

DOI: 10.20098/j.cnki.1001-5132.2023.0721

分数阶 p-Laplace 方程解的单调性公式

王琦, 沃维丰*

(宁波大学 数学与统计学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 研究了分数阶 p-Laplace 方程解的单调性公式. 基于 Caffarelli-Silverstre 的延拓技术, 将分数阶 p-Laplace 方程相应的扩展问题表述为半空间中一个退化或奇异局部方程. 通过建立与扩展问题相关的 Almgren 型频率函数, 结合散度定理和积分估计获得了延拓函数的单调性公式.

关键词: 分数阶 p-Laplace 方程; 延拓技术; 频率函数; 单调性

中图分类号: O175.25

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2024) 01-0038-05

单调性公式由 Almgren 于 1979 年在文献[1]中首次提出, 椭圆方程解的单调性公式是关于椭圆方程的重要研究内容之一. Garofalo 等^[2-3]首次提出了频率函数方法, 通过建立方程解的单调性公式得到具有散度形式的二阶 Laplace 方程解的唯一延拓性. 之后, 为了解决分数阶 Laplacian 算子非局部性带来的研究困难, Caffarelli 等^[4]提出了一种延拓技术, 用于讨论分数阶 Laplacian 算子相关问题, 即将非局部问题简化为更高一维的局部问题. 基于此方法, Fall 等^[5]建立了分数阶 Laplace 方程与带有权重的奇异或退化局部方程两者之间的关联性, 进而获得了方程解的单调性公式. 随后, Luca 等^[6]研究了在 Dirichlet 边界条件下分数阶椭圆方程在边界点上的单调性公式, 并结合爆破分析得到了方程解的定性性质.

Fall 等^[7]基于延拓方程解的单调性公式, 证明了具有 Hardy 势的分数阶椭圆算子解的唯一延拓性, 即算子表达式为:

$$H := (-\Delta + m^2)^s - \frac{a(x/|x|)}{|x|^{2s}} - h(x),$$

其中: $s \in (0, 1)$, $m \geq 0$, $a \in C^1(S^{n-1})$, 且对 $C_h > 0$ 和 $\chi \in (0, 1)$ 使得:

$$h \in C^1(\Omega \setminus \{0\}), |h(x)| + |x \cdot \nabla h(x)| \leq C_h |x|^{-2s+\chi}.$$

尽管在建立非局部问题解的单调性公式方面已取得了部分成果, 但是目前大多数工作都集中在非局部的分数阶 Laplacian 算子条件下, 对于更一般的非局部算子, 如分数阶 p-Laplacian 算子, 相关单调性公式的研究报道较少.

本文研究了更一般的分数阶 p-Laplacian 算子解的单调性公式.

首先阐述分数阶 p-Laplacian 算子 $(-\Delta)_p^s$, 其定义为:

$$\begin{aligned} (-\Delta)_p^s u(x) &= C_{n,sp} \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}^n} \left[|u(x) - u(y)|^{p-2} \cdot \right. \\ &\quad \left. (u(x) - u(y))/|x - y|^{n+sp} \right] dy = \\ &= C_{n,sp} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x)} \left[|u(x) - u(y)|^{p-2} \cdot \right. \\ &\quad \left. (u(x) - u(y))/|x - y|^{n+sp} \right] dy, \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $s \in (0, 1)$, $p \in (1, \infty)$, $n > 2$, $C_{n,sp}$ 是一个依赖于 n, s, p 的正常数; P.V. 代表柯西主值.

与分数阶 Laplacian 算子不同, 当 $p \neq 2$ 时, 分数阶 p-Laplacian 算子是一个非线性非局部算子, 因此, 研究此类算子显然更为复杂. 结合相关的研究成果可知, 针对分数阶 p-Laplacian 算子的研究, 一种方法是积分方程法^[8], 即建立分数阶 p-Laplace 方程与积分方程的等价性, 通过运用积分

收稿日期: 2023-07-27.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journal.g.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(12271276); 浙江省自然科学基金(LY20A010011).

第一作者: 王琦, 硕士研究生, 主要研究方向: 偏微分方程. E-mail: 3289666171@qq.com

*通信作者: 沃维丰, 博士/副教授, 主要研究方向: 偏微分方程. E-mail: woweifeng@nbu.edu.cn

形式的移动平面法研究方程解的相关性质. 另一种方法是采用 Caffarelli-Silvestre 延拓技术^[9], 得到分数阶 p-Laplacian 算子相应的局部方程, 将相应的扩展问题表述为半空间中具有奇异或退化权重的局部方程. 此外, 文献[9]还证明了分数阶 p-Laplacian 算子的另外两种表达公式. 而当 $p=2$ 时, 分数阶 Laplacian 算子作为一种特殊形式, 其单调性公式在文献[10]中已得到证明. 文献[11]研究了分数阶 Hardy-Hénon 算子正解的渐近行为和爆破估计, 得到了方程

$$(-\Delta)^s u(x) = |x|^\alpha u^p$$

在单位球中正解的单调性公式, 其中 $s \in (0, 1)$, $-2s < \alpha < 2s$, $(n+\alpha)/(n-2s) < p < (n+2s)/(n-2s)$, 且 $n \geq 2$. 此外, 文献[12]研究了高阶分数 Laplacian 算子, 并运用 Pohozaev 恒等式得到了四阶椭圆方程解的单调性公式. 因此, 针对单调性公式的研究逐渐趋于丰富^[13-16].

本文受 Laplace 方程和分数阶 Laplace 方程解的单调性公式启发, 研究了分数阶 p-Laplacian 算子解的单调性公式, 将分数阶 Laplacian 算子解的单调性公式推广到更一般的应用范围. 采用基于非线性非局部算子的 Caffarelli-Silvestre 线性延拓技术, 通过定义一个合适的 Dirichlet 边界条件, 证明了分数阶 p-Laplacian 算子与局部方程之间的等价性, 即将相应的扩展问题表述为半空间中具有奇异或退化权重的局部方程. 在分数阶 p-Laplacian 算子 $(-\Delta)_p^s$ 取 $s \in (0, 1)$ 和 $p \in (1, \infty)$ 情况下, 将具有线性算子解的单调性公式推广到非线性算子中. 依托 Caffarelli-Silvestre 的延拓技术, 通过现有结果建立方程的频率函数, 并结合相关积分估计获得具有非线性非局部方程解的单调性公式. 与此同时, 讨论了 $p > 1$ 情况下的分数阶 p-Laplace 方程解的单调性公式, 从而更大程度上拓展了非局部分数阶 Laplace 方程的研究成果.

1 准备工作

在给出本文的主要定理前, 首先引入一些记号以便后续书写.

对于任何 $r > 0$, 定义

$$\mathbb{R}_+^{n+1} = \{z = (x_1, \dots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y > 0\}.$$

$S^n = \{z \in \mathbb{R}^{n+1} : |z| = 1\}$ 表示一个 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中单位为

n 维的球体.

$$S_+^n = \{(\theta_1, \dots, \theta_{n+1}) \in S^n : \theta_{n+1} > 0\} := S^n \cap \mathbb{R}_+^{n+1}.$$

$$S_r^+ = \{z = (x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+1} : |z| = 1\}.$$

$$B_r = \{z \in \mathbb{R}^{n+1} : |z| < r\}, B_r^+ = \{(x, y) \in B_r : y > 0\}.$$

$$B_r' = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\} = B_r \cap \{(x, 0) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n\}.$$

dS 表示 n 维球体上的体积元素.

$dz = dx dy$, $z = (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ 表示 $(n+1)$ 维的体积元素.

接着引入有关分数阶 p-Laplacian 算子相应的延拓性质.

文献[9]给出了引理 1 的证明过程, 并讨论了分数阶 p-Laplacian 算子其他定义形式的表示方法. 引理 1 对我们主要结果的证明至关重要.

引理 1 令 $s \in (0, 1)$ 和 $p \in (1, \infty)$, 设 $U^{x_0}(x, y)$ 是下面边值问题的解:

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s U^{x_0}(x, y) + \frac{1-sp}{y} U_y^{x_0}(x, y) + \\ U_{yy}^{x_0}(x, y) = 0, x \in \mathbb{R}^n, y > 0, \\ U^{x_0}(x, 0) = \Phi_p(u(x_0) - u(x)), x \in \mathbb{R}^{n+1}, \end{cases} \quad (2)$$

且对 $p \in (1, 2/(2-s))$ 需额外假设 $\nabla u(x_0) \neq 0$, 则对于 $u \in C_b^2(\mathbb{R}^n)$, 使得:

$$(-\Delta)_p^s u(x_0) = C_{n,sp} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{U^{x_0}(x_0, y)}{y^{sp}},$$

其中: $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$.

特别地, 当 $p=2$ 时, 我们有:

$$\frac{U^{x_0}(x_0, y)}{y^{sp}} = \frac{\Phi_2(u(x_0) - u(y))}{y^{2s}} = \frac{u(x_0) - u(y)}{y^{2s}},$$

即满足分数阶 Laplacian 算子的经典结果.

2 主要定理

首先定义方程解的频率函数, 然后通过计算函数的导数得到主要定理. 从引理 1 可获得 $U^{x_0}(x, y)$ 是方程(2)的一个解, 我们用 ϕ 替换 U^{x_0} , 且为方便之后计算, 后续研究都建立在 $r \in (0, 1)$ 的条件下.

值得注意的是, 令

$$r > 0, \quad \phi \in H^1(B_r^+; y^{1-sp}),$$

满足下面延拓问题:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(y^{1-sp} \nabla \phi) = 0, B_r^+, \\ \phi(x, 0) = \Phi_p(u(x_0) - u(x)), B_r'. \end{cases} \quad (3)$$

为了确保完整性, 给出式(3)中频率函数的定义. 令 $z \neq 0$, $r \in (0, R]$, 且 $R > 0$, 定义函数

$$H(r) = \frac{1}{r^{n+1-sp}} \int_{S_r^+} y^{1-sp} \phi^2(z) dS = \int_{S_+^n} \theta_{n+1}^{1-sp} \phi^2(r\theta) dS, \quad (4)$$

和

$$D(r) = \frac{1}{r^{n-sp}} \int_{B_r^+} y^{1-sp} (\nabla \phi(z))^2 dz, \quad (5)$$

则函数 $\mathcal{N}(r)$ 的表达式为:

$$\mathcal{N}(r) = \frac{D(r)}{H(r)} = \frac{r \int_{B_r^+} y^{1-sp} (\nabla \phi(z))^2 dz}{\int_{S_r^+} y^{1-sp} \phi^2(z) dS}. \quad (6)$$

此外, 在 $p=2$ 和 $A(0)=id$ 情况下, 上述给出的频率函数也可以表示分数阶椭圆方程的频率函数, 并且定义是良好的. 另外, 随着二阶椭圆方程组研究的不断深入, 文献[17]建立了一类弱耦合的二阶椭圆方程组的频率函数. 最后, 给出关于本文的主要研究结果.

定理 1 令 $s \in (0, 1)$, $p \in (1, \infty)$, $n > 2$, 函数 $\mathcal{N}(r)$ 定义如式(6).

若函数 $u \in C_b^2(\mathbb{R}^n) \cap L_{sp}(\mathbb{R}^n)$ 满足:

$$(-\Delta)_p^s u(x) = 0,$$

则存在一个常数 $C > 0$, 使得:

$$\bar{\mathcal{N}}(r) = e^{Cr} \mathcal{N}(r)$$

是关于 $r \in (0, r_0)$ 的一个非减函数, 其中 $r_0 \in (0, 1)$ 和 C 是依赖于空间维数的量.

一旦有了单调性质, 下面的推论将顺理成章.

推论 1 存在一个 γ , 使得极限 $\gamma = \lim_{r \rightarrow 0^+} \mathcal{N}(r)$ 成立.

3 定理 1 的证明

本节讨论函数 $\bar{\mathcal{N}}(r)$ 一个单调性质的证明.

证明 不失一般性, 令 $0 < r < 1$ 和 $z = (x, y)$.

首先由定义

$$\mathcal{N}(r) = D(r) / H(r),$$

计算出 $\mathcal{N}$ 的导数, 得:

$$\mathcal{N}'(r) = \frac{D'(r)H(r) - D(r)H'(r)}{H^2(r)},$$

接着, 将证明的剩余部分分为 3 个步骤.

步骤 1 为了得到一些想法, 首先给出 $H(r)$ 的导数.

对于 $r_0 \in (0, R)$, 考虑以下极限

$$\lim_{r \rightarrow r_0} \frac{H(r) - H(r_0)}{r - r_0} = \lim_{r \rightarrow r_0} \int_{S_+^n} \theta_{n+1}^{1-sp} \frac{|\phi^2(r\theta)|^2 - |\phi^2(r_0\theta)|^2}{r - r_0}, \quad (7)$$

由于 $\phi \in C^1(\mathbb{R}_+^{n+1})$, 则对于任意的 $\theta \in S_+^n$, 有:

$$\lim_{r \rightarrow r_0} \int_{S_+^n} \frac{|\phi^2(r\theta)|^2 - |\phi^2(r_0\theta)|^2}{r - r_0} = 2 \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(r_0\theta) \phi(r_0\theta), \quad (8)$$

另一方面, 对于任意的 $r \in (r_0/2, R)$ 和 $\theta \in S_+^n$, 有:

$$\begin{aligned} \left| \frac{|\phi(r\theta)|^2 - |\phi(r_0\theta)|^2}{r - r_0} \right| &\leq \\ 2 \sup_{B_R^+ \setminus B_{r_0/2}^+} |\phi| \sup_{B_R^+ \setminus B_{r_0/2}^+} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right| &\leq \\ 2 \sup_{B_R^+ \setminus B_{r_0/2}^+} |\phi| \sup_{B_R^+ \setminus B_{r_0/2}^+} \left(\left| \frac{y}{|z|} \phi_y \right| + \left| \frac{\nabla_x \phi \cdot x}{|z|} \right| \right), \end{aligned}$$

因此, 由式(7)和式(8), 并利用控制收敛定理可得:

$$\begin{aligned} H'(r_0) &= 2 \int_{S_+^n} \theta_{n+1}^{1-sp} \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(r_0\theta) \phi(r_0\theta) dS(\theta) = \\ \frac{2}{r_0^{n+1-sp}} \int_{S_0^+} y^{1-sp} \phi \frac{\partial \phi}{\partial \nu} dS, \end{aligned} \quad (9)$$

由于式(9)中 H' 在区间 $(0, R)$ 上具连续性, 故

$$H'(r) = \frac{2}{r^{n+1-sp}} \int_{S_r^+} y^{1-sp} \phi \frac{\partial \phi}{\partial \nu} dS. \quad (10)$$

此外, 利用 ϕ 方程式, 可获得:

$$\begin{aligned} D(r) &= \frac{1}{r^{n-sp}} \int_{B_r^+} \operatorname{div}(y^{1-sp} \phi(z) \cdot \nabla \phi(z)) dz = \\ \frac{1}{r^{n-sp}} \int_{S_r^+} y^{1-sp} \phi(z) \cdot \frac{\partial \phi(z)}{\partial \nu} dS, \end{aligned} \quad (11)$$

将式(11)代入式(10), 整理后得:

$$H'(r) = \frac{2}{r} D(r).$$

步骤 2 接着计算有关 $D(r)$ 的导数.

现将问题写成以下形式:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(y^{1-sp} \nabla \phi) = 0, B_r^+, \\ \phi(x, 0) = \Phi_p(u(x_0) - u(x)), B_r', \end{cases}$$

在 B_r^+ 上, 有以下公式:

$$\begin{aligned} & \operatorname{div} \left(\frac{1}{2} y^{1-sp} (\nabla \phi(z))^2 z - \right. \\ & \quad \left. y^{1-sp} (z \cdot \nabla \phi(z)) \nabla \phi(z) \right) = \\ & \quad \frac{n-sp}{2} y^{1-sp} (\nabla \phi(z))^2 - \\ & \quad (z \cdot \nabla \phi(z)) \operatorname{div} (y^{1-sp} \nabla \phi(z)). \end{aligned} \quad (12)$$

下面将式(12)在 B_r^+ 上进行积分, 并使用散度定理, 得:

$$\begin{aligned} & \frac{n-sp}{2} \int_{B_r^+} y^{1-sp} (\nabla \phi(z))^2 dz = \\ & \quad \frac{r}{2} \int_{S_r^+} y^{1-sp} (\nabla \phi(z))^2 dS - \\ & \quad r \int_{S_r^+} y^{1-sp} \left(\frac{\partial \phi(z)}{\partial \nu} \right)^2 dS. \end{aligned} \quad (13)$$

同时, 对于任意的 $r \in (0, r_0)$, 令

$$I(r) = \int_{B_r^+} y^{1-sp} (\nabla \phi)^2 dz. \quad (14)$$

式(14)利用 Rellich 恒等式, 对于 $r \in (0, R)$ 几乎处处有:

$$I'(r) = \int_{S_r^+} y^{1-sp} |\nabla \phi|^2 dS. \quad (15)$$

由 $D(r) = \frac{1}{r^{n-sp}} I(r)$, 计算得:

$$D'(r) = \frac{1}{r^{n+1-sp}} (- (n-sp) I(r) + r I'(r)).$$

将式(14)和式(15)代入 $D'(r)$ 表达式, 同时结合式(13)得:

$$D'(r) = \frac{2}{r^{N-sp}} \int_{S_r^+} y^{1-sp} \left(\frac{\partial \phi(z)}{\partial \nu} \right)^2 dS. \quad (16)$$

步骤3 修正频率函数的单调性.

结合步骤1中 $H'(r)$ 和步骤2中 $D'(r)$, 代入 $\mathcal{N}'(r)$ 表达式, 有:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}'(r) &= \frac{D'(r)H(r) - D(r)H'(r)}{(H(r))^2} = \\ &= \frac{D'(r)H(r) - (1/2)r(H'(r))^2}{(H(r))^2} = \\ &= 2r \left[\left(\int_{S_r^+} y^{1-sp} \frac{\partial \phi(z)}{\partial \nu} dS \right) \left(\int_{S_r^+} y^{1-sp} \phi^2(z) dS \right) - \right. \end{aligned}$$

$$\left. \left(\int_{S_r^+} y^{1-sp} \phi(z) \frac{\partial \phi(z)}{\partial \nu} dS \right)^2 \right] /$$

$$\left(\int_{S_r^+} y^{1-sp} \phi^2(z) dS \right)^2.$$

由 Cauchy-Schwarz 定理, 可得:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{S_r^+} y^{1-sp} \left(\frac{\partial \phi(z)}{\partial \nu} \right)^2 dS \right) \left(\int_{S_r^+} y^{1-sp} \phi^2(z) dS \right) = \\ & \int_{S_r^+} y^{1-sp} \left(\frac{\partial \phi(z)}{\partial \nu} \right)^2 dS \int_{S_r^+} y^{1-sp} \phi^2(z) dS \geq \\ & \left(\int_{S_r^+} y^{1-sp} \frac{\partial \phi(z)}{\partial \nu} \phi(z) dS \right)^2, \end{aligned}$$

因此, 最终可得:

$$\mathcal{N}'(r) \geq -C \mathcal{N}(r),$$

其中 C 是一个仅与空间维数 n 有关的量.

至此定理1的结论成立.

参考文献:

- [1] ALMGREN F J Jr. Q valued functions minimizing Dirichlet's integral and the regularity of area minimizing rectifiable currents up to codimension two[J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1983, 8(2):327-328.
- [2] GAROFALO N, LIN F. Monotonicity properties of variational integrals, Ap weights and unique continuation [J]. Indiana University Mathematics Journal, 1986, 35: 245-268.
- [3] GAROFALO N, LIN F H. Unique continuation for elliptic operators: a geometric-variational approach[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1987, 40(3):347-366.
- [4] CAFFARELLI L, SILVESTRE L. An extension problem related to the fractional Laplacian[J]. Communications in Partial Differential Equations, 2007, 32(8):1245-1260.
- [5] FALL M M, FELLI V. Unique continuation property and local asymptotics of solutions to fractional elliptic equations[J]. Communications in Partial Differential Equations, 2014, 39(2):354-397.
- [6] DE LUCA A, FELLI V, VITA S. Strong unique continuation and local asymptotics at the boundary for fractional elliptic equations[J]. Advances in Mathematics, 2022, 400:108279.
- [7] FALL M M, FELLI V. Unique continuation properties for relativistic Schrödinger operators with a singular potential [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2015,

- 35(12):5827-5867.
- [8] CHEN W X, LI C M. Maximum principles for the fractional p -Laplacian and symmetry of solutions[J]. *Advances in Mathematics*, 2018, 335:735-758.
- [9] DEL TESO F, GÓMEZ-CASTRO D, VÁZQUEZ J L. Three representations of the fractional p -Laplacian: semigroup, extension and Balakrishnan formulas[J]. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2021, 24: 966-1002.
- [10] YU H. Unique continuation for fractional orders of elliptic equations[J]. *Annals of PDE*, 2017, 3(2):16.
- [11] YANG H, ZOU W M. Sharp blow up estimates and precise asymptotic behavior of singular positive solutions to fractional Hardy-Hénon equations[J]. *Journal of Differential Equations*, 2021, 278:393-429.
- [12] FELLI V, FERRERO A. Unique continuation and classification of blow-up profiles for elliptic systems with Neumann boundary coupling and applications to higher order fractional equations[J]. *Nonlinear Analysis*, 2020, 196:111826.
- [13] YANG R. On higher order extensions for the fractional Laplacian[EB/OL]. [2023-06-10]. <https://arxiv.org/abs/1302.4413.pdf>.
- [14] FELLI V, FERRERO A. Unique continuation principles for a higher order fractional Laplace equation[J]. *Nonlinearity*, 2020, 33(8):4133-4190.
- [15] GAROFALO N, SMIT VEGA GARCIA M. New monotonicity formulas and the optimal regularity in the Signorini problem with variable coefficients[J]. *Advances in Mathematics*, 2014, 262:682-750.
- [16] ARYA V, BANERJEE A, DANIELLI D, et al. Space-like strong unique continuation for some fractional parabolic equations[J]. *Journal of Functional Analysis*, 2023, 284(1): 109723.
- [17] 许飞, 田龙, 王怡然. 一类弱耦合的二阶椭圆方程组强唯一延拓性质[J]. *扬州大学学报(自然科学版)*, 2023, 26(1):14-19.

Monotonicity formula for solutions of fractional p -Laplace equations

WANG Qi, WO Weifeng

(School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: In this paper, we study the monotonicity formula of solutions for fractional p -Laplace equations. Based on the extension technique of Caffarelli-Silverstre, the corresponding extension problem of fractional p -Laplace equation is addressed as a degenerate or singular local equation in half space. By establishing the Almgren-type frequency function related to the extended problem, and combining the divergence theorem and integral estimation, the monotonicity formula of the extended function is obtained.

Key words: fractional p -Laplace; extension technology; frequency function; monotonicity

(责任编辑 史小丽)