最好的选择自然是卖空风险资产, 投资无风险资产. 而当预期收益率 μ 大于无风险利率时, 相比较无风险资产, 投资风险资产能够获得更高的回报, 因此最优投资策略 π_t^* 是正值. 当预期收益率 $\mu=r$ 时, 也就是投资风险资产和无风险资产的回报一样, 因此投资者自然不选择投资风险资产.

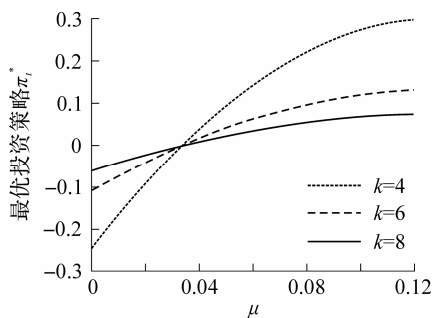
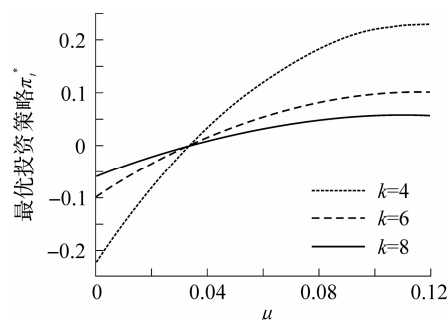
图5 幂效用下 μ 、 k 对最优投资策略 π_t^* 的影响图6 指数效用下 μ 、 k 对最优投资策略 π_t^* 的影响

图7和图8给出了无风险利率 r 对最优投资策略 π_t^* 的影响. 从图7和图8中发现最优投资策略 π_t^* 是无风险利率 r 的减函数. 当预期收益率保持不变时, 无风险利率越高, 风险溢价越低. 因此无风险利率越高, 投资者们往往越不愿意承担高风险去投资风险资产, 而更愿意选择风险低、收益稳定的无风险资产.

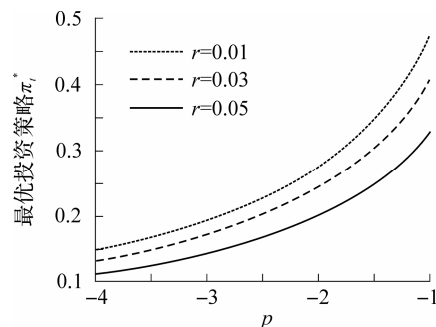
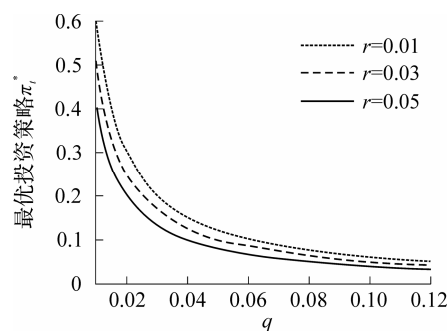
图7 幂效用下 r 对最优投资策略 π_t^* 的影响图8 指数效用下 r 对最优投资策略 π_t^* 的影响

图9和图10展示了股票初始价格 s 和时间 t 对最优投资策略 π_t^* 的影响. 对于常弹性方差模型来说, 因为常弹性系数是负值, 故当股票初始价格 s 增加时, 股票的瞬时波动率降低, 从而导致股票的市场价格风险降低, 因此投资者会加大对股票的投资, 这与图9和图10所观察的结果一致. 此外, 当时间 t 减小时, $T-t$ 增加, 意味着存在更长的投

资期限, 投资者将会面临更多的不确定性以及更大的风险. 因此, 当投资期限 $T-t$ 增加时, 投资者会减少对股票的投资.

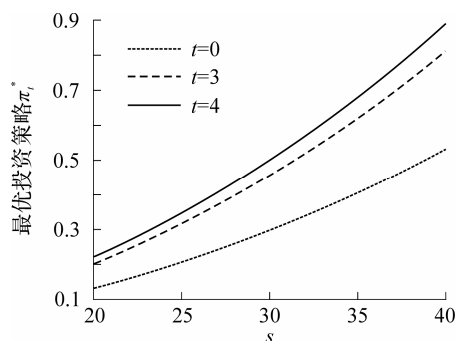


图9 幂效用下 s 、 t 对最优投资策略 π_t^* 的影响

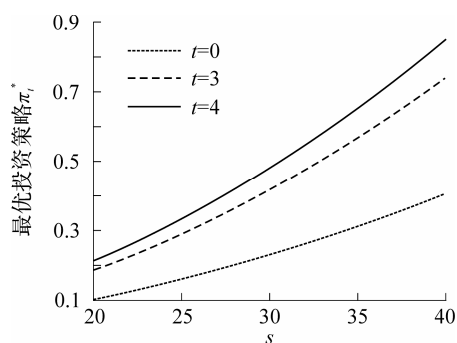


图10 指数效用下 s 、 t 对最优投资策略 π_t^* 的影响

由图 11 和图 12 可以发现, 最优投资策略 π_t^* 是关于风险资产收益征收税率 τ_1 的减函数, 是无风险资产的收益征收税率 τ_0 的增函数. 这是因为当政府加大对风险资产的收益征税时, 投资者从风险资产中获得的收益将减少, 从而他们会选择降低对风险资产的投资而加大对无风险资产的投资; 而当政府加大对无风险资产投资收益征税而保持对风险资产收益征收税率一定时, 投资者就会因投资无风险资产的收益减少, 而加大对风险资产的投资. 这与图 11 和图 12 所示结果是一致的.

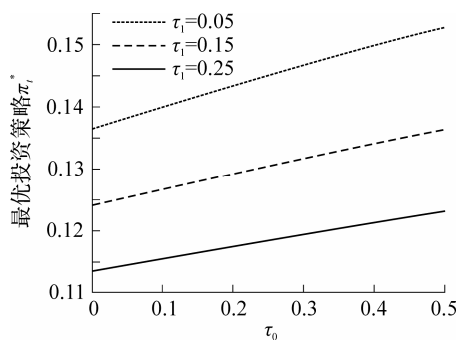


图11 幂效用下 τ_0 、 τ_1 对最优投资策略 π_t^* 的影响

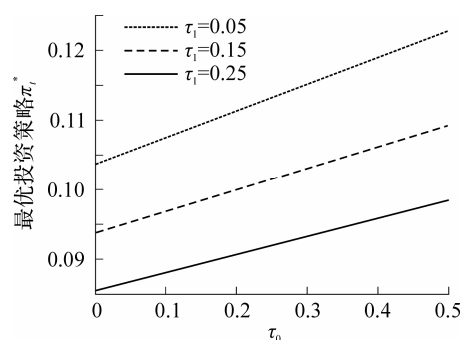


图12 指数效用下 τ_0 、 τ_1 对最优投资策略 π_t^* 的影响

4 结论

本文假设风险资产价格满足常弹性方差模型, 且金融市场中的资产收益将被征收资本利得税, 首先建立了最终财富期望效用的最大化模型, 运用动态规划原理得到了对应的 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程, 再通过求解该方程得到了幂效用和指数效用两种情形下最优投资策略的解析解, 最后通过数值结果分析了不同模型参数对最优投资策略的影响. 结果表明: (1)当弹性系数为负时, 随着风险资产价格的增加, 风险资产的波动率降低, 因此投资者会加大对风险资产的投资; (2)在幂效用和指数效用下, 最优投资策略与风险资产的回报率呈正相关, 与无风险利率呈负相关; (3)随着风险资产的收益税率增大, 高税率导致投资风险资产的比例减小, 从而投资者会加大对无风险资产的投资份额, 这就是常见的风险规避现象.

参考文献:

- [1] Merton R C. Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case[J]. The Review of Economics and Statistics, 1969, 51(3):247-257.
- [2] Merton R C. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model[J]. Journal of Economic Theory, 1971, 3(4):373-413.
- [3] Bielecki T R, Jang I. Portfolio optimization with a defaultable security[J]. Asia-Pacific Financial Markets, 2006, 13(2):113-127.
- [4] Elliott R J, Siu T K. Robust optimal portfolio choice under Markovian regime-switching model[J]. Methodology and Computing in Applied Probability, 2009, 11(2):145-157.
- [5] Jin X, Zhang K. Dynamic optimal portfolio choice in a jump-diffusion model with investment constraints[J].

- Journal of Banking & Finance, 2013, 37(5):1733-1746.
- [6] Sun Z Y, Guo J Y. Optimal mean-variance investment and reinsurance problem for an insurer with stochastic volatility[J]. Mathematical Methods of Operations Research, 2018, 88(1):59-79.
- [7] Bi J, Chen K. Optimal investment-reinsurance problems with common shock dependent risks under two kinds of premium principles[J]. RAIRO - Operations Research, 2019, 53(1):179-206.
- [8] Wang W Y, Muravey D, Shen Y, et al. Optimal investment and reinsurance strategies under 4/2 stochastic volatility model[J/OL]. Scandinavian Actuarial Journal, 2022 [2022-11-13]. <https://doi.org/10.1080/03461238.2022.2108335>.
- [9] Cox J C, Ross S A. The valuation of options for alternative stochastic processes[J]. Journal of Financial Economics, 1976, 3(1/2):145-166.
- [10] Zhao H, Rong X. Portfolio selection problem with multiple risky assets under the constant elasticity of variance model[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2012, 50(1):179-190.
- [11] Li D P, Rong X M, Zhao H. Time-consistent investment strategy for DC pension plan with stochastic salary under CEV model[J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2016, 29(2):428-454.
- [12] Li D P, Rong X M, Zhao H, et al. Equilibrium investment strategy for DC pension plan with default risk and return of premiums clauses under CEV model[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2017, 72:6-20.
- [13] 刘小涛, 刘海龙. CEV 模型下基于双曲绝对风险厌恶效用的最优投资策略[J]. 系统工程理论与实践, 2020, 40(1):1-12.
- [14] 阿春香, 邵仪. CEV 模型下时滞最优投资与再保险问题[J]. 运筹学学报, 2020, 24(1):73-87.
- [15] Deng Y C, Li M, Huang Y, et al. Robust optimal strategies for an insurer under generalized mean-variance premium principle with defaultable bond[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 2021, 50(21):5126-5159.
- [16] Gallmeyer M F, Kaniel R, Tompaidis S. Tax management strategies with multiple risky assets[J]. Journal of Financial Economics, 2006, 80(2):243-291.
- [17] Ma Y, Shan S P, Xu W D. Optimal investment and consumption in the market with jump risk and capital gains tax[J]. Journal of Industrial and Management Optimization, 2019, 15(4):1937-1953.
- [18] Gao J W. Optimal portfolios for DC pension plans under a CEV model[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2009, 44(3):479-490.

Optimal investment strategies with capital gains tax under constant elasticity of variance model

LI Qianyan, WANG Wei*

(School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: The optimal investment problem with capital gains tax under the constant elastic variance model is studied in this article. Furthermore, it is assumed that there are two kinds of investable assets in the financial market: a risk-free bond and a risk asset. The price dynamics of risk asset is assumed to satisfy the constant elastic variance model and the income of these two assets will be taxed at different tax rates. Based on the goal of maximizing the expected utility of terminal wealth, the corresponding Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equation is established using the principle of stochastic dynamic programming. By solving the HJB equation and using the first-order optimal conditions, the analytical solutions of the optimal investment strategies under power utility and exponential utility are obtained respectively. Finally, the numerical results and economic explanations are given in this article.

Key words: capital gains tax; constant elasticity of variance; dynamic programming; optimal investment

(责任编辑 韩 超)