

DOI: 10.20098/j.cnki.1001-5132.2023.0329

一个关于处于一般位置的 nef 除子补的 Brody 双曲性结果

范 春, 于光升*

(宁波大学 数学与统计学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 为了建立关于 nef 除子补的 Brody 双曲性的定量结果, 采用了 Nevanlinna 理论的方法. 首先给出一个关于非常值的全纯曲线与处于一般位置的除子交的 Nevanlinna 理论第二基本定理型结果, 然后通过构造适当的 nef 和 ample 除子, 给出了全纯曲线的像在不取某些 nef 除子时必为常值的结果.

关键词: Nevanlinna 理论; 第二基本定理; 一般位置; Brody 双曲

中图分类号: O174

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2023) 05-0091-06

Ru^[1]给出了关于一般射影簇中的代数非退化的全纯曲线与处于一般位置的超曲面交的第二基本定理, 该方法主要是通过射影簇上的 ample 线丛的截面, 将射影簇嵌入到高维的复射影空间中, 将除子转化为射影空间中的超平面, 再对超平面利用经典的 Cartan 第二基本定理, 建立对应的超曲面或一般除子情形的结果. 该方法后期有了新进展^[2-6], 出现了一些新的概念和新的滤列技术. 最近, 将 Nevanlinna 理论的第二基本定理推广到一般闭子概形方面有较多研究成果^[7-8], 并被 Heier 等^[9]成功用来研究 nef 除子补的双曲性.

本文为了建立关于 nef 除子补的 Brody 双曲性的定量结果, 采用了 Nevanlinna 理论方法. 有别于文献[10]关于除子处于弱的次一般位置的结果, 本文考虑了次一般位置的情形, 从而有了关于除子个数的更小的下界估计.

设 X 是一个 n 维复射影簇, $Y_1, \dots, Y_q$ 是 X 中的闭子概形.

定义 1 设 m 是正整数:

(a) 闭子概形 $Y_1, \dots, Y_q$ 称为处于弱的 m -次一般位置, 如果对任意 $x \in X$, $Y_1, \dots, Y_q$ 中最多有 m 个包含 x . 当 $m = n$ 时, $Y_1, \dots, Y_q$ 称为处于弱的一般位置.

(b) 闭子概形 $Y_1, \dots, Y_q$ 称为处于 m -次一般位置, 如果对任意子集 $I \subset \{1, \dots, q\}$, $\#I \leq m+1$, $\dim \bigcap_{i \in I} Y_i \leq m - \#I$. 当 $m = n$ 时, $Y_1, \dots, Y_q$ 称为处于一般位置.

利用关于一般闭子概形的 Seshadri 常数, 文献[8]得到了如下结果.

定理 1^[8] 设 X 是 n 维复射影簇, $Y_1, \dots, Y_q$ 是 X 上处于一般位置的闭子概形. 设 A 是 X 上一个 ample Cartier 除子, $f: \mathbb{C} \rightarrow X$ 是代数非退化全纯曲线, 则对任意 $\varepsilon > 0$,

$$\left\| \sum_{j=1}^q \epsilon_{Y_j}(A) m_f(r, Y_j) \right\| \leq (n+1+\varepsilon) T_{f,A}(r), \quad (1)$$

这里(以及后续)“ $\|$ ”表示上述不等式在除掉一个 Lebesgue 测度有限的集合外成立.

He 等^[11]考虑了次一般位置的情况, 并给出了更一般的结果.

定理 2^[11] 设 X 是 n 维复射影簇, $m \geq n$ 是正整数, $Y_1, \dots, Y_q$ 是 X 上处于 m -次一般位置的闭子概形. 设 A 是 X 上一个 ample Cartier 除子, $f: \mathbb{C} \rightarrow X$ 是代数非退化全纯曲线, 则对任意 $\varepsilon > 0$,

$$\left\| \sum_{j=1}^q \epsilon_{Y_j}(A) m_f(r, Y_j) \right\| \leq ((m-n+1)(n+1)+\varepsilon) T_{f,A}(r). \quad (2)$$

收稿日期: 2023-03-27.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journal.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(12271275).

第一作者: 范春(1998-), 女, 四川自贡人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 多复变函数. E-mail: m17341738870@163.com

*通信作者: 于光升(1991-), 男, 山东日照人, 博士/副教授, 主要研究方向: 多复变函数. E-mail: yuguangsheng@nbu.edu.cn

最近, Yu^[10]又考虑了弱的 m -次一般位置的情形.

结合文献[8]和文献[11]的结果, 以及文献[10]的方法, 我们有如下非常值全纯曲线和处于一般位置的除子交的第二基本定理型结果.

定理 3 设 X 是 n 维复射影簇, $D_1, \dots, D_q$ 是 X 上处于一般位置的非零有效 Cartier 除子, A 是 X 上一个 ample Cartier 除子, $f: \mathbb{C} \rightarrow X$ 是非常值全纯曲线. 如果存在正有理数 $c_1, \dots, c_q$, 使得对于所有 $j=1, \dots, q: A - c_j D_j$ 是 $\mathbb{Q}$ -nef 的, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 有:

$$\left\| \sum_{j=1}^q c_j m_f(r, D_j) \right\| \leq \left(\left((n+1)/2 \right)^2 + \varepsilon \right) T_{f,A}(r). \quad (3)$$

作为定理 3 的应用, 利用文献[9]方法, 我们有关于 nef 除子补的 Brody 双曲性结果.

首先回顾 Brody 双曲性的定义.

定义 2 (Brody 双曲性) 一个复的簇称为拟 Brody 双曲的, 如果所有从 $\mathbb{C}$ 出发的非常值全纯映射的像都不是 Zariski 稠密的. 一个复的簇称为 Brody 双曲的, 如果其上没有从 $\mathbb{C}$ 出发的非常值全纯映射.

在除子处于次一般位置的条件下, 得到如下 nef 除子补的 Brody 双曲性结果.

定理 4 设 X 是一个 n 维射影簇, $E_1, \dots, E_r$ 是 X 上 nef Cartier 除子, 且 $\sum_{i=1}^r E_i$ 是 ample 的, $D_1, \dots, D_q$ 是 X 上处一般位置的非零有效 Cartier 除子. 设 $D_j \equiv \sum_{i=1}^r a_{j,i} E_i$, $a_{j,i} \in \mathbb{R}_{>0}$, 令

$$P_j = (a_{j,1}, \dots, a_{j,r}) \in \mathbb{R}^r, j=1, \dots, q.$$

假设对 $\mathbb{R}^r$ 标准正交基 $\{e_1, \dots, e_r\}$ 的任意真子集 T , 向量 $P_1, \dots, P_q$ 中至多有 $(\#T) \lfloor q/r \rfloor$ 个支撑在 (supported on) T 上. 若

$$q \geq r \left((n+1)/2 \right)^2 + r(r+1)/2, r=1, 2,$$

$$q \geq r \left((n+1)/2 \right)^2 + r(r-1)/2, r \geq 3,$$

则 $X \setminus (\bigcup_{j=1}^q \text{Supp } D_j)$ 是 Brody 双曲的.

1 预备知识

首先, 给出关于一般闭子概形的 Seshadri 常数的概念.

定义 3^[8] 设 X 是射影簇, Y 是 X 的闭子概形,

$\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ 是 X 沿 Y 的 blow-up, A 是 X 上一个 nef Cartier 除子. 定义 Y 关于 X 的 Seshadri 常数 $\epsilon_Y(A)$ 为:

$$\epsilon_Y(A) = \sup \{ \gamma \in \mathbb{Q}_{\geq 0} \mid \pi^* A - \gamma E \text{ 是 } \mathbb{Q}\text{-nef 的} \}.$$

Seshadri 常数有如下限制到子簇上不减的性质.

引理 1 (文献[10]中命题 2.1) 设 X 是射影簇, X' 是 X 的子簇, $i: X' \rightarrow X$ 是包含映射. 设 A 是 X 上一个 nef Cartier 除子, Y 是 X 的闭子概形, 则有:

$$\epsilon_{i^*Y}(i^*A) \geq \epsilon_Y(A).$$

下面, 给出 Weil 函数的定义, 可参考文献[12].

设 Y 是射影簇 X 上的一个闭子概形. 可以对 Y 赋予一个 Weil 函数 $\lambda_Y: (X \setminus \text{Supp } Y) \rightarrow \mathbb{R}$, 其差一个有界量是良定义的, 它满足以下性质: 如果 Y 和 Z 是 X 的两个闭子概形, 且 $\phi: X' \rightarrow X$ 是射影簇之间的一个态射, 则 (i) $\lambda_{Y \cap Z} = \min \{ \lambda_Y, \lambda_Z \}$; (ii) $\lambda_{Y+Z} = \lambda_Y + \lambda_Z$; (iii) $\lambda_Y \leq \lambda_Z$, 如果 $Y \subset Z$; (iv) $\lambda_Y(\phi(X)) = \lambda_{\phi^*Y}(X)$.

设 X 是复射影簇, $f: \mathbb{C} \rightarrow X$ 是全纯映射. 设 $\mathcal{L} \rightarrow X$ 是一个 ample 线丛, 且 ω 是它的 Chern 形式的一个代表元. 定义 f 关于 $\mathcal{L}$ 的特征函数为:

$$T_{f,\mathcal{L}}(r) = \int_1^r dt/t \int_{|z|<t} f^* \omega.$$

X 上任一线丛 $\mathcal{L}$ 都可以写成 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2^{-1}$, 其中 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 是 ample 的, 定义

$$T_{f,\mathcal{L}}(r) = T_{f,\mathcal{L}_1}(r) - T_{f,\mathcal{L}_2}(r).$$

设 D 是 X 上的除子, $\mathcal{O}(D)$ 是其伴随线丛, 定义 f 关于 D 的特征函数为 $T_{f,D}(r) := T_{f,\mathcal{O}(D)}(r)$.

特征函数满足下列性质:

(a) 函子性: 设 $\phi: X \rightarrow X'$ 是一态射, $\mathcal{L}$ 是 X' 上的线丛, 则

$$T_{f,\phi^*\mathcal{L}}(r) = T_{\phi \circ f, \mathcal{L}}(r) + O(1).$$

(b) 可加性: 设 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 都是 X 上的线丛, 则

$$T_{f,\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2}(r) = T_{f,\mathcal{L}_1}(r) + T_{f,\mathcal{L}_2}(r) + O(1).$$

(c) 正性: 若 $\mathcal{L}$ 是 ample 的, 且 $f: \mathbb{C} \rightarrow X$ 非常值, 则当 $r \rightarrow +\infty$ 有 $T_{f,\mathcal{L}}(r) \rightarrow +\infty$.

设 $Y \subset X$ 是闭子概形, 定义 f 关于 Y 的接近度函数为:

$$m_f(r, Y) = \int_0^{2\pi} \lambda_Y(f(re^{i\theta})) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

对 X 上的除子 D , 定义 $f: \mathbb{C} \rightarrow X$ 关于 D 的计数函数为:

$$N_f(r, D) = \int_1^r \left(\sum_{\{z \in \mathbb{C} | |z| < t\}} \text{ord}_z f^* D \right) \frac{dt}{t}.$$

接近度函数和计数函数有类似的函子性和可加性, 不再赘述.

由 Poincaré-Lelong 公式, 有第一基本定理:

$$m_f(r, D) + N_f(r, D) = T_{f,D}(r) + O(1). \quad (4)$$

2 定理 3 的证明

因为 $f: \mathbb{C} \rightarrow X$ 是非常值的, 设 $f(\mathbb{C})$ 包含在某一 $k(k \leq n)$ 维不可约子簇 $V = \overline{f(\mathbb{C})}$ 中, 则 $f: \mathbb{C} \rightarrow V$ 是代数非退化的. 考虑包含映射 $i: V \rightarrow X$. 由 $Y_1, \dots, Y_q$ 在 X 中处于一般位置可知, $i^* Y_1, \dots, i^* Y_q$ 在 V 中处于 n -次一般位置, 则由定理 2, 对任意 $\varepsilon > 0$, 有:

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j=1}^q \epsilon_{i^* Y_j} (i^* A) m_f(r, i^* Y_j) \right\| \leq \\ & ((n-k+1)(k+1) + \varepsilon) T_{f, i^* A}(r) \leq \\ & (((n+1)/2)^2 + \varepsilon) T_{f, i^* A}(r). \end{aligned}$$

由接近度函数和特征函数的函子性质有:

$$\begin{aligned} m_f(r, i^* Y_j) &= m_{i^* f}(r, Y_j) + O(1) = \\ & m_f(r, Y_j) + O(1), \\ T_{f, i^* A}(r) &= T_{i^* f, A}(r) + O(1) = T_{f, A}(r) + O(1). \end{aligned}$$

再由引理 1, $\epsilon_{i^* Y_j} (i^* A) \geq \epsilon_{Y_j} (A)$, 从而得到:

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j=1}^q \epsilon_{Y_j} (A) m_f(r, Y_j) \right\| \leq \\ & (((n+1)/2)^2 + \varepsilon) T_{f, A}(r). \end{aligned} \quad (5)$$

如果存在正有理常数 $c_1, \dots, c_q$, 使得对于所有 $j=1, \dots, q: A - c_j D_j$ 是 $\mathbb{Q}$ -nef 的, 则由 Seshadri 常数的定义, 有 $c_j \leq \epsilon_{Y_j} (A)$, 从而由式(5)可得:

$$\left\| \sum_{j=1}^q c_j m_f(r, D_j) \right\| \leq (((n+1)/2)^2 + \varepsilon) T_{f, A}(r).$$

3 定理 4 的证明

证明的关键在于构造满足如下性质的除子.

断言 可以构造一个 ample 除子 A , 且存在正

有理数 $c_1, \dots, c_q, \delta$, 使得对所有 $j=1, \dots, q$, 有:

$$A - c_j D_j \text{ 是 } \mathbb{Q}\text{-nef 的,} \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^q c_j D_j - (((n+1)/2)^2 + \delta) A \text{ 是 } \mathbb{Q}\text{-ample 的.} \quad (7)$$

上述除子的构造如下:

在定理 4 假设下, 取 $\alpha_{1,1}(k), \dots, \alpha_{1,r}(k), \alpha_{2,1}(k), \dots, \alpha_{2,r}(k), \dots, \alpha_{q,1}(k), \dots, \alpha_{q,r}(k)$ 是关于 $k \in (0, 1]$ 的函数, 且满足以下性质:

(a) 函数

$$\begin{cases} \alpha_{j,i}(k) \equiv 0, & \text{如果 } \alpha_{j,i} = 0, \\ \alpha_{j,i}(k) \in \mathbb{R}_{>0}, \text{ s.t. } \lim_{k \rightarrow 0^+} \alpha_{j,i}(k) = 0, & \text{如果 } \alpha_{j,i} \neq 0. \end{cases}$$

(b) 对于 $j=1, \dots, q$, 存在 $\mathbb{R}$ -除子 $B_j(k) = \alpha_{j,1}(k)E_1 + \dots + \alpha_{j,r}(k)E_r$, 使得:

$$D'_j(k) := D_j + B_j(k) = \sum_{i=1}^r a'_{j,i}(k)E_i, \quad (8)$$

式中: $\alpha'_{j,i}(k) = a_{j,i} + \alpha_{j,i}(k)$.

(c) 对于任意真子集 $T \subset \{e_1, \dots, e_r\} \subset \mathbb{R}^r$, 向量 $P'_1(k), \dots, P'_q(k)$ 中至多有 $(\#T) \lfloor q/r \rfloor$ 个支撑在 T 上, 这里

$$P'_1(k) = (a'_{1,1}(k), \dots, a'_{1,r}(k)), \dots,$$

$$P'_q(k) = (a'_{q,1}(k), \dots, a'_{q,r}(k)).$$

(d) 对任意 $i \neq i', j \neq j'$ 有:

$a'_{j,i}(k)a'_{j',i'}(k) - a'_{j,i'}(k)a'_{j',i}(k) \neq 0$, 除非左边的两项为 0.

给定 $G = (g_1, \dots, g_r) \in \mathbb{R}_{>0}^r$, 对 $i=1, \dots, r$ 定义

$$\begin{aligned} n_i(G, P'_1(k), \dots, P'_q(k)) &= \\ & \# \left\{ j \in \{1, \dots, q\} \mid \min_{l=1, \dots, r} \frac{g_l}{a'_{j,l}(k)} = \frac{g_i}{a'_{j,i}(k)} \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

由文献[9]中引理 2.2 可得如下结论:

给定 $0 < k \leq 1$, 对于 $i=1, \dots, r$ 和任意 $l, l' \in \{1, \dots, r\}$, 存在关于 $P'_1(k), \dots, P'_q(k)$ 的

$G'(k) = (g'_1(k), \dots, g'_r(k)) \in \mathbb{Q}^r$, 使得:

$$\begin{aligned} n_i(G'(k), P'_1(k), \dots, P'_q(k)) &\geq \\ & \frac{q}{r} - \frac{r-1}{2}, \quad i=1, \dots, r, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\left(\frac{1}{2} \min \frac{a'_{j,i}(k)}{a'_{j,i'}(k)} \right)^r \leq \frac{g'_i(k)}{g'_{i'}(k)} \leq$$

$$\left(2 \max \frac{a'_{j,i}(k)}{a'_{j',i'}(k)}\right)^r, \quad (11)$$

这里最小值和最大值取遍所有使得

$$a'_{j,i}(k)a'_{j',i'}(k) \neq 0$$

的指标 i, j, i', j' .

由 $a'_{j,i}(k)$ 的定义, 对于充分小的 $\hat{k} > 0$, 存在正有理数 γ_1 和 γ_2 , 使得对所有 $0 < k < \hat{k}$,

$$\gamma_1 < a'_{j,i}(k) < \gamma_2, \quad (12)$$

对于所有 i 和 j 使得, $a'_{j,i}(k) \neq 0$ (等价于 $a_{j,i} \neq 0$).

由于对任意 $\lambda \in \mathbb{Q}_{>0}$,

$$n_i(\mathbf{G}'(k), \mathbf{P}'_1(k), \dots, \mathbf{P}'_q(k)) =$$

$$n_i(\lambda \mathbf{G}'(k), \mathbf{P}'_1(k), \dots, \mathbf{P}'_q(k)),$$

式中: $\lambda \mathbf{G}'(k) = (\lambda g'_1(k), \dots, \lambda g'_r(k))$, 可以用某一 $\lambda \mathbf{G}'(k)$ 替换 $\mathbf{G}'(k)$ 满足式(10)和式(11), 规范化坐标使得 $g'_1(k) = 1$.

由式(11)和式(12)可知, 存在 $\gamma_3 \in \mathbb{Q}_{>0}$ 和 $\gamma_4 \in \mathbb{Q}_{>0}$, 使得对 $i = 1, \dots, r$ 和任意 $0 < k < \hat{k}$,

$$\gamma_3 < g'_i(k) < \gamma_4. \quad (13)$$

固定 $\delta \in \mathbb{Q}_{>0}$, 且

$$\delta < \min \left\{ \frac{\gamma_1 \gamma_3}{2 \gamma_2 \gamma_4}, \frac{1}{2} \right\}, 0 < k_0 = k(\delta) < \hat{k},$$

使得:

$$\delta \gamma_3 \sum_{i=1}^r E_i - \frac{\gamma_4}{\gamma_1} \sum_{j=1}^q B_j(k_0) \text{ 是 } \mathbb{Q} - \text{nef 的.} \quad (14)$$

取 $\mathbf{G}' = \mathbf{G}'(k_0) = (g'_1, \dots, g'_r)$, 且 $g'_1 = 1$. 设

$$A' = g'_1 E_1 + \dots + g'_r E_r, \quad (15)$$

则 A' 是 $\mathbb{Q}$ -ample 的.

定义

$$c'_j := \min_{l=1, \dots, r} \frac{b'_l}{a'_{j,l}(k_0)} < \frac{\gamma_4}{\gamma_1}, j = 1, \dots, q, \quad (16)$$

则 $c'_j \in \mathbb{Q}_{>0}$. 对于 $i = 1, \dots, r$, 由式(8)和式(16)有:

$$A' - c'_j D'_j(k_0) \equiv \sum_{i=1}^r (g'_i - c'_j a'_{j,i}(k_0)) E_i =$$

$$\sum_{i=1}^r a'_{j,i}(k_0) \left(\frac{g'_i}{a'_{j,i}(k_0)} - c'_j \right) E_i,$$

这里 $g'_i / a'_{j,i}(k_0) - c'_j \geq 0$, 表明 $A' - c'_j D'_j(k_0)$ 是一个 nef $\mathbb{R}$ -除子. 由式(8), 有:

$$A' - c'_j D_j \equiv A' - c'_j (D'_j(k_0) - B_j(k_0)) =$$

$$A' - c'_j D'_j(k_0) + c'_j B_j(k_0),$$

因为 $c'_j B_j(k_0)$ 是 nef $\mathbb{R}$ -除子, 所以 $A' - c'_j D_j$ 是 nef $\mathbb{Q}$ -除子.

$$\text{设 } J_i = \left\{ j \in \{1, 2, \dots, q\} \mid c'_j = \frac{g'_i}{a'_{j,i}(k)} \right\},$$

由式(8)、(9)和(16)有:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^q c'_j D'_j(k_0) &\equiv \sum_{j=1}^q \left(\sum_{i=1}^r c'_j a'_{j,i}(k_0) E_i \right) = \\ &\sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=1}^q c'_j a'_{j,i}(k_0) E_i \right) = \\ &\sum_{i=1}^r \left(\sum_{j \in J_i} c'_j a'_{j,i}(k_0) \right) E_i + \sum_{i=1}^r \left(\sum_{j \notin J_i} c'_j a'_{j,i}(k_0) \right) E_i = \\ &\sum_{i=1}^r n_i(\mathbf{G}', \mathbf{P}'_1(k_0), \dots, \mathbf{P}'_q(k_0)) g'_i E_i + \\ &\sum_{i=1}^r \left(\sum_{j \notin J_i} c'_j a'_{j,i}(k_0) \right) E_i. \end{aligned} \quad (17)$$

下面证明

$$\sum_{j=1}^q c'_j D_j - \left(\left(\frac{n+1}{2} \right)^2 + \delta \right) A' \text{ 是 } \mathbb{Q} - \text{ample 的.}$$

当 $r \geq 3$ 时, 由 $q \geq r((n+1)/2)^2 + r(r-1)/2$ 和 $n_i(\mathbf{G}', \mathbf{P}'_1(k_0), \dots, \mathbf{P}'_q(k_0)) \geq q/r - (r-1)/2$ 可知: 对于 $i = 1, \dots, r$,

$$n_i(\mathbf{G}', \mathbf{P}'_1(k_0), \dots, \mathbf{P}'_q(k_0)) \geq ((n+1)/2)^2. \quad (18)$$

对于 $i \in \{1, \dots, r\}$, 根据假设, 向量 $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_q$ 中最多有 $(r-1)\lfloor q/r \rfloor \leq q - q/r$ 个属于

$$\text{Span}(\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r\} \setminus \{\mathbf{e}_i\}).$$

由于

$$q \geq r \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 + \frac{r(r-1)}{2},$$

至少 $\lceil q/r \rceil \geq \lceil ((n+1)/2)^2 \rceil + 1$ 个 $\mathbf{P}'_j(k_0)$ 满足 $a'_{j,i}(k_0) > 0$. 结合式(17)和(18)可得:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^q c'_j D'_j(k_0) &\geq \sum_{i=1}^r \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 g'_i E_i + \\ &\sum_{i=1}^r (\min_j c'_j) \left(\min_{\{j \mid a'_{j,i}(k_0) \neq 0\}} a'_{j,i}(k_0) \right) E_i \geq \\ &\left(\frac{n+1}{2} \right)^2 A' + \frac{\gamma_1 \gamma_3}{\gamma_2} \sum_{i=1}^r E_i \geq \end{aligned}$$

$$\left(\left(\frac{n+1}{2} \right)^2 + \frac{\gamma_1 \gamma_3}{\gamma_2 \gamma_4} \right) A'.$$

由式(12)和(14), 有:

$$\left(\min_j c'_j \right) \geq \frac{\gamma_3}{\gamma_2}.$$

由 $\gamma_1 < \left(\min_{\{j|a'_{j,i}(k_0) \neq 0\}} a'_{j,i}(k_0) \right)$, $\frac{\gamma_3}{\gamma_4} < 1$ 和式(15), 有:

$$\sum_{j=1}^q c'_j D_j \geq \left(\left(\frac{n+1}{2} \right)^2 \right) A' + \frac{\gamma_1 \gamma_3}{\gamma_2} \sum_{i=1}^r E_i \geq \left(\left(\frac{n+1}{2} \right)^2 + \frac{\gamma_1 \gamma_3}{\gamma_2 \gamma_4} \right) A'.$$

由式(8)、(13)、(15)和(16), 有:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^q c'_j D_j - \left(\left(\frac{n+1}{2} \right)^2 + \delta \right) A' &= \sum_{j=1}^q c'_j D'_j(k_0) - \left(\left(\frac{n+1}{2} \right)^2 + 2\delta \right) A' + \delta A' - \sum_{j=1}^q c'_j B_j(k_0) \geq \\ &\left(\left(\frac{n+1}{2} \right)^2 + \frac{\gamma_1 \gamma_3}{\gamma_2 \gamma_4} \right) A' - \left(\left(\frac{n+1}{2} \right)^2 + 2\delta \right) A' + \\ &\delta \gamma_3 \sum_{j=1}^q B_j(k_0) - \frac{\gamma_4}{\gamma_1} \sum_{j=1}^q B_j(k_0) \geq \\ &\left(\frac{\gamma_1 \gamma_3}{\gamma_2 \gamma_4} - 2\delta \right) A'. \end{aligned}$$

由 $\frac{\gamma_1 \gamma_3}{\gamma_2 \gamma_4} - 2\delta > 0$, 可知:

$$\sum_{j=1}^q c'_j D_j - \left(\left(\frac{n+1}{2} \right)^2 + \delta \right) A' \text{ 是 } \mathbb{Q} \text{-ample 的.}$$

当 $r=1$ 时, 由

$$q \geq r \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 + r(r+1)/2 = \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 + 1, \text{ 有:}$$

$$n_i(Q', P'_1(k_0), \dots, P'_q(k_0)) \geq$$

$$\frac{q}{r} - \frac{r-1}{2} \geq \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 + 1, \quad (19)$$

因此

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^q c'_j D'_j(k_0) &\geq \sum_{i=1}^r \left(\left(\frac{n+1}{2} \right)^2 + 1 \right) b'_i E_i = \\ &\left(\left(\frac{n+1}{2} \right)^2 + 1 \right) A'. \end{aligned}$$

由 $A' = g'_1 E_1$, 式(15)、(17)和(19),

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^q c'_j D'_j(k_0) &\geq \left(\left(\frac{n+1}{2} \right)^2 + 1 \right) g'_1 E_1 = \\ &\left(\left(\frac{n+1}{2} \right)^2 + 1 \right) A', \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^q c'_j D_j - \left(\left(\frac{n+1}{2} \right)^2 + \delta \right) A' &= \sum_{j=1}^q c'_j D'_j(k_0) - \left(\left(\frac{n+1}{2} \right)^2 + 2\delta \right) A' + \delta A' - \sum_{j=1}^q c'_j B_j(k_0) \geq \\ &\left(\left(\frac{n+1}{2} \right)^2 + 1 \right) A' - \left(\left(\frac{n+1}{2} \right)^2 + 2\delta \right) A' + \\ &\delta \gamma_3 \sum_{i=1}^r E_i - \frac{\gamma_4}{\gamma_1} \sum_{j=1}^q B_j(k_0) \geq (1-2\delta) A'. \end{aligned}$$

因为 $\delta < 1/2$, 故

$$\sum_{j=1}^q c'_j D_j - \left(\left(\frac{n+1}{2} \right)^2 + \delta \right) A' \text{ 是 } \mathbb{Q} \text{-ample 的.}$$

当 $r=2$ 时, 由

$$q \geq r \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 + r(r+1)/2 = 2 \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 + 3,$$

所以

$$\begin{aligned} n_i(Q', P'_1(k_0), \dots, P'_q(k_0)) &\geq \\ \frac{q}{r} - \frac{r-1}{2} &\geq \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 + 1. \end{aligned}$$

后续证明类似 $r=1$, 在此略去.

综上, 存在一个足够大的正整数 N 使得 NA' 是一个 ample 整除子, A' 是 ample $\mathbb{Q}$ -除子. 令 $A := NA'$ 和 $c_j := Nc'_j$, $1 \leq j \leq q$, 则

$A - c_j D_j$ 是 $\mathbb{Q}$ -nef 的,

且

$$\sum_{j=1}^q c_j D_j - \left(\left(\frac{n+1}{2} \right)^2 + \delta \right) A \text{ 是 } \mathbb{Q} \text{-ample 的.}$$

设 $f: \mathbb{C} \rightarrow X \setminus \sum_{j=1}^q D_j$ 是全纯曲线. 如果 f 是非

常值的, 由式(3)得:

$$\left\| \sum_{j=1}^q c_j m_j(r, D_j) \right\| \leq \left(\left(\frac{n+1}{2} \right)^2 + \delta \right) T_{f,A}(r).$$

由 $f(\mathbb{C}) \cap \left(\bigcap_{j=1}^q \text{Supp} D_j \right) = \emptyset$ 和式(4)可得:

$$\| \sum_{j=1}^q c_j T_f(r, D_j) = \sum_{j=1}^q c_j m_j(r, D_j) + O(1) \leq \left(\left(\frac{n+1}{2} \right)^2 + \delta \right) T_{f,A}(r) + O(1),$$

这与前面构造的

$$\sum_{j=1}^q c_j D_j - \left(\left(\frac{n+1}{2} \right)^2 + \delta \right) A$$

是 $\mathbb{Q}$ -ample 的相矛盾, 因此 f 是常值的.

参考文献:

- [1] Ru M. Holomorphic curves into algebraic varieties[J]. Annals of Mathematics, 2009, 169(1):255-267.
- [2] Levin A. Generalizations of Siegel's and Picard's theorems[J]. Annals of Mathematics, 2009, 170(2):609-655.
- [3] Autissier P. Sur la non-densité des points entiers[J]. Duke Mathematical Journal, 2011, 158(1):13-27.
- [4] Chen Z H, Ru M, Yan Q M. The degenerated second main theorem and Schmidt's subspace theorem[J]. Science China Mathematics, 2012, 55(7):1367-1380.
- [5] Ru M, Vojta P. A birational Nevanlinna constant and its consequences[J]. American Journal of Mathematics, 2020, 142(3):957-991.
- [6] Si D Q. Degeneracy second main theorems for meromorphic mappings into projective varieties with hypersurfaces[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2019, 371(4):2431-2453.
- [7] Ru M, Wang J L. A subspace theorem for subvarieties[J]. Algebra & Number Theory, 2017, 11(10):2323-2337.
- [8] Heier G, Levin A. A generalized Schmidt subspace theorem for closed subschemes[J]. American Journal of Mathematics, 2021, 143(1):213-226.
- [9] Heier G, Levin A. On the degeneracy of integral points and entire curves in the complement of nef effective divisors[J]. Journal of Number Theory, 2020, 217:301-319.
- [10] Yu G S. A second main theorem of Nevanlinna theory for closed subschemes in subgeneral position[J]. Chinese Annals of Mathematics: Series B, 2022, 43(4):567-584.
- [11] He Y, Ru M. A generalized subspace theorem for closed subschemes in subgeneral position[J]. Journal of Number Theory, 2021, 229:125-141.
- [12] Silverman J H. Arithmetic distance functions and height functions in Diophantine geometry[J]. Mathematische Annalen, 1987, 279(2):193-216.

A Brody hyperbolicity result for the complement of nef divisors in general position

FAN Chun, YU Guangsheng*

(School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, 315211, China)

Abstract: The main purpose of this paper is to seek a quantitative Brody hyperbolicity result on the complements of nef divisors using Nevanlinna theory, for which we first find a second main theorem type result of Nevanlinna theory for nonconstant holomorphic curves intersecting divisors in general position. By constructing appropriate nef and ample divisors, we succeed in obtaining the result that the holomorphic curve must be kept constant when omitting some nef divisors.

Key words: Nevanlinna theory; second main theorem; in general position; Brody hyperbolicity

(责任编辑 史小丽)