

DOI: 10.20098/j.cnki.1001-5132.2023.0320

基于 OMMP 算法的多测量向量问题的重构

冯晓艳, 王金平*

(宁波大学 数学与统计学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 正交多匹配追踪算法(OMMP 算法)是正交匹配追踪算法(OMP 算法)的一种拓展, 近年来受到很多相关研究人员的关注. 不同于 OMP 算法, OMMP 算法在每次迭代中识别多个指标. 本文分析了在限制等距性(RIP)和多向量信噪比(MSNR)条件下, 用于解决多测量向量问题的 OMMP 算法的鲁棒性. 此外, 在给出的限制等距常数(RIC)的条件下, 用归纳假设的方法证明了当 $V = \mathbf{0}$ 以及整数 N 满足 $1 \leq N \leq (m-1)/K$ 时, OMMP 算法可以准确恢复 K -行稀疏矩阵 X .

关键词: 压缩感知; 正交多匹配追踪; 限制等距性; 多测量向量

中图分类号: O177.92; O29

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2024) 01-0043-08

压缩感知^[1-2]作为一种新的采样理论, 已广泛应用于各个领域, 如图像压缩、信号处理、雷达系统以及医学成像等^[3-6]. 压缩感知的主要目的是从模型

$$y = \Phi x + v \quad (1)$$

中恢复稀疏信号 x . 我们可以通过找到如下 l_0 优化问题的解, 达到这一目的:

$$\min \|x\|_0 \text{ s.t. } \|y - \Phi x\|_2 \leq \varepsilon, \quad (2)$$

式中: $y \in R^m$ 是测量向量; $\Phi \in R^{m \times n}$ ($m \ll n$) 是感知矩阵; $v \in R^m$ 是噪声向量; $\|x\|_0$ 是 x 的 l_0 范数, 表示 x 的非零项个数, 对于任意向量 x , 定义其支撑集: $\text{supp}(x) = \{i: x_i \neq 0\}$. 如果它是 K -稀疏的, 则有 $\|x\|_0 \leq K$. 式(1)是单测量向量的稀疏恢复, 可以拓展到多测量向量的稀疏恢复问题. 本文主要研究多测量向量问题^[7-9].

多测量向量问题在脑磁图扫描技术^[10]、波达方向估计^[11]等领域有着广泛应用. 向量 x 的支撑集上面已给出, 对于矩阵 $X = (X_1, X_2, \dots, X_p) \in R^{m \times p}$, 定义其行支撑集为:

$$\text{supp}(X) = \bigcup_{i=1}^p \text{supp}(X_i),$$

这里 X_i 表示矩阵 X 的第 i 列, 若测量矩阵 $Y \in R^{m \times p}$,

感知矩阵 $\Phi \in R^{m \times n}$ 是已知的, 则多测量向量问题可以描述为:

$$\min |\text{supp}(X)| \text{ s.t. } \|Y - \Phi X\|_2 \leq \varepsilon, \quad (3)$$

这里 $|\text{supp}(X)|$ 表示矩阵 X 的非零行数. 若 $|\text{supp}(X)| \leq K$, 则称矩阵 X 是 K -行稀疏的. 很显然, 当 $p=1$ 时, 多测量向量(MMV)问题就变成了单测量向量(SMV)问题.

文献[12-13]已证明, 当矩阵 Φ 满足一定条件时, 通过恢复单测量向量的一些稀疏算法可以稳定恢复未知信号 x . 在分析稀疏恢复算法的恢复性能时, 限制等距性(RIP)是使用较为广泛的方法之一. 对于感知矩阵 $\Phi \in R^{m \times n}$ 和任意正整数 K , 若存在一个常数 $\delta \in (0, 1)$ 满足:

$$(1 - \delta_K) \|x\|_2^2 \leq \|\Phi x\|_2^2 \leq (1 + \delta_K) \|x\|_2^2, \quad (4)$$

则称 Φ 满足 K 阶的限制等距性, 使得式(4)成立的最小常数 δ_K 称为 Φ 的限制等距常数(RIC).

正交匹配追踪算法(OMP 算法)是解决式(1)非常有效的一种贪婪算法, 其对式(3)同样有效. 正交多匹配追踪算法(OMMP 算法)^[13](也被称作 gOMP 算法^[14])作为 OMP 算法的拓展, 每次迭代从感知矩阵 Φ 中选择与残差相关性最大的 $N \geq 1$ 个

收稿日期: 2023-03-17.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journal.g.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(62071262).

第一作者: 冯晓艳, 硕士研究生, 主要研究方向: 积分变换与图像处理. E-mail: 2933667080@qq.com

*通信作者: 王金平, 博士/教授, 主要研究方向: 积分变换与图像处理. E-mail: wangjinping@nbu.edu.cn

列作为指标集. 由于每次迭代选择多个正确的指标集, 所以相较于 OMP 算法, OMMP 算法所需的迭代次数更少. 在某些条件下, OMMP 算法可以找到式(3)中的最稀疏解 $\mathbf{X}$. 多测量向量问题的 OMMP 算法如下:

输入:

$$\mathbf{Y} \in R^{m \times p}, \mathbf{\Phi} \in R^{m \times n}, K, N \leq (m-1)/K, \varepsilon > 0.$$

初始化: $k=0, \mathbf{R}^0 = \mathbf{Y}, \Lambda_0 = \emptyset$.

(1) 当 $k < K$, 且 $\|\mathbf{R}^k\|_F > \varepsilon$ 时, 继续执行;

(2) $k = k + 1$;

(3) 选择指标集 $i_1, i_2, \dots, i_N$ 满足:

$$\begin{aligned} \|\langle \mathbf{R}^{k-1}, \mathbf{\Phi}_{i_1} \rangle\|_2 \geq \dots \geq \|\langle \mathbf{R}^{k-1}, \mathbf{\Phi}_{i_N} \rangle\|_2 \geq \\ \sup_{\phi \in \mathbf{\Phi}, \phi \neq \mathbf{\Phi}_{i_k}, k=1, \dots, N} \|\langle \mathbf{R}^{k-1}, \phi \rangle\|_2; \end{aligned}$$

(4) $\Lambda_k = \Lambda_{k-1} \cup \{i_1, i_2, \dots, i_N\}$;

(5) $\hat{\mathbf{X}}_{\Lambda_k} = \arg \min_{\mathbf{X} \in R^{\Lambda_k \times p}} \|\mathbf{Y} - \mathbf{\Phi} \mathbf{X}\|_F$;

(6) $\mathbf{R}^k = \mathbf{Y} - \mathbf{\Phi}_{\Lambda_k} \hat{\mathbf{X}}_{\Lambda_k}$;

(7) 终止.

输出: $\hat{\mathbf{X}} = \arg \min_{\mathbf{X} : \text{supp}(\mathbf{X}) = \Lambda_K} \|\mathbf{Y} - \mathbf{\Phi} \mathbf{X}\|_F$.

对一般的正整数 N , 为保证 OMMP 算法准确地恢复 K -稀疏信号, 已有很多基于 RIC 条件被陆续提出. Liu 等^[14]提出, 当限制等距常数 δ 满足:

$$\delta_{NK} < \frac{1}{(2 + \sqrt{2})\sqrt{K/N}}$$

时, OMMP 算法可恢复任意 K -稀疏信号; Wang 等^[15]证明了

$$\delta_{NK} < \frac{1}{\sqrt{K/N} + 3}$$

是 OMMP 算法经 K 次迭代恢复任意 K -稀疏信号的一个充分条件; 该条件又被 Satpathi 等^[16]改善为:

$$\delta_{NK} < \frac{1}{\sqrt{K/N} + 2}, \delta_{NK+1} < \frac{1}{\sqrt{K/N} + 1};$$

Shen 等^[17]将限制 RIC 条件进一步改善为:

$$\delta_{NK} < \frac{1}{\sqrt{K/N} + 1.27};$$

Wen 等^[18]提出了更加松弛的 RIP 条件, 即 RIC 满足:

$$\delta_{NK} < \frac{1}{\sqrt{K/N} + 1}$$

时, OMMP 算法可以在 K 次迭代准确恢复 K -稀疏

信号. 文献[18]中的 RIC 针对单测量向量问题中的 OMMP 算法. 本文将此条件由单测量向量问题过渡到多测量向量问题, 发现该结论仍然成立.

在单测量信号恢复中, 信噪比(SNR)和最小平均比(MAR)根据文献[19]定义如下:

$$SNR = \begin{cases} \frac{\|\mathbf{\Phi} \mathbf{x}\|_2^2}{\|\mathbf{v}\|_2^2}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}, \\ +\infty, \mathbf{v} = \mathbf{0}, \end{cases} \quad MAR = \frac{\min_{i \in \Omega} |x_i|^2}{\|\mathbf{x}\|_2^2 / K}. \quad (5)$$

受此启发, 在多测量向量问题中把它们分别命名为多向量信噪比(MSNR)和多向量最小平均比(MMAR), 并定义为:

$$MSNR = \begin{cases} \frac{\|\mathbf{\Phi} \mathbf{X}\|_F^2}{\|\mathbf{V}\|_F^2}, \mathbf{V} \neq \mathbf{0}, \\ +\infty, \mathbf{V} = \mathbf{0}, \end{cases} \quad MMAR = \frac{\min_{i \in \Omega} \|\mathbf{X}_i\|_2^2}{\|\mathbf{X}\|_F^2 / K}. \quad (6)$$

有了这两个新定义, 我们将证明在 MSNR 和 MMAR 满足一定条件下, 若限制等距常数 δ 满足:

$$\delta_{NK} < \frac{1}{\sqrt{K/N} + 1},$$

则 OMMP 算法每次迭代可以确保恢复至少一个正确的指标集.

1 预备知识

首先介绍文中出现的一些基础符号的含义, 以及用到的引理.

对任意矩阵 $\mathbf{A} \in R^{n \times p}$ 和 $\mathbf{B} \in R^{n \times p}$, 定义内积

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \text{tra}(\mathbf{A}^T \mathbf{B}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ij} b_{ij},$$

其中: $\mathbf{A}^T$ 表示矩阵 $\mathbf{A}$ 的转置. 由这种内积诱导的范数是 Frobenius 范数, 记为 $\|\cdot\|_F$. 对任意向量 $\mathbf{x}$ 和矩阵 $\mathbf{X}$, $\|\mathbf{x}\|_2$ 和 $\|\mathbf{X}\|_F$ 分别表示 $\mathbf{x}$ 的 l_2 范数和 $\mathbf{X}$ 的 Frobenius 范数, 且

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}},$$

$$\|\mathbf{X}\|_F = \sqrt{\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle} = \sqrt{\text{tra}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})}.$$

$\mathbf{I}$ 和 $\mathbf{0}$ 分别表示单位矩阵和零矩阵. $T = \text{supp}(\mathbf{X})$ 是 $\mathbf{X}$ 的支撑集, $|T|$ 表示集合 T 的基数, $\Lambda = \{1, 2, \dots, n\}$ 且 $T \setminus \Lambda = \{i \in T, i \notin \Lambda\}$. 令 T^c 和 Λ^c 分别表示 T 和 Λ 的补集, 即 $T^c = \{1, 2, \dots, n\} \setminus T$, $\Lambda^c = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \Lambda$. 矩阵 $\mathbf{\Phi}_\Lambda$ 表示 $\mathbf{\Phi}$ 的子矩阵, 其中仅包含由 Λ 索引的列. 类似地, $\mathbf{X}_\Lambda \in R^{|\Lambda| \times p}$ 表示

X 的子矩阵, 其中仅包含由 Λ 索引的行. 如果 Φ_Λ 是列满秩矩阵, $\Phi^\dagger$ 是其伪逆矩阵, 则 $\Phi^\dagger = (\Phi_\Lambda^\top \Phi_\Lambda)^{-1} \Phi_\Lambda^\top$, 且 $P_\Lambda = \Phi_\Lambda \Phi^\dagger$ 和 $P_\Lambda^\perp = I - P_\Lambda$ 分别表示 Φ_Λ 的列空间上的投影和正交补投影. 由 P_Λ 的对称性和幂等性可得 $P_\Lambda = P_\Lambda^\top$ 和 $P_\Lambda = P_\Lambda^2$. $\|\Phi\|_{2,\infty}$ 表示矩阵 Φ 中任意一行的最大 l_2 范数.

下面介绍几个有用的引理.

引理 1^[2] 若矩阵 Φ 满足 K_1 和 K_2 阶的 RIP 条件, 且 $K_1 < K_2$, 则 $\delta_{K_1} \leq \delta_{K_2}$.

引理 2^[20] 若集合 S_1 和 S_2 满足 $|S_2 \setminus S_1| \geq 1$, 且矩阵 Φ 满足 $|S_1 \cup S_2|$ 阶的 RIP 条件, 则对任意向量 $x \in R^{|S_2 \setminus S_1|}$, 都有:

$$(1 - \delta_{|S_1 \cup S_2|}) \|x\|_2^2 \leq \|\Phi_{S_2 \setminus S_1}^\top \Phi_{S_2 \setminus S_1} x\| \leq (1 + \delta_{|S_1 \cup S_2|}) \|x\|_2^2. \quad (7)$$

引理 3^[21] 假设矩阵 $M \in R^{n \times p}$, $N \in R^{n \times p}$, 则 $\|M^\top MN\|_F \geq \|MN\|_F^2 / \|N\|_F$.

引理 4^[22] 矩阵 $A \in R^{a \times a}$, $B \in R^{a \times a}$ 都是对称矩阵, 且 $AB \neq 0$, 则

$$\|AB\|_{2,\infty} = \max_{1 \leq i \leq a} \|A_i^\top B\|_2 \geq (1/\sqrt{a}) \|AB\|_F. \quad (9)$$

2 主要结果

给出 MMV 问题的 OMMP 算法可以稳定恢复 K -稀疏信号的充分条件. 首先给出以下引理.

引理 5 对于正整数 $N, k, l, 0 \leq k \leq l \leq |T| - l$, 且 $N(k+1) + |T| - K \leq m$, 集合 $\Lambda \subset \{1, 2, \dots, n\}$ 满足 $|\Lambda| = Nk$ 和 $|T \cap \Lambda| = l$, 令集合 $W \subset T^c$ 满足 $|W| = N$ 且 $W \cap \Lambda = \emptyset$. 若 $Y = \Phi X + V$ 中的 Φ 满足 $N(k+1) + |T| - l$ 阶的 RIP 条件, 则

$$\begin{aligned} & \max_{i \in T \setminus \Lambda} \|\Phi_i^\top P_\Lambda^\perp \Phi_{T \setminus \Lambda} X_{T \setminus \Lambda}\|_2 - \\ & (1/N) \sum_{j \in W} \|\Phi_j^\top P_\Lambda^\perp \Phi_{T \setminus \Lambda} X_{T \setminus \Lambda}\|_2 \geq \\ & \frac{(1 - \sqrt{(|T| - l)/N + 1} \delta_{N(k+1) + |T| - l}) \|X_{T \setminus \Lambda}\|_F}{\sqrt{|T| - l}}. \end{aligned} \quad (10)$$

在证明前需要说明, 引理 5 的灵感主要源自文献[18], 把文献[18]中的 $p=1$ 延拓到一般的 p , 即 MMV 问题. 不同于文献[18]中定义的向量 $\bar{e}_w \in R^N$, 定义矩阵 $\bar{E}_w = R^{N \times p}$ (式(15)).

首先证明

$$\begin{aligned} & \max_{i \in T \setminus \Lambda} \|\Phi_i^\top P_\Lambda^\perp \Phi_{T \setminus \Lambda} X_{T \setminus \Lambda}\|_2 \geq \\ & \frac{1}{\sqrt{|T| - l} \|X_{T \setminus \Lambda}\|_F} \|\Phi_{T \setminus \Lambda}^\top P_\Lambda^\perp \Phi_{T \setminus \Lambda} X_{T \setminus \Lambda}\|_F^2. \end{aligned} \quad (11)$$

由 $|T \cap \Lambda| = l \leq |T| - 1$ 和 $\|X_{T \setminus \Lambda}\|_F \neq 0$ 可得:

$$\begin{aligned} & \max_{i \in T \setminus \Lambda} \|\Phi_i^\top P_\Lambda^\perp \Phi_{T \setminus \Lambda} X_{T \setminus \Lambda}\|_2 \stackrel{(a)}{\geq} \\ & \frac{1}{\sqrt{|T| - l}} \|\Phi_{T \setminus \Lambda}^\top P_\Lambda^\perp \Phi_{T \setminus \Lambda} X_{T \setminus \Lambda}\|_F \stackrel{(b)}{=} \\ & \frac{1}{\sqrt{|T| - l}} \|(\Phi_{T \setminus \Lambda}^\top P_\Lambda^\perp \Phi_{T \setminus \Lambda})^\top (\Phi_{T \setminus \Lambda}^\top P_\Lambda^\perp \Phi_{T \setminus \Lambda}) X_{T \setminus \Lambda}\|_F \stackrel{(c)}{=} \\ & \frac{1}{\sqrt{|T| - l} \|X_{T \setminus \Lambda}\|_F} \|\Phi_{T \setminus \Lambda}^\top P_\Lambda^\perp \Phi_{T \setminus \Lambda} X_{T \setminus \Lambda}\|_F^2, \end{aligned}$$

此处(a)是由式(9)所得, (b)是因为

$$(\Phi_{T \setminus \Lambda}^\top P_\Lambda^\perp \Phi_{T \setminus \Lambda})^\top (\Phi_{T \setminus \Lambda}^\top P_\Lambda^\perp \Phi_{T \setminus \Lambda}) = \Phi_{T \setminus \Lambda}^\top P_\Lambda^\perp \Phi_{T \setminus \Lambda}. \quad (12)$$

引理 3 中分别令 $M = \Phi_{T \setminus \Lambda}^\top P_\Lambda^\perp \Phi_{T \setminus \Lambda}$, $N = X_{T \setminus \Lambda}$, 即可得(c). 所以式(11)成立. 令

$$\mu = -\frac{\sqrt{(|T| - l)/N + 1} - 1}{\sqrt{(|T| - l)/N}}, \quad (13)$$

通过计算可得:

$$\begin{aligned} & 2\mu / (1 - \mu^2) = -\sqrt{(|T| - l)/N}, \\ & (1 + \mu^2) / (1 - \mu^2) = \sqrt{(|T| - l)/N + 1}. \end{aligned} \quad (14)$$

为了书写方便, 令 $W = \{j_1, j_2, \dots, j_N\}$, 并且定义矩阵 $E \in R^{N \times p}$ 为:

$$\begin{aligned} (E_w)_t &= \frac{\Phi_w^\top P_\Lambda^\perp \Phi_{T \setminus \Lambda} X_{(t)T \setminus \Lambda}}{\|\Phi_w^\top P_\Lambda^\perp \Phi_{T \setminus \Lambda} X_{T \setminus \Lambda}\|_2}, \\ & 1 \leq i \leq N, 1 \leq t \leq p, \end{aligned} \quad (15)$$

$X_{(t)T \setminus \Lambda}$ 表示矩阵 $X_{T \setminus \Lambda}$ 的第 t 列, $(E_w)_t$ 表示 E_w 的第 t 列. 不难得到:

$$\sum_{t=1}^p (E_w)_t^\top E_w = 1, t = 1, 2, \dots, p, \quad (16)$$

$$\|E_w\|_F^2 = \text{tr}(E_w^\top E_w) = N. \quad (17)$$

此外, 还定义

$$Q = P_T^\perp [\Phi_{T \setminus \Lambda} \Phi_w], \quad (18)$$

$$U = \begin{bmatrix} X_{T \setminus \Lambda} \\ 0 \end{bmatrix} \in R^{(|T \setminus \Lambda| + N) \times p}, \quad (19)$$

$$V = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\mu \|X_{T \setminus \Lambda}\|_2}{\sqrt{N}} E_w \end{bmatrix} \in R^{(|T \setminus \Lambda| + N) \times p}, \quad (20)$$

则有:

$$\mathbf{Q}\mathbf{U} = \mathbf{P}_T^\perp \boldsymbol{\Phi}_{T \setminus \Lambda} \mathbf{X}_{T \setminus \Lambda}, \quad (21)$$

$$\|\mathbf{U} + \mathbf{V}\|_F^2 = (1 + \mu^2) \|\mathbf{X}\|_F^2, \quad (22)$$

$$\|\mu^2 \mathbf{U} - \mathbf{V}\|_F^2 = \mu^2 (1 + \mu^2) \|\mathbf{X}_{T \setminus \Lambda}\|_F^2. \quad (23)$$

因此有:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \mathbf{V}_i^\top \mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} \mathbf{U}_i &= \mu \|\mathbf{X}_{T \setminus \Lambda}\|_F / \sqrt{N}. \\ \sum_{i=1}^p (\mathbf{E}_W)_i^\top \boldsymbol{\Phi}_W^\top \mathbf{P}_T^\perp \mathbf{P}_T^\perp \boldsymbol{\Phi}_{T \setminus \Lambda} \mathbf{X}_{(i)T \setminus \Lambda} &= \\ \frac{\mu \|\mathbf{X}_{T \setminus \Lambda}\|_F}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^p (\boldsymbol{\Phi}_W)_i^\top \boldsymbol{\Phi}_W^\top \mathbf{P}_T^\perp \boldsymbol{\Phi}_{T \setminus \Lambda} \mathbf{X}_{(i)T \setminus \Lambda} &= \\ \frac{\mu \|\mathbf{X}_{T \setminus \Lambda}\|_F}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^p \|\boldsymbol{\Phi}_W^\top \mathbf{P}_T^\perp \boldsymbol{\Phi}_{T \setminus \Lambda} \mathbf{X}_{(i)T \setminus \Lambda}\|_2, \quad (24) \end{aligned}$$

这里(a)是由式(18)~(20)所得, (b)和(c)分别由式(12)和式(15)所得. 进而有:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Q}(\mathbf{U} + \mathbf{V})\|_F^2 &= \sum_{i=1}^p \|\mathbf{Q}(\mathbf{U}_i + \mathbf{V}_i)\|_2^2 = \\ \sum_{i=1}^p \|\mathbf{Q}\mathbf{U}_i\|_2^2 + \sum_{i=1}^p \|\mathbf{Q}\mathbf{V}_i\|_2^2 + 2 \sum_{i=1}^p \mathbf{V}_i^\top \mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} \mathbf{U}_i &= \\ \|\mathbf{Q}\mathbf{U}\|_F^2 + \|\mathbf{Q}\mathbf{V}\|_F^2 + \frac{2\mu \|\mathbf{X}_{T \setminus \Lambda}\|_F}{\sqrt{N}} \cdot \\ \sum_{j \in W} \|\boldsymbol{\Phi}_W^\top \mathbf{P}_T^\perp \boldsymbol{\Phi}_{T \setminus \Lambda} \mathbf{X}_{T \setminus \Lambda}\|_2, \quad (25) \\ \|\mathbf{Q}(\mu^2 \mathbf{U} - \mathbf{V})\|_F^2 &= \sum_{i=1}^p \|\mathbf{Q}(\mu^2 \mathbf{U}_i - \mathbf{V}_i)\|_2^2 = \\ \mu^4 \sum_{i=1}^p \|\mathbf{Q}\mathbf{U}_i\|_2^2 + \sum_{i=1}^p \|\mathbf{Q}\mathbf{V}_i\|_2^2 - \\ 2\mu^2 \sum_{i=1}^p \mathbf{V}_i^\top \mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} \mathbf{U}_i &= \mu^4 \|\mathbf{Q}\mathbf{U}\|_F^2 + \|\mathbf{Q}\mathbf{V}\|_F^2 - \\ \frac{2\mu^3 \|\mathbf{X}_{T \setminus \Lambda}\|_F}{\sqrt{N}} \sum_{j \in W} \|\boldsymbol{\Phi}_W^\top \mathbf{P}_T^\perp \boldsymbol{\Phi}_{T \setminus \Lambda} \mathbf{X}_{T \setminus \Lambda}\|_2, \quad (26) \end{aligned}$$

由式(26)可得:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Q}(\mathbf{U} + \mathbf{V})\|_F^2 - \|\mathbf{Q}(\mu^2 \mathbf{U} - \mathbf{V})\|_F^2 &= \\ (1 - \mu^4) \|\mathbf{Q}\mathbf{U}\|_F^2 + 2\mu(1 + \mu^2) \cdot \\ \frac{\|\mathbf{X}_{T \setminus \Lambda}\|_F}{\sqrt{N}} \sum_{j \in W} \|\boldsymbol{\Phi}_W^\top \mathbf{P}_T^\perp \boldsymbol{\Phi}_{T \setminus \Lambda} \mathbf{X}_{T \setminus \Lambda}\|_2 &= \\ (1 - \mu^4) \left(\|\mathbf{Q}\mathbf{U}\|_F^2 + \frac{2\mu}{1 - \mu^2} \frac{\|\mathbf{X}_{T \setminus \Lambda}\|_F}{\sqrt{N}} \cdot \right. \\ \left. \sum_{j \in W} \|\boldsymbol{\Phi}_W^\top \mathbf{P}_T^\perp \boldsymbol{\Phi}_{T \setminus \Lambda} \mathbf{X}_{T \setminus \Lambda}\|_2 \right) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 - \mu^4) \left(\|\mathbf{Q}\mathbf{U}\|_F^2 - \frac{\sqrt{|T| - l} \|\mathbf{X}_{T \setminus \Lambda}\|_F}{\sqrt{N}} \cdot \right. \\ \left. \sum_{j \in W} \|\boldsymbol{\Phi}_W^\top \mathbf{P}_T^\perp \boldsymbol{\Phi}_{T \setminus \Lambda} \mathbf{X}_{T \setminus \Lambda}\|_2 \right). \quad (27) \end{aligned}$$

最后一个等号是由式(14)的第一个等式得到.

另一方面, 有:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Q}(\mathbf{U} + \mathbf{V})\|_F^2 - \|\mathbf{Q}(\mu^2 \mathbf{U} - \mathbf{V})\|_F^2 &= \\ \sum_{i=1}^p \|\mathbf{Q}(\mathbf{U}_i + \mathbf{V}_i)\|_2^2 - \sum_{i=1}^p \|\mathbf{Q}(\mu^2 \mathbf{U}_i - \mathbf{V}_i)\|_2^2 &\stackrel{(a)}{\geq} \\ (1 - \delta_{N(k+1)+|T|-l}) \sum_{i=1}^p \|\mathbf{U}_i + \mathbf{V}_i\|_2^2 - \\ (1 + \delta_{N(k+1)+|T|-l}) \sum_{i=1}^p \|\mu^2 \mathbf{U}_i - \mathbf{V}_i\|_2^2 &= \\ (1 - \delta_{N(k+1)+|T|-l}) \|\mathbf{U} + \mathbf{V}\|_F^2 - \\ (1 + \delta_{N(k+1)+|T|-l}) \|\mu^2 \mathbf{U} - \mathbf{V}\|_F^2 &\stackrel{(b)}{=} \\ (1 - \delta_{N(k+1)+|T|-l}) (1 + \mu^2) \|\mathbf{X}_{T \setminus \Lambda}\|_F^2 - \\ (1 + \delta_{N(k+1)+|T|-l}) \mu^2 (1 + \mu^2) \|\mathbf{X}_{T \setminus \Lambda}\|_F^2 &= \\ (1 - \mu^4) \left(1 - \frac{1 + \mu^2}{1 - \mu^2} \delta_{N(k+1)+|T|-l} \right) \|\mathbf{X}_{T \setminus \Lambda}\|_F^2 &\stackrel{(c)}{=} \\ (1 - \mu^4) \left(1 - \sqrt{(|T| - l) / N + 1} \delta_{N(k+1)+|T|-l} \right) \cdot \\ \|\mathbf{X}_{T \setminus \Lambda}\|_F^2, \quad (28) \end{aligned}$$

此处(a)是由引理 $2(|T \cap \Lambda| = l, |W| = N, |\Lambda| = kN$ 和 $|\Lambda \cup ((T \setminus \Lambda) \cup W)| = N(k+1) + |T| - l$) 得到; (b)由式(22)和式(23)得到; (c)由式(14)的第二个等式得到.

结合式(18)、(27)、(28)以及 $1 - \mu^4 > 0$ 可得:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Q}\mathbf{U}\|_F^2 - \frac{\sqrt{|T| - l} \|\mathbf{X}_{T \setminus \Lambda}\|_F}{N} \cdot \\ \sum_{j \in W} \|\boldsymbol{\Phi}_W^\top \mathbf{P}_T^\perp \boldsymbol{\Phi}_{T \setminus \Lambda} \mathbf{X}_{T \setminus \Lambda}\|_2 &= \|\mathbf{P}_T^\perp \boldsymbol{\Phi}_{T \setminus \Lambda} \mathbf{X}_{T \setminus \Lambda}\|_F^2 - \\ \frac{\sqrt{|T| - l} \|\mathbf{X}_{T \setminus \Lambda}\|_F^2}{N} \sum_{j \in W} \|\boldsymbol{\Phi}_W^\top \mathbf{P}_T^\perp \boldsymbol{\Phi}_{T \setminus \Lambda} \mathbf{X}_{T \setminus \Lambda}\|_2 &\geq \\ (1 - \sqrt{(|T| - l) / N + 1} \delta_{N(k+1)+|T|-l}) \|\mathbf{X}_{T \setminus \Lambda}\|_F^2. \quad (29) \end{aligned}$$

结合式(11)和式(29)可得:

$$\begin{aligned} \max_{i \in T \setminus \Lambda} \|\boldsymbol{\Phi}_i^\top \mathbf{P}_T^\perp \boldsymbol{\Phi}_{T \setminus \Lambda} \mathbf{X}_{T \setminus \Lambda}\|_2 - \\ \frac{1}{N} \sum_{j \in W} \|\boldsymbol{\Phi}_W^\top \mathbf{P}_T^\perp \boldsymbol{\Phi}_{T \setminus \Lambda} \mathbf{X}_{T \setminus \Lambda}\|_2 &\geq \end{aligned}$$

$$\frac{1 - \sqrt{(|T| - l) / N + 1} \delta_{N(k+1)+|T|-l}}{\sqrt{|T| - l}} \|\mathbf{x}_{T \setminus A}\|_2.$$

引理 5 的证明结束.

注释 1 当 $p=1$ 时, 引理 5 中式(10)就变为文献[18]中的

$$\max_{i \in T \setminus A} |\Phi_i^T P_A^\perp \Phi_{T \setminus A} \mathbf{x}_{T \setminus A}| - \frac{1}{N} \sum_{j \in W} |\Phi_j^T P_A^\perp \Phi_{T \setminus A} \mathbf{x}_{T \setminus A}| \geq \frac{(1 - \sqrt{(|T| - l) / N + 1} \delta_{N(k+1)+|T|-l}) \|\mathbf{x}_{T \setminus A}\|_2}{\sqrt{|T| - l}},$$

当 $p=1$ 且 $N=1$ 时, 该结论变成文献[23]中

$$\|\Phi_{T \setminus A}^T P_A^\perp \Phi_{T \setminus A} \mathbf{x}_{T \setminus A}\|_\infty - \|\Phi_{T^c}^T P_A^\perp \Phi_{T \setminus A} \mathbf{x}_{T \setminus A}\|_\infty \geq \frac{(1 - \sqrt{|T| - l + 1} \delta_{|T|+1}) \|\mathbf{x}_{T \setminus A}\|_2}{\sqrt{|T| - l + 1}}.$$

引理中条件 $N(k+1) + |T| - k \leq m$ 是为了确保假设 Φ 满足 $N(k+1) + |T| - l$ 阶的 RIP 条件.

有了引理 1, 可以证明定理 1.

定理 1 对正整数 k 和 N 满足 $0 \leq k \leq |T| - 1$ 和 $N(k+1) + |T| - k \leq m$, 假设矩阵 Φ 满足 $N(k+1) + |T| - l$ 阶的 RIP 条件, 即

$$\delta_{N(k+1)+|T|-k} < \frac{1}{\sqrt{|T|/N+1}}, \quad (30)$$

则 OMMP 算法在前 $(k+1)$ 次迭代中每次迭代至少可以识别一个 T 中的索引, 直到 T 中所有索引都被识别, 或 OMMP 算法在满足条件:

$$\sqrt{MSNR} > \frac{\sqrt{2K}(1 + \delta_{N(k+1)+|T|-k})}{(1 - \sqrt{|T|/N+1} \delta_{N(k+1)+|T|-k}) \sqrt{MMAR}} \quad (31)$$

时终止迭代.

用数学归纳法证明该结论.

假设 OMMP 算法在前 k 次迭代中至少选择一个正确索引, 则有 $l = |T \cap A_k| \geq k$. 假设 $T \not\subseteq A_k$ (即 $l \leq |T| - 1$) 以及算法 1 至少迭代 $(k+1)$ 次, 否则结论显然成立. 接着需要证明 $(A_{k+1} \setminus A_k) \cap T \neq \emptyset$. 由于 $A_0 = \emptyset$, 所以 $k=0$ 时归纳假设 $|T| > |A_k \cap T| \geq k$ 成立. 因此, 第一次迭代的证明包含 $k=0$ 的情况.

让

$$W = \{j_1, j_2, \dots, j_N\} \subseteq T^c, \quad (32)$$

满足

$$\|\Phi_{j_1}^T \mathbf{R}^k\|_2 \geq \dots \geq \|\Phi_{j_N}^T \mathbf{R}^k\|_2 \geq \|\Phi_{j \in (T^c \setminus W)}^T \mathbf{R}^k\|_2, \quad (33)$$

则要证 $(A_{k+1} \setminus A_k) \cap T \neq \emptyset$, 只需证

$$\max_{i \in T} \|\Phi_i^T \mathbf{R}^k\|_2 > \|\Phi_{j_N}^T \mathbf{R}^k\|_2, \quad (34)$$

由式(33)知, 只需证

$$\max_{i \in T} \|\Phi_i^T \mathbf{R}^k\|_2 > \frac{1}{N} \sum_{j \in W} \|\Phi_j^T \mathbf{R}^k\|_2 \quad (35)$$

即可.

由算法 1 的第 4 和 5 行可知:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^k &= \mathbf{Y} - \Phi_{A_k} \hat{\mathbf{X}}_{A_k} = \\ &[I - \Phi_{A_k} (\Phi_{A_k}^T \Phi_{A_k})^{-1}] \mathbf{Y} = \\ &\mathbf{P}_{A_k}^\perp (\Phi \mathbf{X} + \mathbf{V}) = \mathbf{P}_{A_k}^\perp (\Phi_T \mathbf{X}_T + \mathbf{V}) = \\ &\mathbf{P}_{A_k}^\perp (\Phi_{T \cap A_k} \mathbf{X}_{T \cap A_k} + \Phi_{T \setminus A_k} \mathbf{X}_{T \setminus A_k} + \mathbf{V}) = \\ &\mathbf{P}_{A_k}^\perp \Phi_{T \setminus A_k} \mathbf{X}_{T \setminus A_k} + \mathbf{P}_{A_k}^\perp \mathbf{V}, \end{aligned} \quad (36)$$

这里(a)、(b)和(c)的依据分别是 $\mathbf{P}_{A_k}^\perp$ 的定义、集合 T 是矩阵 $\mathbf{X}$ 的支撑集以及 $\mathbf{P}_{A_k}^\perp \Phi_{A_k} = \mathbf{0}$. 由算法 1 的第 3 和 4 行可知, 对于每一个 $i \in A_k$, 都有 $\|\Phi_i^T \mathbf{R}^k\|_2 = 0$. 因此, 由式(36)和三角不等式可得:

$$\max_{i \in T} \|\Phi_i^T \mathbf{R}^k\|_2 \geq \max_{i \in T \setminus A_k} (\|\Phi_i^T \mathbf{P}_{A_k}^\perp \Phi_{T \setminus A_k} \mathbf{X}_{T \setminus A_k}\|_2 - \|\Phi_i \mathbf{P}_{A_k}^\perp \mathbf{V}\|_2), \quad (37)$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N} \sum_{j \in W} \|\Phi_j^T \mathbf{R}^k\|_2 = \\ &\frac{1}{N} \sum_{j \in W} \|\Phi_j^T (\mathbf{P}_{A_k}^\perp \Phi_{T \setminus A_k} \mathbf{X}_{T \setminus A_k} + \mathbf{P}_{A_k}^\perp \mathbf{V})\|_2 \leq \\ &\frac{1}{N} \sum_{j \in W} \|\Phi_j^T \mathbf{P}_{A_k}^\perp \Phi_{T \setminus A_k} \mathbf{X}_{T \setminus A_k}\|_2 + \\ &\frac{1}{N} \sum_{j \in W} \|\Phi_j^T \mathbf{P}_{A_k}^\perp \mathbf{V}\|_2 \leq \\ &\frac{1}{N} \sum_{j \in W} \|\Phi_j^T \mathbf{P}_{A_k}^\perp \Phi_{T \setminus A_k} \mathbf{X}_{T \setminus A_k}\|_2 + \\ &\max_{j \in W} \|\Phi_j^T \mathbf{P}_{A_k}^\perp \mathbf{V}\|_2. \end{aligned} \quad (38)$$

令

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \max_{i \in T \setminus A_k} \|\Phi_i^T \mathbf{P}_{A_k}^\perp \Phi_{T \setminus A_k} \mathbf{X}_{T \setminus A_k}\|_2 - \\ &\frac{1}{N} \sum_{j \in W} \|\Phi_j^T \mathbf{P}_{A_k}^\perp \Phi_{T \setminus A_k} \mathbf{X}_{T \setminus A_k}\|_2, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\beta_2 = \max_{i \in T \setminus A_k} \|\Phi_i^T \mathbf{P}_{A_k}^\perp \mathbf{V}\|_2 + \max_{j \in W} \|\Phi_j^T \mathbf{P}_{A_k}^\perp \mathbf{V}\|_2, \quad (40)$$

接着证明

$$\beta_1 > \beta_2. \quad (41)$$

显然, 存在 $i_0 \in T \setminus \Lambda_k$ 和 $j_0 \in W$ 满足:

$$\max_{i \in T \setminus \Lambda_k} \|\Phi_i^T P_{\Lambda_k}^\perp V\|_2 = \|\Phi_{i_0}^T P_{\Lambda_k}^\perp V\|_2,$$

$$\max_{j \in W} \|\Phi_j^T P_{\Lambda_k}^\perp V\|_2 = \|\Phi_{j_0}^T P_{\Lambda_k}^\perp V\|_2,$$

因此

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \|\Phi_{i_0}^T P_{\Lambda_k}^\perp V\|_2 + \|\Phi_{j_0}^T P_{\Lambda_k}^\perp V\|_2 \stackrel{(a)}{\leq} \\ &\sqrt{2}(\|\Phi_{i_0}^T P_{\Lambda_k}^\perp V\|_2^2 + \|\Phi_{j_0}^T P_{\Lambda_k}^\perp V\|_2^2)^{1/2} = \\ &\sqrt{2}(\sum_{i=1}^p \|\Phi_{i_0 \cup j_0}^T P_{\Lambda_k}^\perp V\|_2^2)^{1/2} \stackrel{(b)}{\leq} \\ &\sqrt{2(1 + \delta_{N(k+1)+|T|-k})}(\sum_{i=1}^p \|P_{\Lambda_k}^\perp V_i\|_2^2)^{1/2} = \\ &\sqrt{2(1 + \delta_{N(k+1)+|T|-k})} \|V\|_F, \end{aligned} \quad (42)$$

此处(a)是由 Cauchy-Schwarz 不等式所得, (b)由引理 2 和 $\|P_{\Lambda_k}^\perp V_i\|_2 \leq \|P_{\Lambda_k}^\perp\|_2 \|V_i\|_2 \leq \|V_i\|_2$ 可得. 下面给出 β_1 的下界. 由算法 1 的第 3 行知, $|\Lambda_k| = kN$. 由归纳假设,

$$0 \leq k \leq |T \cap \Lambda_k| = l \leq |T| - 1, \quad (43)$$

由式(32)和 $|W| = N$, 结合引理 1 和引理 5, 以及式(39)可得:

$$\begin{aligned} \beta_1 &\geq \frac{(1 - \sqrt{(|T| - l)/N + 1} \delta_{N(k+1)+|T|-l}) \|X_{T \setminus \Lambda_k}\|_F}{\sqrt{|T| - l}} \geq \\ &\frac{(1 - \sqrt{|T|/N + 1} \delta_{N(k+1)+|T|-k}) \|X_{T \setminus \Lambda_k}\|_F}{\sqrt{|T| - l}}, \end{aligned} \quad (44)$$

第二个不等式是因式(43)中 $k \leq l$ 以及引理 1 得到. 又由 $l = |T \cap \Lambda_k|$, 故有:

$$\begin{aligned} \|X_{T \setminus \Lambda_k}\|_F^2 &= \sum_{i=1}^{|T|-l} \|X_i\|_2^2 \geq \sqrt{|T| - l} \min_{i \in T \setminus \Lambda_k} \|X_i\|_2^2 \stackrel{(a)}{=} \\ &(|T| - l) \frac{MMAR}{K} \|X\|_F^2 \stackrel{(b)}{\geq} \\ &(|T| - l) \frac{MMAR}{K} \frac{1}{1 + \delta_{N(k+1)+|T|-k}} \|\Phi X\|_F^2 \stackrel{(c)}{\geq} \\ &(|T| - l) \frac{1}{K(1 + \delta_{N(k+1)+|T|-k})} \cdot \\ &MMAR \cdot MSNR \|V\|_F^2, \end{aligned} \quad (45)$$

这里(a)和(c)是将式(6)直接代入即可, (b)是由于

$$\|\Phi X\|_F^2 = \|\Phi_T X_T\|_F^2 = \sum_{i=1}^{|T|} \|\Phi_T X_i\|_2^2 \leq$$

$$(1 + \delta_{|T|}) \sum_{i=1}^{|T|} \|X_i\|_2^2 \leq (1 + \delta_{N(k+1)+|T|-k}) \|X\|_F^2.$$

因此有:

$$\|X_{T \setminus \Lambda_k}\|_F \geq \sqrt{\frac{|T| - l}{K(1 + \delta_{N(k+1)+|T|-k})}}.$$

$$\sqrt{MMAR \cdot MSNR} \|V\|_F.$$

(46)

将式(44)和式(46)结合可得:

$$\beta_1 \geq \frac{(1 - \sqrt{|T|/N + 1} \delta_{N(k+1)+|T|-k})}{\sqrt{K(1 + \delta_{N(k+1)+|T|-k})}}.$$

$$\frac{\sqrt{MMAR \cdot MSNR}}{\sqrt{K(1 + \delta_{N(k+1)+|T|-k})}} \|V\|_F.$$

(47)

由式(42), 要想式(41)成立, 只要使

$$\frac{(1 - \sqrt{|T|/N + 1} \delta_{N(k+1)+|T|-k})}{\sqrt{K(1 + \delta_{N(k+1)+|T|-k})}}.$$

$$\frac{\sqrt{MMAR \cdot MSNR}}{\sqrt{K(1 + \delta_{N(k+1)+|T|-k})}} \|V\|_F >$$

$$\sqrt{2(1 + \delta_{N(k+1)+|T|-k})} \|V\|_F.$$

这等价于式(31). 由归纳假设, 结论成立. 定理中当 $k = |T| - 1$ 时, 结合引理 1 可以得到定理 2.

定理 2 对于正整数 N 满足 $1 \leq N \leq (m-1)/K$, 假设矩阵 Φ 满足 RIP 条件

$$\delta_{NK+1} < \frac{1}{\sqrt{K/N + 1}}, \quad (48)$$

则 OMMP 算法在 $k_0 (1 \leq k_0 < K)$ 次迭代终止之前至少检索到 T 中的 k_0 个索引, 或者在 K 次迭代中恢复 T 只要

$$\sqrt{MSNR} > \frac{\sqrt{2K}(1 + \delta_{NK+1})}{(1 - \sqrt{|T|/N + 1} \delta_{NK+1}) \sqrt{MMAR}}. \quad (49)$$

注释 2 当 $N=1$ 且 $p=1$ 时, MMV 问题的 OMMP 算法就变成了 SMV 问题的 OMP 算法, 对应的条件变成文献[19]中的

$$\delta_{K+1} < \frac{1}{\sqrt{K+1}},$$

$$\sqrt{SNR} > \frac{\sqrt{2K}(1 + \delta_{K+1})}{(1 - (\sqrt{K} + 1)\delta_{K+1}) \sqrt{MAR}}.$$

很显然, 我们的条件比该条件更松弛.

考虑 OMMP 算法迭代 $k_0 (0 < k_0 < K)$ 次后可能会终止, 此时该算法在式(48)和式(49)的条件下不能保证恢复 T . 因此将再给出一个定理, 在给出新定理前, 先给出引理 6.

引理 6 假设 $\mathbf{V} = \mathbf{0}$, 对于正整数 k, N , 并且有 $1 \leq k \leq |T| - 1$ 和 $1 \leq N \leq (m-1)/K$, 矩阵 Φ 满足 RIP 条件

$$\delta_{NK+1} < \frac{1}{\sqrt{K/N+1}},$$

若存在一个正整数 k_0 , 满足 $0 < k_0 \leq k$ 和 $|T \cap A_{k_0}| \geq k_0$, 使得 $\|\mathbf{R}^{k_0}\|_F = \mathbf{0}$, 则 $T \subset A_{k_0}$.

证明 用反证法证明这个引理. 设 $T \not\subset A_{k_0}$, 令 $\Gamma = T \cup A_{k_0}$. 定义

$$\bar{\mathbf{X}} = \begin{cases} \bar{\mathbf{X}}_i, i \in T, \\ \mathbf{0}, i \notin T, \end{cases} \quad \tilde{\mathbf{X}} = \begin{cases} (\hat{\mathbf{X}}_{A_{k_0}})_i, i \in A_{k_0}, \\ \mathbf{0}, i \notin A_{k_0}, \end{cases} \quad (50)$$

此处 $\hat{\mathbf{X}}_{A_{k_0}}$ 是由算法 1 的第 5 行所得. 由于 $\|\mathbf{R}^{k_0}\|_F = \mathbf{0}$ 和算法 1 的第 6 行 $\mathbf{Y} = \Phi_{A_{k_0}} \hat{\mathbf{X}}_{A_{k_0}}$, 因此有:

$$\begin{aligned} \Phi_{\Gamma} \mathbf{X} &= \Phi_T \mathbf{X}_T = \Phi \mathbf{X} = \mathbf{Y} = \\ &= \Phi_{A_{k_0}} \hat{\mathbf{X}}_{A_{k_0}} = \Phi_{\Gamma} \tilde{\mathbf{X}}. \end{aligned} \quad (51)$$

又 $|T \cap A_{k_0}| \geq k_0$ 和 $\Gamma = T \cup A_{k_0}$, 因此有:

$$\begin{aligned} |\Gamma| &= |T| + |A_{k_0}| - |T \cap A_{k_0}| \leq \\ &= |T| + Nk - k \leq N(k+1) + |T| - k. \end{aligned}$$

由式(30)知, Φ_{Γ} 是列满秩的, 结合式(51)可得 $\bar{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{X}}$. 另一方面, 由 $\bar{\mathbf{X}}$ 和 $\tilde{\mathbf{X}}$ 的定义以及假设 $T \not\subset A_{k_0}$, 存在 $j_0 \in (T \setminus A_{k_0})$ 使得 $\bar{\mathbf{X}}_{j_0} \neq \mathbf{0}$, 但 $\tilde{\mathbf{X}}_{j_0} = \mathbf{0}$, 即 $\bar{\mathbf{X}} \neq \tilde{\mathbf{X}}$. 这与 $\bar{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{X}}$ 矛盾. 证明结束.

由定理 2 和引理 6, 可以直接得出定理 3.

定理 3 假设噪声 $\mathbf{V} = \mathbf{0}$, 对于正整数 $N (1 \leq N \leq (m-1)/K)$, 矩阵 Φ 满足 RIP 条件

$$\delta_{NK+1} < \frac{1}{\sqrt{K/N+1}},$$

则 OMMP 算法可以在 K 次迭代中恢复 $\mathbf{X}$.

注释 3 在 $p=1$ 且没有噪声的情况下, OMMP 算法在 K 次迭代准确地恢复稀疏信号 $\mathbf{x}$ 的充分条件是

$$\delta_{NK+1} < 1/(\sqrt{K/N+1}).$$

很显然

$$\frac{1}{\sqrt{K/N+1}} < \frac{1}{\sqrt{K/N+1}},$$

即定理 3 的条件更松弛.

3 结论

本文将 OMMP 算法中的 SMV 问题扩展到 MMV 问题, 并证明了在 MSNR 和 MMAR 的条件下, 若矩阵 Φ 满足 RIP 条件

$$\delta_{NK+1} < \frac{1}{\sqrt{K/N+1}},$$

则 OMMP 算法可以准确恢复 K -行稀疏矩阵 $\mathbf{X}$.

参考文献:

- [1] DONOHO D L. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4):1289-1306.
- [2] CANDES E J, TAO T. Decoding by linear programming [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2005, 51(12):4203-4215.
- [3] WAKIN M B, LASKA J N, DUARTE M F, et al. An architecture for compressive imaging[C]//2006 International Conference on Image Processing. Atlanta, GA, USA. IEEE, 2006:1273-1276.
- [4] DONOHO D L, ELAD M, TEMLYAKOV V N. Stable recovery of sparse overcomplete representations in the presence of noise[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(1):6-18.
- [5] HERMAN M A, STROHMER T. High-resolution radar via compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(6):2275-2284.
- [6] LUSTIG M, DONOHO D L, SANTOS J M, et al. Compressed sensing MRI[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2):72-82.
- [7] CHEN J, HUO X M. Theoretical results on sparse representations of multiple-measurement vectors[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(12):4634-4643.
- [8] WANG Y, FU T, GAO M G, et al. Performance of orthogonal matching pursuit for multiple measurement vectors with noise[C]//2013 IEEE China Summit and International Conference on Signal and Information Processing. Beijing, China, 2013:67-71.
- [9] LI H F, WANG L B, ZHAN X Q, et al. On the fundamental limit of orthogonal matching pursuit for multiple measurement vector[J]. IEEE Access, 2019, 7: 48860-48866.

- [10] COTTER S F, RAO B D, ENGAN K, et al. Sparse solutions to linear inverse problems with multiple measurement vectors[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2005, 53(7):2477-2488.
- [11] MALIOUTOV D, CETIN M, WILLSKY A S. A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2005, 53(8):3010-3022.
- [12] WEN J M, LI D F, ZHU F M. Stable recovery of sparse signals via l_p -minimization[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2015, 38(1):161-176.
- [13] 卜京, 王金平. 混合最小化问题下重构块稀疏信号的充分条件[J]. 武汉大学学报(理学版), 2021, 67(2):185-189.
- [14] LIU E T, TEMLYAKOV V N. The orthogonal super greedy algorithm and applications in compressed sensing [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2012, 58(4):2040-2047.
- [15] WANG J, KWON S, SHIM B. Generalized orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012, 60(12):6202-6216.
- [16] SATPATHI S, DAS R L, CHAKRABORTY M. Improving the bound on the RIP constant in generalized orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2013, 20(11):1074-1077.
- [17] SHEN Y, LI B, PAN W L, et al. Analysis of generalised orthogonal matching pursuit using restricted isometry constant[J]. Electronics Letters, 2014, 50(14):1020-1022.
- [18] WEN J M, ZHOU Z C, LI D F, et al. A novel sufficient condition for generalized orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Communications Letters, 2017, 21(4):805-808.
- [19] WANG J. Support recovery with orthogonal matching pursuit in the presence of noise[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, 63(21):5868-5877.
- [20] NEEDELL D, TROPP J A. CoSaMP: iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2009, 26(3):301-321.
- [21] WEN J M, TANG J, ZHU F M. Greedy block coordinate descent under restricted isometry property[J]. Mobile Networks and Applications, 2017, 22(3):371-376.
- [22] ZHANG X W, XIE L J, WANG J P. Some results on OMP algorithm for MMV problem[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2022, 45(9):5402-5411.
- [23] WEN J M, ZHOU Z C, WANG J, et al. A sharp condition for exact support recovery with orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017, 65(6):1370-1382.

Reconstruction of MMV problem based on OMMP algorithm

FENG Xiaoyan, WANG Jinping

(School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: As an extension of OMP, orthogonal multi-matching pursuit (OMMP) has received much attention in recent years. Unlike the OMP, OMMP algorithm identifies $N \geq 1$ indexes per iteration. In this paper, the robustness of the OMMP for multiple measurement vector (MMV) problem under the restricted isometry property (RIP) and multi-signal-to-noise ratio (MSNR), which will be mentioned in introduction, is presented. Furthermore, the induction hypothesis is used to show that the OMMP algorithm can exactly recover K -row sparse matrix in K iterations under the RIP condition presented when $V = \mathbf{0}$ and integer N with $1 \leq N \leq (m-1)/K$.

Key words: compressed sensing; orthogonal multi-matching pursuit; restricted isometry property; multiple measurement vector

(责任编辑 史小丽)