

DOI: 10.20098/j.cnki.1001-5132.2023.0308

基于孔径分布函数的单/双峰持水曲线模型

傅宇晨, 高游*, 李泽

(宁波大学 土木工程与地理环境学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 非饱和土持水曲线是研究非饱和土强度、渗透性以及本构理论的基础。目前大多数非饱和持水曲线模型主要针对单峰持水曲线, 而对于双峰持水曲线的模型研究相对较少。本文通过分析单/双峰孔隙结构土体的孔径分布特征, 利用 Young-Laplace 方程建立土体吸力和孔径之间的关系, 再采用对数正态分布函数来描述土体单/双峰孔径分布特征。在此基础上进一步提出了一个适用于模拟单/双峰持水曲线的模型, 模型中各参数均具有明确物理意义。最后选取文献中不同类型土的持水实验数据对本模型进行验证, 结果表明, 新模型能较好地模拟不同类型土的单/双峰持水曲线。

关键词: 非饱和土; 单/双峰; 持水曲线; 孔径分布

中图分类号: TU43

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2024) 02-0072-06

非饱和土持水曲线是研究非饱和土强度、渗透性以及本构理论的基础^[1], 而持水曲线(Soil-Water Retention Curve, SWRC)代表土体饱和度(或体积含水量)与吸力之间的关系, 表示非饱和土持水能力的大小。很多因素都会对非饱和土的持水特性产生影响, 如应力路径、应力历史、温度以及孔隙结构等^[2-4]。因此, 研究持水特性有助于解释许多非饱和土的相关工程问题。

近年来, 很多学者对非饱和土持水特性进行了大量的理论模型研究。如刘樟荣等^[5]将持水曲线分为吸附和毛细两部分, 构建了全吸力范围内吸附和毛细持水曲线模型; Chen 等^[6]提出了可描述非饱和土水力滞回特性的 SWRC 模型; Fang 等^[7]从毛细与吸附的作用机理差异出发, 提出了考虑毛细和吸附影响的 SWRC 模型; Zhou 等^[8]提出了一个将饱和度分为毛细水和吸附水饱和度的 SWRC 模型; Taylor 等^[9]采用低级配砂进行了不同条件下的持水特性实验, 探讨了不同因素对 SWRC 的影响, 同时以统计方法为基础提出 SWRC 模型。以上持水模型主要针对单峰持水曲线, 但对双峰持水曲线的模

拟效果并不佳。

随着微观实验技术不断发展, 许多学者在研究土体微观孔隙结构过程中发现不同类型土的内部孔隙结构存在明显差异, 可分为单峰孔隙结构、双峰孔隙结构, 甚至多峰孔隙结构^[10-11]。这就导致不同土体展现出不同类型 SWRC 形态, 如单峰、双峰以及多峰形态。现有双峰 SWRC 模型^[12-14]中涉及的拟合参数较多, 且较难确定, 因此有必要对双峰 SWRC 模型进一步深入研究。

本文从土体内部单/双峰孔径分布结构的差异入手, 详细分析了单/双峰孔径的分布特征, 利用 Young-Laplace 方程建立非饱和土体吸力和孔径之间的关系, 并采用对数正态分布函数对土体单/双峰孔径分布特征进行描述。最后在此基础上提出了一个非饱和土单/双峰持水曲线的模型, 并选用不同类型非饱和土持水实验数据对提出的模型进行验证。

1 基于孔径分布函数的 SWRC 模型

土体内部的孔径分布在土体中可视为随机分

收稿日期: 2023-03-08.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journalg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(42272312); 浙江省新苗人才计划项目(2022R405B076)。

第一作者: 傅宇晨, 硕士研究生, 主要研究方向: 非饱和土力学。E-mail: 1871224294@qq.com

*通信作者: 高游, 副教授, 主要研究方向: 土力学。E-mail: gaoyou@nbu.edu.cn

布^[13]. 为更好地理解土体内部孔隙分布量的变化, 用 $g(r)$ 表示土体内部孔径分布函数, 其中, $g(r)dr$ 为孔隙半径从 r 到 $r+dr$ 时的孔隙相对体积. 因此, 土体的体积含水量增量可表示为^[13]:

$$d\theta = g(r)dr, \quad (1)$$

式中: $d\theta$ 为孔隙半径($r, r+dr$)充满水时的体积含水量增量.

对式(1)进行积分, 可得体积含水量与孔隙半径之间的关系:

$$\theta(r) = \int_{r_{\min}}^r g(r)dr, \quad (2)$$

式中: $\theta(r)$ 为土体内部所有半径小于或等于 r 的孔隙充满水时的体积含水量; $r_{\min}$ 为最小孔隙半径. 孔隙全充满水时, 即 r 为 $r_{\max}$ 时, $\theta(r_{\max}) = \theta_s$, θ_s 为土体饱和含水量.

对于非饱和土来说, 土体的吸力(即孔隙气压力和水压力的差值)和孔隙半径可由 Young-Laplace 方程得到:

$$r = \frac{2\xi \cos \beta}{s} = \frac{C}{s}, \quad (3)$$

式中: ξ 为水的表面张力, kN; β 为接触角, °; $C = 2\xi \cos \beta$; s 为吸力, kPa.

通过式(3)可知, 孔隙半径 r 与吸力 s 存在反比例关系, 即当吸力最大时, 孔隙半径最小,

$$s_{\max} = \frac{C}{r_{\min}}.$$

将式(3)代入式(2), 可得体积含水率 θ 与吸力 s 之间的关系:

$$\theta(s) = \int_{s_{\max}}^s f\left(\frac{C}{\varphi}\right)d\left(\frac{C}{\varphi}\right) = \int_{s_{\max}}^s f\left(\frac{C}{\varphi}\right)\left(\frac{C}{\varphi^2}\right)d\varphi, \quad (4)$$

式中: φ 为代替吸力 s 的积分虚拟变量.

为合理地描述非饱和土持水特性, 在饱和状态下的体积含水率应为 θ_s , 结合式(4), 持水曲线的积分形式可写成^[15]:

$$\theta(s) = \theta_s \int_s^\infty f(s)ds, \quad (5)$$

式中: $f(s)$ 为以吸力为变量的孔径分布函数.

由压汞实验可知, 如图 1 所示, 单峰孔隙结构土的孔径分布曲线可近似于正态分布曲线. 故孔径分布函数可假设为对数正态分布函数:

$$f(s) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma s} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln s - \mu}{\sigma}\right)^2}, \quad (6)$$

式中: μ 为孔径分布函数的均值; σ 为孔径分布函数的标准差; e 为自然对数的底.

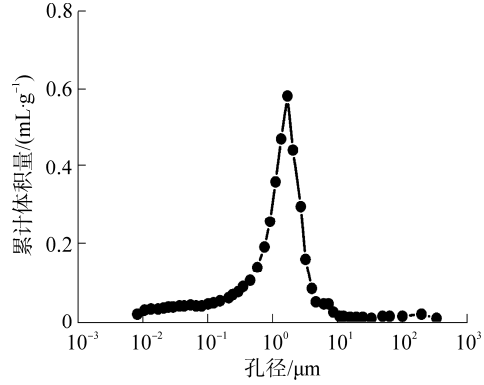


图1 扬州黏性土孔径分布图^[16]

将式(6)代入式(5), 可得以体积含水率 $\theta(s)$ 表示的单峰持水曲线模型:

$$\theta(s) = \theta_s \int_s^\infty f(s)ds = \frac{1}{2}\theta_s \operatorname{erfc}\left(\frac{\ln s - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right), \quad (7)$$

式中: erfc 是误差函数; μ 和 σ 为 2 个拟合参数, 分别与进气值和持水曲线反弯点的斜率相关.

考虑饱和度与体积含水率间的关系($S_r = \theta / \theta_s$)和式(7), 由此可得以饱和度形式表示的单峰持水曲线方程:

$$S_r(s) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\ln s - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right). \quad (8)$$

在自然界中存在着大量的双孔隙结构土, 如部分压实膨胀土、红黏土、级配不良的粗粒土及部分残积土等都表现出较为明显的双峰孔隙结构特性^[17-18], 如图 2 中压实红黏土土体的 SWRC 往往呈现双峰形态. 此外, 集聚体内外孔隙的分界点主要根据孔径分布波谷段最低值对应的孔径值确定, 由图 2 可得压实红黏土孔径分界值约为 $0.4 \mu\text{m}$.

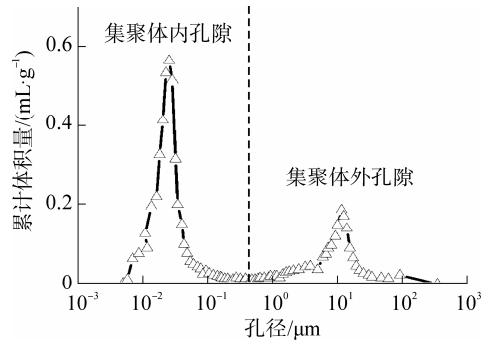


图2 桂林压实红黏土孔径分布图^[19]

双孔隙结构土体内部的孔径分布函数可视为 2

个对数正态分布函数按照一定比例的叠加^[13], 如下式所示:

$$f(s) = f_m(s) + f_M(s), \quad (9)$$

式中: $f_m(s)$ 和 $f_M(s)$ 分别表示集聚体内外的孔径分布函数。

若引入集聚体内外孔隙的比例系数 α , 并结合式(6)和(9), 可得双孔径分布函数:

$$f(s) = -\frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}\sigma_1 s} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln s - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2} - \frac{1-\alpha}{\sqrt{2\pi}\sigma_2 s} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln s - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2}, \quad (10)$$

式中: 下标 1、2 分别为集聚体内外相对应的参数。

联立式(5)和式(10), 可得双峰持水曲线方程:

$$S_r(s) = \frac{\alpha}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\ln s - \mu_1}{\sqrt{2}\sigma_1}\right) + \frac{1-\alpha}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\ln s - \mu_2}{\sqrt{2}\sigma_2}\right). \quad (11)$$

式(11)为基于对数正态分布函数的单/双峰持水曲线方程, 其中包含 5 个参数(α 、 μ_1 、 μ_2 、 σ_1 和 σ_2), 若 α 取 1 时, 式(11)则退化为单峰持水曲线方程。

2 单/双峰 SWRC 模型参数分析

为进一步研究所提模型中各参数的物理意义, 本节分析模型中各参数(α 、 μ_1 、 μ_2 、 σ_1 和 σ_2)对单/双峰 SWRC 形态的影响。

图 3 为单峰 SWRC 模型中 2 个参数 μ 和 σ 对持水曲线形态的影响。图 3(a)表示 σ 相同时, 不同 μ 对曲线形态的影响。随着 μ 的增大, 持水曲线不断向高吸力方向移动, 使整个 SWRC 发生水平移动。图 3(b)表示 μ 相同时, 不同 σ 对持水曲线的影响。随着 σ 的增大, 曲线绕着反弯点旋转。结果表明 σ 越小, SWRC 的进气值越大, 残余值越小, 其相应的孔径分布范围也越小。

图 4 为双峰 SWRC 模型中各参数(α 、 μ_1 、 μ_2 、 σ_1 和 σ_2)对持水曲线形态的影响。图 4(a)表示不同的 σ_1 值和 σ_2 值对曲线的影响。 σ_1 和 σ_2 分别影响集聚体内外孔隙对应的 SWRC, 随着 σ_1 和 σ_2 的增大, 曲线分别绕着两个反弯点旋转, 相应进气值减小; 同时残余吸力值受 σ_1 影响, 随着 σ_1 的增大而增大。图 4(b)表示不同 μ_1 值和 μ_2 值对曲线形态的影响。随

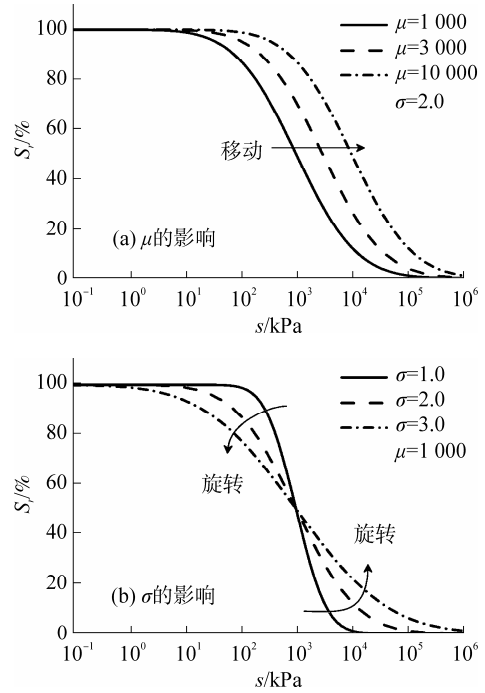
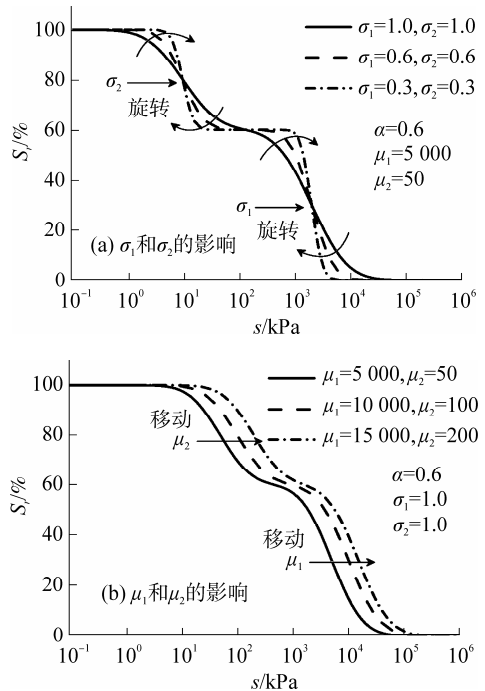


图 3 单峰持水模型参数对 SWRC 形态的影响

着 μ_1 、 μ_2 的增大, SWRC 各段向高吸力移动。图 4(c)表示不同 α 值对曲线形态的影响。随着 α 的增加, 双峰 SWRC 的平台段向上移动。实际上, α 表示了集聚体内外孔隙的比例关系, 随着 α 的增加, 导致双峰 SWRC 平台段不断上升, 曲线逐渐向单峰 SWRC 转变, 当 $\alpha = 1$ 时, 转变为单峰模型。



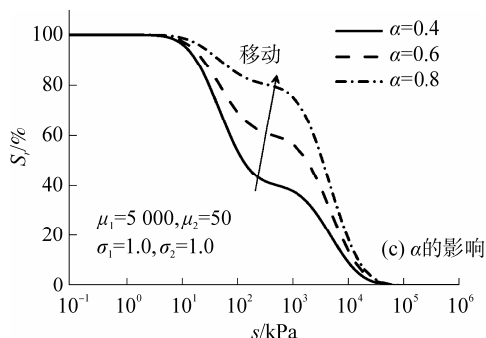


图4 双峰持水模型参数对 SWRC 形态的影响

3 模型验证

为验证本文所提出的单/双峰 SWRC 模型的适用性, 分别选取不同文献中单/双峰持水曲线实测数据进行验证, 如图 5 所示, 采用本文模型分别对上海软土^[20]、风积土^[21]、南阳膨胀土^[22]的单峰持水曲线进行模拟, 此时式(11)中参数 $\alpha = 1.0$ 。从图 5 结果可知, 单峰持水曲线拟合结果与实测数据的一致性较好, 表明本文所提出的模型能够很好地模拟不同类型土的单峰持水曲线。

图 6 为本文模型对黏土、粉土和砂土(实测数据来自文献[23-26]) 3 组双峰持水曲线实测数据的模拟结果。从图 6 中可知, 拟合曲线和实测点吻合度高, 所有持水曲线的 R^2 值均大于 0.990。由此可知所提出的双峰 SWRC 模型能很好地模拟不同类型土的双峰持水特性。

以上对单/双峰持水曲线实测数据的模拟结果

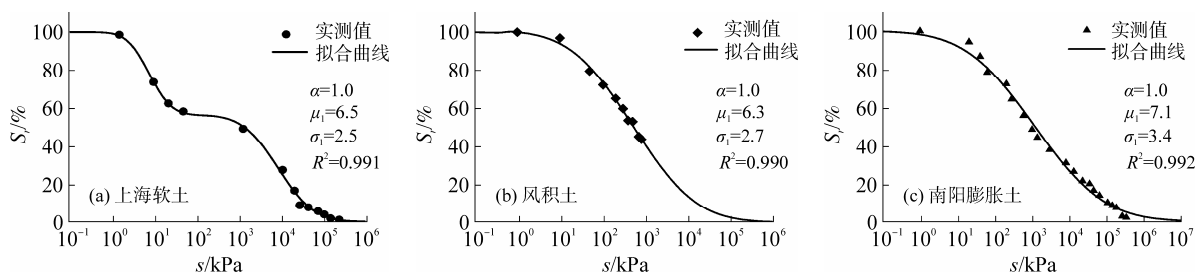
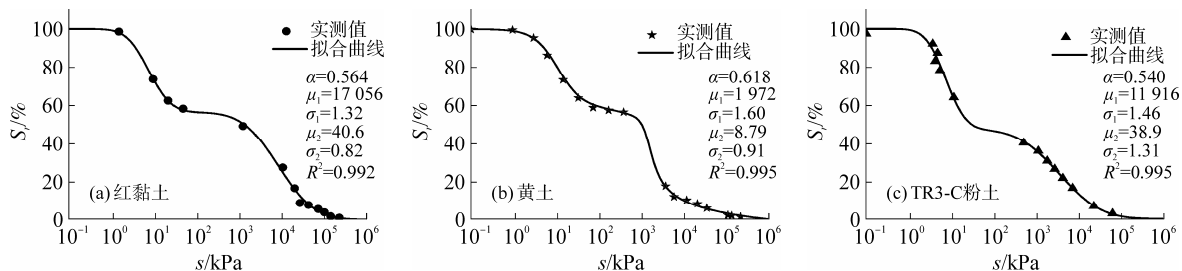


图5 不同类型土的单峰 SWRC 模拟



充分表明, 本文模型具有较好的适用性。

4 模型对比

将本文模型与 Zhang 等^[27]提出的双峰 SWRC 模型进行对比。Zhang 等^[27]以孔径分布理论为基础, 将 Fredlund 等^[15]单峰持水模型扩展为双峰 SWRC 方程, 相关公式如下:

$$S_r = p_l n_{pl} \left(1 - \frac{\ln(1 + s/s_{rl})}{\ln(1 + 10^6/s_{rl})} \right) \left(\frac{1}{\ln(e + (s/a_l)^{n_l})} \right)^{m_l} + p_s n_{ps} \left(1 - \frac{\ln(1 + s/s_{rs})}{\ln(1 + 10^6/s_{rs})} \right) \left(\frac{1}{\ln(e + (s/a_s)^{n_s})} \right)^{m_s} \quad (12)$$

式中: s_{rl} 、 s_{rs} 为大、小孔隙残余吸力值, kPa; p 为孔隙的体积分数; n_{pl} 、 n_{ps} 分别代表大孔隙和小孔隙的孔隙率; a 、 n 、 m 为拟合参数。

式(12)对 M6 砂土^[26]和 Barbosa 粉土^[12]的双峰 SWRC 模拟结果如图 7 所示。从图中可见, 式(12)也能很好地模拟 M6 砂土和 Barbosa 粉土的双峰 SWRC, R^2 值能达到 0.990 以上。但式(12)最大缺点是拟合时需要大量参数, 这也就导致在拟合计算前需对某些参数施加适当的约束条件, 否则可能会造成拟合失败。

5 结论

(1) 根据单/双峰孔隙结构土体内部的孔径分布特征的差异, 本文提出了一个基于孔径分布函数的

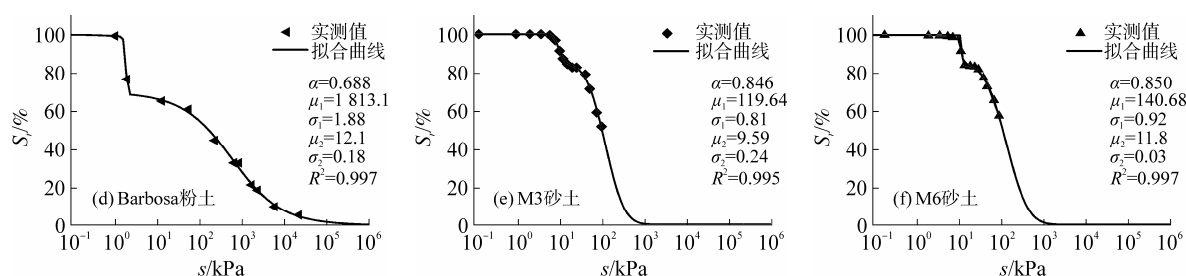
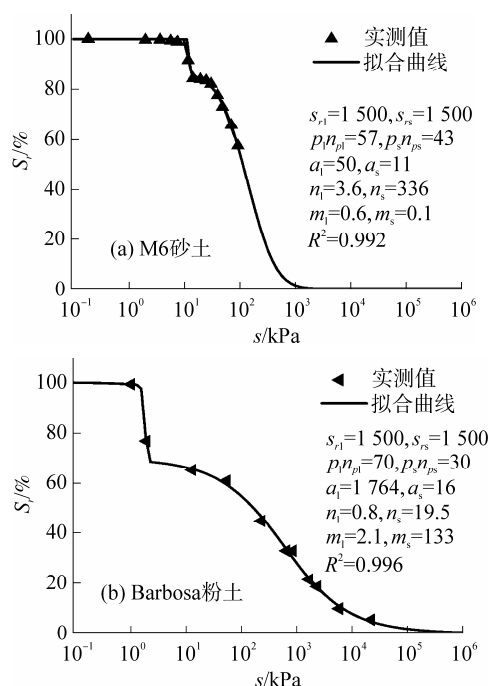


图6 不同类型土的双峰SWRC模拟

图7 砂土和粉土的双峰SWRC模拟^[27]

单/双峰SWRC模型。

(2)所提出的单/双峰SWRC模型存在5个参数,且各参数的物理意义明确,相较已有的双峰持水模型,拟合参数数量少。

(3)通过对大量文献中不同类型土持水实验数据的验证,表明本文模型可以合理地模拟各类单/双峰孔隙结构非饱和土的持水曲线,拟合一致性良好,具有良好的适用性。

参考文献:

- [1] FREDLUND D G, RAHARDJO H. Soil mechanics for unsaturated soils[M]. New York: John Wiley & Sons, 1993.
- [2] 陈正汉, 郭楠. 非饱和土与特殊土力学及工程应用研究的新进展[J]. 岩土力学, 2019, 40(1):1-54.
- [3] 黎澄生, 孔令伟, 柏巍, 等. 土-水特征曲线滞后阻塞模型[J]. 岩土力学, 2018, 39(2):598-604.
- [4] ZHOU J, YU J L. Influences affecting the soil-water characteristic curve[J]. Journal of Zhejiang University: Science A, 2005, 6(8):797-804.
- [5] 刘樟荣, 叶为民, 崔玉军, 等. 基于微孔填充和毛细管凝聚理论的持水曲线模型[J]. 岩土力学, 2021, 42(6):1549-1556.
- [6] CHEN L X, GHORBANI J, ZHANG C S, et al. A novel unified model for volumetric hardening and water retention in unsaturated soils[J]. Computers and Geotechnics, 2021, 140:104446.
- [7] FANG Q D, REN X W, ZHANG B, et al. A flexible soil-water characteristic curve model considering physical constraints of parameters[J]. Engineering Geology, 2022, 305:106717.
- [8] ZHOU A N, HUANG R Q, SHENG D C. Capillary water retention curve and shear strength of unsaturated soils[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2016, 53(6):974-987.
- [9] TAYLOR O D S, WALSHIRE L A, BERRY W W. Reducing uncertainties and improving sand soil-water retention curve (SWRC) predictions for hazard screening analyses[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2020, 57(10):1518-1533.
- [10] OTALVARO I F, NETO M P C, DELAGE P, et al. Relationship between soil structure and water retention properties in a residual compacted soil[J]. Engineering Geology, 2016, 205:73-80.
- [11] 蔡国庆, 吴天驰, 王亚南, 等. 双孔结构非饱和压实土微观结构演化模型[J]. 岩土力学, 2020, 41(11):3583-3590.
- [12] DA COSTA M B A, CAVALCANTE A L B. Bimodal soil-water retention curve and k -function model using linear superposition[J]. International Journal of Geomechanics, 2021, 21(7):4021116.
- [13] CHEN R P, LIU P, LIU X M, et al. Pore-scale model for estimating the bimodal soil-water characteristic curve and hydraulic conductivity of compacted soils with different initial densities[J]. Engineering Geology, 2019, 260:105199.

- [14] 林志强, 钱建固, 时振昊. 毛细-吸附作用下考虑孔隙比影响的单双峰土体持水曲线模型[J]. 岩土力学, 2021, 42(9):2499-2506.
- [15] FREDLUND D G, XING A Q. Equations for the soil-water characteristic curve[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1994, 31(4):521-532.
- [16] 孙德安, 汪健, 何家浩, 等. 原状扬州黏性土压缩特性与孔径分布[J]. 水文地质工程地质, 2020, 47(1):111-116.
- [17] LAKSHMIKANTHA M R, PRAT P C, LEDESMA A. Experimental evidence of size effect in soil cracking[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2012, 49(3):264-284.
- [18] 李达, 汪时机, 李贤, 等. 不同覆土压力下砂质黏性紫色土的土: 水特征曲线研究[J]. 岩土工程学报, 2021, 43(10):1950-1956.
- [19] 孙德安, 高游, 刘文捷, 等. 红黏土的土水特性及其孔隙分布[J]. 岩土工程学报, 2015, 37(2):351-356.
- [20] 叶为民, 唐益群, 崔玉军. 室内吸力量测与上海软土土水特征[J]. 岩土工程学报, 2005, 27(3):347-349.
- [21] 贾宝新, 王荷, 周琳力, 等. 辽西风积土路基土水特征曲线试验研究[J]. 工程地质学报, 2018, 26(3):633-638.
- [22] 孙德安, 张俊然, 吕海波. 全吸力范围南阳膨胀土的土: 水特征曲线[J]. 岩土力学, 2013, 34(7):1839-1846.
- [23] CAI G Q, ZHOU A N, LIU Y, et al. Soil water retention behavior and microstructure evolution of lateritic soil in the suction range of 0–286.7 MPa[J]. Acta Geotechnica, 2020, 15(12):3327-3341.
- [24] NG C W W, SADEGHI H, JAFARZADEH F. Compression and shear strength characteristics of compacted loess at high suctions[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2017, 54(5):690-699.
- [25] PERDOMO C V, NOGUEIRA L C, MIGUEL M G, et al. Analysis of water retention in soil horizons of two open trenches on a slope of Serra do Mar, Brazil, susceptible to landslides[J]. MATEC Web of Conferences, 2021, 337: 3015.
- [26] SATYANAGA A, RAHARDJO H. Unsaturated shear strength of soil with bimodal soil-water characteristic curve[J]. Géotechnique, 2019, 69(9):828-832.
- [27] ZHANG L M, CHEN Q. Predicting bimodal soil-water characteristic curves[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2005, 131(5):666-670.

Unimodal/bimodal soil-water retention curve based on pore size distribution function

FU Yuchen, GAO You, LI Ze

(School of Civil & Environmental Engineering and Geography Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: The unsaturated soil water retention curve is the basis for studying the strength, permeability, and constitutive theory of unsaturated soil. Currently, most models for unsaturated soil-water retention curves (SWRC) are aimed at single-peaked SWRC, and there is relatively little research on double-peaked SWRC models. In this paper, by analyzing the pore size distribution characteristics of single/double-peaked pore structure soils and using the relationship between soil suction and pore size established by the Young-Laplace equation, the lognormal distribution function is used to describe the pore size distribution characteristics of single/double-peaked soils. A model whose parameters with a clear physical meaning is further proposed to simulate single/double-peaked SWRC. Finally, water retention test data from different types of soils in the literature were selected to verify the model, and the results showed that the model can simulate single/double-peaked SWRC of different types of soils well.

Key words: unsaturated soil; single/double-peaked; soil-water retention curve; pore size distribution

(责任编辑 章践立)