

2+1 维 Burgers 方程的 Bäcklund 变换及其严格解

金 艳¹, 贾 曼^{2*}

(1. 宁波教育学院, 浙江 宁波 315010; 2. 宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 2+1 维 Burgers 方程是非线性物理中的一个重要模型. 利用截断 Painlevé 分析方法, 建立了一个自 Bäcklund 变换定理, 求得了大量的新的严格解.

关键词: Burgers 方程; 截断 Painlevé 分析; 自 Bäcklund 变换; 新严格解

中图分类号: O415

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2013) 03-0077-03

孤立子理论已经被广泛应用于自然科学的各个分支^[1-2]. 在孤子理论中 1+1 维 Burgers 方程:

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}, \quad (1)$$

是最为简单也是最为重要的一个模型^[3]. 文献[4]发展了一个一般的 tanh 函数展开法求解(1)式, 得到了大量的新的严格解. 文献[5]利用非局域对称相关的对称性约化得到了很多有实际意义的严格解. 文献[6]利用重复对称约化的方法给出了(1)式的无穷多的严格解.

笔者研究了下述 2+1 维 Burgers 方程:

$$u_t - 2uu_x - 2vv_x - u_{xx} - v_{xy} = 0, \quad u_y = v_x, \quad (2)$$

2+1 维 Burgers 方程(2)的多线性分离变量法及其丰富的局域激发模式已在文献[7-9]中研究.

笔者首先采用截断 Painlevé 分析法研究 2+1 维 Burgers 方程(2)的 Bäcklund 变换. 然后利用 Bäcklund 变换来求解, 从而给出更多的新的严格解.

利用标准的 Painlevé 分析方法, 易证明 2+1 维 Burgers 方程(2)具有下述 Painlevé 展开

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \phi^{i-1}, \quad v = \sum_{i=0}^{\infty} v_i \phi^{i-1},$$

其中,

$$u_0 = \phi_x, \quad v_0 = \phi_y,$$

$$v_1 = -(\phi_{xx} + \phi_{yy} + 2u_1\phi_x - \phi_t) / 2\phi_y,$$

$$v_2 = \frac{\phi_y}{\phi_x} u_2 + \frac{u_{1y}}{\phi_x} + \frac{u_{1x}}{\phi_y} - \frac{1}{2\phi_x} \left(\frac{\phi_t - \phi_{xx} - \phi_{yy}}{\phi_y} \right)_x -$$

$$\frac{u_1}{\phi_x} \left(\frac{\phi_x}{\phi_y} \right)_x,$$

ϕ_t , u_1 和 u_2 是任意函数, 而其他 u_i 和 v_i 均由这些任意函数唯一决定.

将这个 Painlevé 展开截断, 即取

$$v_i = u_i = 0, \quad \forall i \geq 2.$$

我们可以得到下述 Bäcklund 变换定理.

定理 1(Bäcklund 变换定理) 如果 $\{u, v\}$ 是 2+1 维 Burgers 方程(2)式的解, ϕ 由(3)式决定,

$$\phi_t = \phi_{xx} + \phi_{yy} + 2u\phi_x + 2v\phi_y, \quad (3)$$

则由

$$u_1 = (\ln \phi)_x + u, \quad v_1 = (\ln \phi)_y + v, \quad (4)$$

给定的 $\{u_1, v_1\}$ 也是 2+1 维 Burgers 方程(2)式的解.

由定理 1 可以得到 2+1 维 Burgers 方程(2)式的无穷多的新解. 下面给出一些有意义的新解. 如果

$$v = r(y, t),$$

则 $u = s(x, t)$ 是 1+1 维 Burgers 方程(2)的解. 此时, ϕ 方程(3)可以由分离变量法求解:

$$\phi = \sum_{i=1}^N p_i q_i, \quad (5)$$

其中对于所有的 $i = 1, 2, \dots, N$, p_i 和 q_i 分别为 $\{x, t\}$ 和 $\{y, t\}$ 的函数且满足:

$$p_{it} = p_{ixx} + 2sp_{ix} - f_i p_i, \quad (6a)$$

$$q_{it} = q_{iyy} + 2rq_{iy} + f_i q_i, \quad (6b)$$

这里: f_i 是 t 的任意函数.

将(5)式代入 Bäcklund 变换定理 1 中, 得到 2+1 维 Burgers 方程(2)的解为:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^N p_{ix} q_i / \sum_{i=1}^N p_i q_i + s, \\ v &= \sum_{i=1}^N p_i q_{iy} / \sum_{i=1}^N p_i q_i + r. \end{aligned} \quad (7)$$

特别地, 对于势 $w = u_y = v_x$, 我们有:

$$\begin{aligned} w &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N q_{iy} q_j (p_{ix} p_j - p_i p_{jx}) / (\sum_{i=1}^N p_i q_i)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N p_{ix} p_j (q_{iy} q_j - q_i q_{jy}) / (\sum_{i=1}^N p_i q_i)^2. \end{aligned} \quad (8)$$

在 2+1 维的可积系统的严格解研究中, 文献[7]建立的多线性分离变量法是一种强有力的方法. 对大量的可积模型, 多线性分离变量法解可以统一地表示为下述的普适公式:

$$U = C q_y p_x / (a_0 + a_1 p + a_2 q + a_3 p q)^2, \quad (9)$$

其中: C, a_0, a_1, a_2 和 a_3 为常数. 显然解(8)是普适公式(9)的进一步推广. 实际上, 当取 $N=4$, $p_1 = a_0$, $q=1$, $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 0$, $p_2 = p$, $q_2 = a_1$, $p_3 = a_2$, $q_3 = q$, $p_4 = a_3$, $q_4 = q$ 时, 我们的解(8)退化为解(9), 其中 p 和 q 的方程退化为:

$$p_t = p_{xx} + 2sp_x, \quad q_t = q_{yy} + 2rq_y.$$

从解(9)出发, 非常丰富的解的结构如拱形解、网格解、团块解、怪波(瞬子)解、折叠子解、紧致子解、尖峰子解等已被大量的文献所讨论, 这里不再赘述.

在文献[3-5]中, 人们已经给出了大量的 1+1 维 Burgers 方程(1)的严格解, 这些严格解均可以被用来作为 s 构造 2+1 维 Burgers 方程(2)的新的严格解. 对于给定的种子解 s , 作变换:

$$p_i = \exp(-\int_{x_0}^x s dx) P_i,$$

(6a)式可以简化为:

$$P_{it} = P_{ixx} - F_i P_i, \quad (10)$$

其中: $F_i \equiv f_i + s(x_0, t)^2 + s_{x_0}(x_0, t)$ 仍然为 t 的任意函数. 由于 F_i 仅仅是 t 的任意函数, (10)式可方便地再次用分离变量法求解:

$$P_i = \sum_{m=1}^M X_{im}(x) T_{im}(t),$$

$$X_{im,xx} = -\lambda_{im} X_{im}, \quad T_{im,t} = -(\lambda_{im} + F_i) T_{im}, \quad (11)$$

其中: λ_{im} 是任意常数. 若 $\lambda_{im} > 0$, 则(11)式解为:

$$X_{im} = A_{im} \cos(\sqrt{\lambda_{im}} x + \theta_{im}),$$

$$T_{im} = \exp(-\lambda_{im} t - \int_{t_0}^t F_i dt),$$

其中: A_{im} 和 θ_{im} 为任意常数.

若 $\lambda_{im} \equiv -\gamma_{im} < 0$, 则(11)式解为:

$$X_{im} = B_{im} \cosh(\sqrt{\gamma_{im}} x + \delta_{im}),$$

$$T_{im} = \exp(\gamma_{im} t - \int_{t_0}^t F_i dt),$$

其中: B_{im} 和 δ_{im} 为任意常数. 所以我们有:

$$\begin{aligned} p_i &= e^{-\int_{x_0}^x s dx - \int_{t_0}^t F_i dt} \left[\sum_{m=1}^{M_1} A_{im} \cos(\sqrt{\lambda_{im}} x + \theta_{im}) e^{-\lambda_{im} t} + \right. \\ &\quad \left. \sum_{m=M_1+1}^M B_{im} \cosh(\sqrt{\kappa_{im}} x + \delta_{im}) e^{\kappa_{im} t} \right], \end{aligned} \quad (12)$$

对于 q_i 方程(6b), 由于 r 是 $\{y, t\}$ 的任意函数, 求其解一般较困难. 尽管难于求出(6b)式 $N > 1$ 的一般解, 但下述 3 种情况下的特解也很有意义.

(1) r 是 Burgers 方程 $r_t = 2rr_y + r_{yy}$ 的解, 在此(6b)式的解为:

$$q_i = \exp(-\int_{y_0}^y r dy) Q_i(y, t), \quad Q_{it} = Q_{iyy} - G_i Q_i, \quad (13)$$

其中: $Q_i \equiv -f_i + r(y_0, t)^2 + r_{y_0}(y_0, t)$ 仍然为 t 的任意函数. (13)式的解为:

$$Q_i = \sum_{k=1}^K Y_{ik}(y) \tau_{ik}(t),$$

其中:

$$Y_{ik,yy} = -\kappa_{ik} Y_{ik}, \quad \tau_{ik,t} = -(\kappa_{ik} + G_i) \tau_{ik}, \quad (14)$$

κ_{ik} 为任意常数.

若 $\kappa_{ik} > 0$, 则(14)式的解为:

$$Y_{im} = C_{im} \cos(\sqrt{\kappa_{im}} y + \vartheta_{im}),$$

$$\tau_{im} = \exp(-\kappa_{im} t - \int_{t_0}^t G_i dt),$$

其中: C_{im} 和 ϑ_{im} 为任意常数.

若 $\kappa_{im} \equiv -\mu_{im} < 0$, 则(11)式的解为:

$$Y_{im} = D_{im} \cosh(\sqrt{\mu_{im}} y + \nu_{im}),$$

$$T_{im} = \exp(\mu_{im} t - \int_{t_0}^t G_i dt),$$

其中: D_{im} 和 μ_{im} 为任意常数.

因此这种情况下的 q_i 为:

$$\begin{aligned} q_i &= e^{-\int_{x_0}^x r dy - \int_{t_0}^t G_i dt} \left[\sum_{m=1}^{M_2} C_{im} \cos(\sqrt{\kappa_{im}} y + \vartheta_{im}) e^{-\kappa_{im} t} + \right. \\ &\quad \left. \sum_{m=M_2+1}^M D_{im} \cosh(\sqrt{\mu_{im}} y + \nu_{im}) e^{\mu_{im} t} \right]. \end{aligned}$$

(2) r 仅仅是 y 的函数 $r = R(y)$. 在这种情况下

下, (6b)式可直接用分离变量法求解.

$$q_i = \sum_{k=1}^{M_3} Y_{ik}(y) \tau_{ik}(t),$$

$$Y_{ik,y} = \rho_{ik} Y_{ik} - 2R Y_{ik,y}, \quad \tau_{ik,t} = (\rho_{ik} + f_i) \tau_{ik},$$

其中: ρ_{ik} 为任意常数. 在这种情况下, Y_{ik} 的选择依赖于 $R(y)$ 的选择, 这里不再细致讨论.

(3) 对任意的 $r = r(y, t)$, 如果把它重写为:

$$r = (1/q_{Ny})[q_{Nt} - q_N f_N(t) - q_{Nyy}],$$

也可得到(6b)式的一个最简单的有意义的解:

$$q_i = C_i \exp\left(\int f_i dt\right), \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

而 q_N 保持为 $\{y, t\}$ 的任意函数.

将(12)式表示的 p_i 和上述3种情形的 q_i 代入(7)式即得 3+1 维 Burgers 方程的大量的新的严格解.

总之, 利用截断 Painlevé 展开, 我们得到了有意义的 2+1 维 Burgers 方程(2)的自 Bäcklund 变换. 利用自 Bäcklund 变换得到了许多有意义的新解. 特别是利用 Bäcklund 变换定理得到了由多线性分离变量法得到的普适公式的更一般的推广.

笔者提出的方法可以推广应用到各类非线性系统, 特别是高维可积系统. 利用这种方法研究非线性系统的留数, Lou^[10]发现了相应的非局域对称, 即留数对称. 对于 2+1 维 Burgers 方程, 留数对称可以很方便地从 Bäcklund 变换定理读出. 由于这关系到另一类专题, 这里不再进一步的深入研究, 仅写下相对应的留数对称定理.

定理 2(留数对称定理) 如果 $\{u, v\}$ 是 2+1 维 Burgers 方程(2)的解, ϕ , u 和 v 由(3)式决定, 则 Bäcklund 变换定理(4)式的关于奇性流形 ϕ 的留数

$$\sigma^u = \text{Res}(u_1, \phi) = \phi_x, \quad \sigma^v = \text{Res}(v_1, \phi) = \phi_y,$$

是 2+1 维 Burgers 方程(2)的对称.

致谢 感谢楼森岳教授的有益指导和讨论.

参考文献:

- [1] Kivshar Y S, Malomed B A. Dynamics of solitons in nearly integrable equations[J]. Rev Mod Phys, 1989, 61:763-815.
- [2] Kivshar Y S, Luther-Davies B. Dark optical solitons: Physics and applications[J]. Phys Rep, 1998, 298:81-197.
- [3] Pudasaini S P. Some exact solutions for debris and avalanche flows[EB/OL]. [2012-07-08]. http://pof.aip.org/resource/1/phfle6/v23/i4/p043301_s1.
- [4] Jin Y, Jia M, Lou S Y. Bäcklund transformations and interaction solutions of the Burgers equation[EB/OL]. [2013-03-12]. <http://cpl.iphy.ac.cn/EN/Y2013/V30/I2/>.
- [5] Jin Y, Jia M, Lou S Y. Nonlocalization of nonlocal symmetry and symmetry reductions of the Burgers equation[J]. Commun Theor Phys, 2012, 58:795-799.
- [6] Lou S Y, Lian Z J. Searching for infinitely many symmetries and exact solutions via repeated similarity reductions[J]. Chin Phys Lett, 2005, 22(1):1-4.
- [7] Tang X Y, Lou S Y. Variable separation solutions for the (2+1)-dimensional burgers equation[J]. Chin Phys Lett, 2003, 20(3):335-337.
- [8] Lou S Y. On the coherent structures of Nizhnik-Novikov-Veselov equation[J]. Phys Lett A, 2000, 277:94-100.
- [9] Tang X Y, Lou S Y, Zhang Y. Localized excitations in (2+1)-dimensional systems[EB/OL]. [2013-03-08]. <http://pre.aps.org/abstract/PRE/v66/i4/e046601>.
- [10] Gao X N, Lou S Y, Tang X Y. Bosonization, singularity analysis, nonlocal symmetry reductions and exact solutions of supersymmetric KdV equation[EB/OL]. [2013-03-20]. [http://link.springer.com/article/10.1007/JHEP05\(2013\)029#page-1](http://link.springer.com/article/10.1007/JHEP05(2013)029#page-1).

Bäcklund Transformations and Exact Solutions of the (2+1)-dimensional Burgers Equation

JIN Yan¹, JIA Man^{2*}

(1. Ningbo Institute of Education, Ningbo 315010, China; 2. Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: We discuss the (2+1)-dimensional Burgers equation which is considered as an important model in nonlinear physics. Using the truncated Painlevé expansion, an auto Bäcklund transformation of the (2+1)-dimensional Burgers equation is derived, and then a number of new exact solutions are obtained.

Key words: Burgers equation; truncated Painlevé expansion; auto Bäcklund transformation; new exact solutions

(责任编辑 史小丽)