

DOI: 10.20098/j.cnki.1001-5132.2023.0719

含有 Hénon 项的非线性椭圆系统稳定解的 Liouville 定理

黄宇鑫¹, 甘怡清², 胡良根^{1*}

(1. 宁波大学 数学与统计学院, 浙江 宁波 315211; 2. 姚江中学, 浙江 余姚 315400)

摘要: 本文主要研究含有 Hénon 项的 k -耦合椭圆系统 $-\Delta u_i = \sum_{j=1}^k \beta_{ij} |x|^\alpha |u_i|^{q-1} u_i |u_j|^{q+1}$, $x \in \mathbb{R}^N$, 其中 k 是一个固定的正整数, $i=1, 2, \dots, k$, $q \geq 1$, $N \geq 3$, $B = (\beta_{ij})_{i,j=1}^k$ 为实对称矩阵. 首先使用 Pohozaev 恒等式构造单调公式, 并发现其等价关系. 当矩阵 B 严格余正时, 联合使用 Pohozaev 恒等式、单调公式和爆缩序列方法证明了(无论是正的还是变号的)稳定解的 Liouville 定理.

关键词: Liouville 定理; 稳定解; Pohozaev 恒等式; 单调公式; 爆缩序列

中图分类号: O186

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2024) 02-0086-10

本文考虑具有 Hénon 项的 k -耦合椭圆系统:

$$-\Delta u_i = \sum_{j=1}^k \beta_{ij} |x|^\alpha |u_i|^{q-1} u_i |u_j|^{q+1}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (1)$$

其中 k 是一个固定的正整数, $i=1, 2, \dots, k$, $q \geq 1$, $N \geq 3$, $B = (\beta_{ij})_{i,j=1}^k$ 是一个实对称矩阵.

具有 $\alpha=0$ 的椭圆系统 (1) 是非线性 Schrödinger 系统的极限过程:

$$\begin{cases} -\Delta u_i + \lambda_i u_i = \sum_{j=1}^k \beta_{ij} |u_i|^{q-1} u_i |u_j|^{q+1}, & x \in \Omega, \\ u_1 = \dots = u_k = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是一个光滑的定义域, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i=1, 2, \dots, k$. 对于 $q=1$ 的三次情形, 椭圆系统 (2) 是物理现象所转化的数学模型, 如非线性光学和 Bose-Einstein 凝聚现象^[1-2]. 近年来, 系统 (2) 在有界光滑定义域(或 $\mathbb{R}^N$) 中的性质受到许多专家关注^[3-9].

对于 $q=1$, Dancer 等^[3]在 $\mathbb{R}^N$ 中证明了椭圆系统非负解的 Liouville 定理:

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu_1 u^3 + \beta uv^2, \\ -\Delta v = \mu_2 v^3 + \beta vu^2, \end{cases}$$

其中 $N \leq 3$, $\mu_1, \mu_2 > 0$, $\beta > -\sqrt{\mu_1 \mu_2}$. 基于 Liouville 定理, 他们证明了非线性 Schrödinger 系

统非负解的先验界. 2012 年, Dancer 等^[10]在半空间中证明了一类半线性椭圆系统 Liouville 定理成立, 这个结果可以应用于估计椭圆边值问题解的先验界. 对于 $q > 0$ 的一般情况, Tavares 等^[4]推广了文献 [3] 的 Liouville 定理至具有 $\alpha=0$ 和一般幂指数非线性项的 k -分量椭圆系统 (1). 作者讨论了当 $N \geq 3$, $1 < q < N/(N-2)$ (或 $N=1, 2, 1 < q < \infty$), 矩阵 B 是对称和严格余正的, $i=1, 2, \dots, k$, $\beta_{ii} \geq 0$ 时, 椭圆系统非负解的 Liouville 定理成立, 同时还指出了非平凡解的存在性/非存在性与矩阵 B 的性质有关.

2012 年, Quittner 等^[5]使用文献 [11] 的方法研究了非合作椭圆 Schrödinger 系统 (2). 对于 $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$, 系统没有非平凡的非负经典解; 对于 $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$, 存在 $M > 0$ 使得在 $\mathbb{R}^N$ 中, 任意的非负经典解 $u = (u_1, \dots, u_k)$ 满足 $|u| \leq M$. 可以发现, 椭圆系统 (2) 非负解的 Liouville 性质是存在的, 但研究这类椭圆系统解(无论是正的还是变号的)的 Liouville 定理存在很多困难.

近年来, 椭圆方程(系统)稳定解和有限 Morse 指标解的 Liouville 定理受到许多专家关注^[7-9, 12-20]. 1992 年, Bahri 等^[12]首次证明了如果非线性项 $f(x, u)$ 是次临界情形, 则方程 $-\Delta u = f(x, u)$ 解的

收稿日期: 2023-07-25.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journalg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 宁波市自然科学基金 (2023J127).

第一作者: 黄宇鑫, 硕士研究生, 主要研究方向: 非线性泛函分析. Email: 2289862186@qq.com

*通信作者: 胡良根, 教授, 主要研究方向: 非线性泛函分析. Email: hulianggen@nbu.edu.cn

Morse 指标是有界的, 当且仅当解是 L^∞ 有界的. 方程解的 Morse 指标是指线性化方程具有的负特征值个数, 如果 Morse 指标为 0, 则称解为稳定的. 2007 年, Farina^[13]给出了 Lane-Emden 方程稳定解和有限 Morse 指标解

$$-\Delta u = |u|^{p-1} u, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

的完全分类. 他通过使用经典 Moser 迭代方法给出了证明. 其后许多专家利用 Farina 方法讨论了椭圆方程(系统)稳定解和有限 Morse 指标解的性态. 如, Le 等^[7]使用 Farina 方法得到拟线性 Schrödinger 方程稳定解和有限 Morse 指数解的 Liouville 定理

$$-\Delta_p u + |x|^a |u|^{r-1} u = |x|^b |u|^{q-1} u, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

其中 $q > p - 1 \geq r \geq 1$, $a, b \in \mathbb{R}$.

然而 Farina 方法不能给出双调和椭圆方程稳定解和有限 Morse 指标解的完全分类

$$\Delta^2 u = |u|^{p-1} u, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^N.$$

为解决这一问题, Dávila 等^[14]推导出单调公式, 并联合 Pohozaev 恒等式和爆缩序列给出了完全分类. 许多专家利用单调公式研究了椭圆方程(系统)稳定解和有限 Morse 指标解的 Liouville 定理^[8-9, 15-19].

Yang 等^[8]使用单调公式在 $\mathbb{R}^N$ 中证明了具有 $\alpha = 0$ 的椭圆系统(1)稳定解和有限 Morse 指标解的 Liouville 定理. 同时, 他们证明了矩阵 B 严格余正是椭圆系统在 $3 \leq p < p_c(N)$ 情形下非平凡稳定解和有限 Morse 指标解的非存在性的充分条件. Le^[9]在 $\mathbb{R}^N$ 中证明了非线性 Schrödinger 系统(2)稳定解和有限 Morse 指标解的 Liouville 定理, 其中 $N \geq 2$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k > 0$, $q \geq 1$, 矩阵 (β_{ij}) 是对称和严格余正的.

受文献[8, 14-15]的启发, 本文证明了矩阵 B 严格余正是具有 $3 \leq p \leq p_{\text{LL}}(N)$ 的系统稳定解(无论是正还是变号)的非存在性的充分条件. 记 $p := 2q + 1$, 假定 $N \geq 3$, $\alpha > 0$, $q \geq 1$.

定义 1 矩阵 B 称为严格余正的, 如果存在 $x \in C_+^N \setminus \{0\}$, $C_+^N := \{x \in \mathbb{R}^N : x_1, \dots, x_N \geq 0\}$, 使得不等式 $\sum_{i,j=1}^k \beta_{ij} x_i x_j > 0$ 成立.

定理 1 如果 $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ 是椭圆系统(1)的稳定解, 矩阵 B 是对称且严格余正的, $3 \leq p < p_{\text{LL}}(N)$, 则 $u \equiv 0$. 这里 Joseph-Lundgren 指数 $p_{\text{LL}}(N)$ 的表达式为

$$p_{\text{LL}}(N) = \begin{cases} +\infty, & N \leq 10 + 4\alpha, \\ [(N-2)^2 - 2(N+\alpha)(\alpha+2) + 2\sqrt{(\alpha+2)^3(\alpha+2N-2)}] / \\ [(N-2)(N-4\alpha-10)], & N > 10 + 4\alpha. \end{cases}$$

注 1 定理 1 的证明思路:

(i) 对于次临界和临界情形, 利用测试函数和解的性质建立解的先验估计, 从而可以建立椭圆系统(1)稳定解的 Liouville 定理.

(ii) 对于超临界情形, 先通过 Pohozaev 恒等式构建单调公式, 并发现两者之间的等价关系; 再建立椭圆系统齐次稳定解的 Liouville 定理; 最后利用解的单调公式和爆缩序列发现椭圆系统稳定解是齐次的, 从而可以建立椭圆系统稳定解的 Liouville 定理.

为准确描述结果, 下面给出一些定义和记号.

定义 2 椭圆系统(1)的解 $u = (u_1, u_2, \dots, u_k) \in C^2(\Omega)$ 称为稳定的, 如果对所有 $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k) \in C_c^1(\Omega)$, 有下面不等式:

$$q \sum_{i,j=1}^k \int_{\Omega} \beta_{ij} |x|^\alpha |u_i|^{q-1} |u_j|^{q+1} \phi_i^2 dx + (q+1) \times \sum_{i,j=1}^k \int_{\Omega} \beta_{ij} |x|^\alpha |u_i|^{q-1} |u_j|^{q-1} u_j \phi_i \phi_j dx \leq \sum_{i=1}^k \int_{\Omega} |\nabla \phi_i|^2 dx.$$

全文使用 $B_r(x)$ 表示 $\mathbb{R}^N$ 中以 x 为球心、 r 为半径的球. 记 $B_r = B_r(0)$. C 表示与其他变量无关的正常数.

1 单调公式

引理 1 (Pohozaev 恒等式) 设 $u = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ 是椭圆系统(1)的非负经典解, 则有

$$\begin{aligned} & \frac{N-2}{2} \sum_{i=1}^k \int_{B_R} |\nabla u_i|^2 dx - \\ & \frac{N+\alpha}{p+1} \sum_{i,j=1}^k \int_{B_R} \beta_{ij} |x|^\alpha |u_i|^{q+1} |u_j|^{q+1} dx = \\ & R \sum_{i=1}^k \int_{\partial B_R} \frac{|\nabla u_i|^2}{2} dS - R \sum_{i=1}^k \int_{\partial B_R} \left| \frac{\partial u_i}{\partial r} \right|^2 dS - \\ & \frac{R^{1+\alpha}}{p+1} \sum_{i,j=1}^k \int_{\partial B_R} \beta_{ij} |u_i|^{q+1} |u_j|^{q+1} dS. \end{aligned}$$

证明 椭圆系统(1)两边乘以 $(x \cdot \nabla u_i)$ 并积分可得

$$\sum_{i=1}^k \int_{B_R} -\Delta u_i (x \cdot \nabla u_i) dx = \sum_{i,j=1}^k \int_{B_R} \beta_{ij} |x|^\alpha |u_i|^{q-1} u_i |u_j|^{q+1} (x \cdot \nabla u_i) dx, \quad (3)$$

计算式(3)的左边发现

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \int_{B_R} -\Delta u_i (x \cdot \nabla u_i) dx &= \sum_{i=1}^k \int_{B_R} |\nabla u_i|^2 dx + \\ &\sum_{i=1}^k \int_{B_R} x \cdot \nabla \left(\frac{|\nabla u_i|^2}{2} \right) dx - R \sum_{i=1}^k \int_{\partial B_R} \left| \frac{\partial u_i}{\partial r} \right|^2 dS = \\ &\frac{2-N}{2} \sum_{i=1}^k \int_{B_R} |\nabla u_i|^2 dx + R \sum_{i=1}^k \int_{\partial B_R} \frac{|\nabla u_i|^2}{2} dS - \\ &R \sum_{i=1}^k \int_{\partial B_R} \left| \frac{\partial u_i}{\partial r} \right|^2 dS, \end{aligned}$$

计算式(3)的右边可知

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^k \int_{B_R} \beta_{ij} |x|^\alpha |u_i|^{q-1} u_i |u_j|^{q+1} (x \cdot \nabla u_i) dx &= \\ \sum_{i,j=1}^k \int_{B_R} \beta_{ij} |x|^\alpha x \cdot \nabla \left(\frac{|u_i|^{q+1} |u_j|^{q+1}}{p+1} \right) dx &= \\ \frac{R^{1+\alpha}}{p+1} \sum_{i,j=1}^k \int_{\partial B_R} \beta_{ij} |u_i|^{q+1} |u_j|^{q+1} dS - \\ \frac{N+\alpha}{p+1} \sum_{i,j=1}^k \int_{B_R} \beta_{ij} |x|^\alpha |u_i|^{q+1} |u_j|^{q+1} dx, \end{aligned}$$

代入式(3)整理发现 Pohozaev 恒等式成立. 证毕.

假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是光滑区域, 固定 $x \in \Omega$, 令 $0 < r < R$ 使得 $B_r(x) \subset B_R(x) \subset \Omega$. 令 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_k) \in H_{\text{loc}}^2(\Omega) \cap L_{\text{loc}}^{p+1}(\Omega)$, 定义函数

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(r; x, \mathbf{u}) &:= r^{\frac{4+2\alpha}{p-1}+2-N} \int_{B_r(x)} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |\nabla u_i|^2 - \right. \\ &\frac{1}{p+1} \sum_{i,j=1}^k \beta_{ij} |x|^\alpha |u_i|^{q+1} |u_j|^{q+1} \Big] dx + \\ &\frac{2+\alpha}{2(p-1)} r^{\frac{4+2\alpha}{p-1}+1-N} \sum_{i=1}^k \int_{\partial B_r} u_i^2 dS. \end{aligned} \quad (4)$$

定理 2 设 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_k) \in H_{\text{loc}}^2(\Omega) \cap L_{\text{loc}}^{p+1}(\Omega)$ 是椭圆系统(1)的弱解, $\mathbf{B}$ 是实对称矩阵且 $p > 1$, 则 $\mathfrak{I}(r; x, \mathbf{u})$ 在 $r \in (0, R)$ 上单调递减, 且满足

$$\frac{d}{dr} \mathfrak{I}(r; 0, \mathbf{u}) = r^{\frac{4+2\alpha}{p-1}+2-N} \times \sum_{i=1}^k \int_{\partial B_r} \left(\frac{2+\alpha}{p-1} r^{-1} u_i + \frac{\partial u_i}{\partial r} \right)^2 dS.$$

证明 定义函数

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{I}}(\lambda) &:= \lambda^{\frac{4+2\alpha}{p-1}+2-N} \int_{B_\lambda} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |\nabla u_i|^2 - \right. \\ &\frac{1}{p+1} \sum_{i,j=1}^k \beta_{ij} |x|^\alpha |u_i|^{q+1} |u_j|^{q+1} \Big] dx. \end{aligned}$$

记 $\delta := (4+2\alpha)/(p-1)+2-N$, 对函数 $\bar{\mathfrak{I}}(\lambda)$ 关于 λ 求导可得

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\mathfrak{I}}(\lambda)}{d\lambda} &= \delta \lambda^{\delta-1} \int_{B_\lambda} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |\nabla u_i|^2 - \right. \\ &\frac{1}{p+1} \sum_{i,j=1}^k \beta_{ij} |x|^\alpha |u_i|^{q+1} |u_j|^{q+1} \Big] dx + \\ &\lambda^\delta \int_{\partial B_\lambda} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |\nabla u_i|^2 - \right. \\ &\frac{1}{p+1} \sum_{i,j=1}^k \beta_{ij} |x|^\alpha |u_i|^{q+1} |u_j|^{q+1} \Big] dS. \end{aligned} \quad (5)$$

用函数 u_i 乘以椭圆系统(1)两边并使用分部积分计算可得

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^k \int_{B_R} \beta_{ij} |x|^\alpha |u_i|^{q+1} |u_j|^{q+1} dx &= \\ \sum_{i=1}^k \int_{B_R} (-\Delta u_i) \cdot u_i dx &= \\ \sum_{i=1}^k \int_{B_R} |\nabla u_i|^2 dx - \sum_{i=1}^k \int_{\partial B_R} \frac{\partial u_i}{\partial \nu} u_i dS, \end{aligned}$$

其中 ν 表示外单位法向量. 则

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \int_{B_R} |\nabla u_i|^2 dx - \sum_{i,j=1}^k \int_{B_R} \beta_{ij} |x|^\alpha |u_i|^{q+1} |u_j|^{q+1} dx &= \\ \sum_{i=1}^k \int_{\partial B_R} \frac{\partial u_i}{\partial \nu} u_i dS. \end{aligned}$$

联合 Pohozaev 恒等式计算发现

$$\begin{aligned} \delta \lambda^{\delta-1} \int_{B_\lambda} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |\nabla u_i|^2 - \frac{1}{p+1} \times \right. \\ \sum_{i,j=1}^k \beta_{ij} |x|^\alpha |u_i|^{q+1} |u_j|^{q+1} \Big] dx &= \frac{2+\alpha}{p-1} \lambda^{\delta-1} \times \\ \int_{B_\lambda} \left[\sum_{i=1}^k |\nabla u_i|^2 - \sum_{i,j=1}^k \beta_{ij} |x|^\alpha |u_i|^{q+1} |u_j|^{q+1} \right] dx &- \end{aligned}$$

$$\lambda^{\delta-1} \int_{B_\lambda} \left[\frac{N-2}{2} \sum_{i=1}^k |\nabla u_i|^2 - \lambda \sum_{i=1}^k \int_{\partial B_1} \left(\frac{du_i^\lambda}{d\lambda} \right)^2 d\sigma \right. \quad (8)$$

$$\left. \frac{N+\alpha}{p+1} \sum_{i,j=1}^k \beta_{ij} |x|^\alpha |u_i|^{q+1} |u_j|^{q+1} \right] dx =$$

$$\frac{2+\alpha}{p-1} \lambda^{\delta-1} \sum_{i=1}^k \int_{\partial B_\lambda} \frac{\partial u_i}{\partial \nu} u_i dS -$$

$$\lambda^\delta \sum_{i=1}^k \int_{\partial B_\lambda} \frac{|\nabla u_i|^2}{2} dS + \lambda^\delta \sum_{i=1}^k \int_{\partial B_\lambda} \left| \frac{\partial u_i}{\partial r} \right|^2 dS +$$

$$\frac{\lambda^{\delta+\alpha}}{p+1} \sum_{i,j=1}^k \int_{\partial B_\lambda} \beta_{ij} |u_i|^{q+1} |u_j|^{q+1} dS.$$

代入式(5)可得

$$\frac{d\bar{\mathfrak{S}}(\lambda)}{d\lambda} = \frac{2+\alpha}{p-1} \lambda^{\delta-1} \sum_{i=1}^k \int_{\partial B_\lambda} \frac{\partial u_i}{\partial \nu} u_i dS +$$

$$\lambda^\delta \sum_{i=1}^k \int_{\partial B_\lambda} \left| \frac{\partial u_i}{\partial r} \right|^2 dS. \quad (6)$$

记 $u_i^\lambda(x) := \lambda^{\frac{2+\alpha}{p-1}} u_i(\lambda x)$, $i=1,2,\dots,k$. 计算式(6)右边两项发现

$$\frac{2+\alpha}{p-1} \lambda^{\frac{4+2\alpha}{p-1}+1-N} \sum_{i=1}^k \int_{\partial B_\lambda} \frac{\partial u_i}{\partial \nu} u_i dS =$$

$$\frac{2+\alpha}{p-1} \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^k \int_{\partial B_1} \frac{\partial u_i^\lambda}{\partial \nu} u_i^\lambda d\sigma$$

和

$$\lambda^{\frac{4+2\alpha}{p-1}+2-N} \sum_{i=1}^k \int_{\partial B_\lambda} \left| \frac{\partial u_i}{\partial r} \right|^2 dS = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^k \int_{\partial B_1} \left| \frac{\partial u_i^\lambda}{\partial r} \right|^2 d\sigma,$$

再代入式(6)可得

$$\frac{d\bar{\mathfrak{S}}(\lambda)}{d\lambda} = \frac{2+\alpha}{p-1} \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^k \int_{\partial B_1} \frac{\partial u_i^\lambda}{\partial \nu} u_i^\lambda d\sigma +$$

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^k \int_{\partial B_1} \left| \frac{\partial u_i^\lambda}{\partial r} \right|^2 d\sigma. \quad (7)$$

对 u_i^λ 进行求导,

$$\frac{du_i^\lambda}{d\lambda} = \frac{2+\alpha}{p-1} \lambda^{-1} u_i^\lambda + \lambda^{-1} r \frac{\partial u_i}{\partial r},$$

即

$$r \frac{\partial u_i^\lambda}{\partial r} = \lambda \frac{du_i^\lambda}{d\lambda} - \frac{2+\alpha}{p-1} u_i^\lambda,$$

代入式(7)可得

$$\frac{d\bar{\mathfrak{S}}(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{2+\alpha}{p-1} \sum_{i=1}^k \int_{\partial B_1} \frac{du_i^\lambda}{d\lambda} u_i^\lambda d\sigma +$$

对式(8)右边第1项进行尺度变换发现

$$-\frac{2+\alpha}{p-1} \sum_{i=1}^k \int_{\partial B_1} \frac{du_i^\lambda}{d\lambda} u_i^\lambda d\sigma =$$

$$-\frac{2+\alpha}{2(p-1)} \frac{d}{d\lambda} \left(\lambda^{\frac{4+2\alpha}{p-1}+1-N} \sum_{i=1}^k \int_{\partial B_\lambda} u_i^2 dS \right),$$

计算其第2项可得

$$\sum_{i=1}^k \int_{\partial B_1} \lambda \left(\frac{du_i^\lambda}{d\lambda} \right)^2 d\sigma =$$

$$\lambda^{\frac{4+2\alpha}{p-1}+2-N} \sum_{i=1}^k \int_{\partial B_\lambda} \left(\frac{2+\alpha}{p-1} r^{-1} u_i + \frac{\partial u_i}{\partial r} \right)^2 dS.$$

代回到函数 $\frac{d\bar{\mathfrak{S}}(\lambda)}{d\lambda}$ 发现

$$\frac{d}{dr} \mathfrak{S}(r; 0, \mathbf{u}) = r^{\frac{4+2\alpha}{p-1}+2-N} \times$$

$$\sum_{i=1}^k \int_{\partial B_r} \left(\frac{2+\alpha}{p-1} r^{-1} u_i + \frac{\partial u_i}{\partial r} \right)^2 dS.$$

根据 $\bar{\mathfrak{S}}$ 的定义可以推断, $\mathfrak{S}$ 在 $r \in (0, R)$ 上是单调递减的. 证毕.

注2 应用 Pohozaev 恒等式构造单调公式. 定理2的证明表明 Pohozaev 恒等式与单调公式(4)的导数形式是等价的.

推论1 如果对任意的 $r \in (0, +\infty)$, 有 $\mathfrak{S}(r; 0, \mathbf{u}) \equiv \text{const.}$, 则 u_i 是齐次的, 即

$$u_i(x) = |x|^{-\frac{2+\alpha}{p-1}} u_i \left(\frac{x}{|x|} \right).$$

证明 对任意的 $r \in (0, +\infty)$, $\mathfrak{S}(r; 0, \mathbf{u}) \equiv \text{const.}$,

即 $\frac{d}{dr} \mathfrak{S}(r; 0, \mathbf{u}) \equiv 0$, 定理2意味着

$$\frac{2+\alpha}{p-1} \lambda^{-1} u_i + \frac{\partial u_i}{\partial r} = 0, \text{ a. e. } x \in \mathbb{R}^N, i=1,2,\dots,k.$$

因此, 对任意的 $x \in S^{N-1}$ 和 $\lambda \in (0, +\infty)$, 都有

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\lambda^{\frac{2+\alpha}{p-1}} u_i(\lambda x) \right) \equiv 0, i=1,2,\dots,k,$$

即对任意的 $\lambda \in (0, +\infty)$, 满足

$$u_i(\lambda x) = \lambda^{-\frac{2+\alpha}{p-1}} u_i(x), i=1,2,\dots,k,$$

则 u_i 是齐次的. 证毕.

下面给出解的积分估计.

引理 2 设 $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ 是椭圆系统(1)的稳定解, 矩阵 B 是严格正定的, 则存在常数 $C = C(p, k, N, B)$, 使得对任意的 $R > 0$, 有

$$\sum_{i=1}^k \int_{B_R} (|\nabla u_i|^2 + |x|^\alpha |u_i|^{p+1}) dx \leq CR^{-2} \sum_{i=1}^k \int_{B_{2R} \setminus B_R} u_i^2 dx \quad (9)$$

和

$$\sum_{i=1}^k \int_{B_R} (|\nabla u_i|^2 + |x|^\alpha |u_i|^{p+1}) dx \leq CR^{N-2-\frac{4+2\alpha}{p-1}}. \quad (10)$$

证明 对任意的 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, 椭圆系统(1)两边同乘 $u_i \varphi^2$ 并分部积分发现

$$\sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta u_i) \cdot u_i \varphi^2 dx = \sum_{i,j=1}^k \int_{\mathbb{R}^N} \beta_{ij} |x|^\alpha |u_i|^{q+1} |u_j|^{q+1} \varphi^2 dx,$$

直接计算可得

$$\sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_i|^2 \varphi^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^N} u_i^2 \Delta(\varphi^2) dx + \sum_{i,j=1}^k \int_{\mathbb{R}^N} \beta_{ij} |x|^\alpha |u_i|^{q+1} |u_j|^{q+1} \varphi^2 dx. \quad (11)$$

在稳定解的定义中选取 $\phi_i = u_i \varphi$ 代入可知

$$p \sum_{i,j=1}^k \int_{\mathbb{R}^N} \beta_{ij} |x|^\alpha |u_i|^{q+1} |u_j|^{q+1} \varphi^2 dx \leq \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla u_i|^2 \varphi^2 + u_i^2 |\nabla \varphi|^2 - \frac{1}{2} u_i^2 \Delta(\varphi^2) \right] dx.$$

结合上式, 有

$$(p-1) \sum_{i,j=1}^k \int_{\mathbb{R}^N} \beta_{ij} |x|^\alpha |u_i|^{q+1} |u_j|^{q+1} \varphi^2 dx \leq \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^N} u_i^2 |\nabla \varphi|^2 dx. \quad (12)$$

选择截断函数 $\eta \in C_0^\infty(B_R(x))$ 满足 $0 \leq \eta \leq 1$, 在 $B_R(x)$ 内有 $\eta \equiv 1$ 以及 $|\nabla \eta| \leq C/R^i$, $i=1, 2$. 在式(12)中选取 η^m 代替 φ , 其中 m 是较大的整数, 满足 $(m-2)(p+1) \geq 2m$, 计算可得

$$(p-1) \sum_{i,j=1}^k \int_{\mathbb{R}^N} \beta_{ij} |x|^\alpha |u_i|^{q+1} |u_j|^{q+1} \eta^{2m} dx \leq m^2 \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^N} |u_i|^2 \eta^{2m-2} |\nabla \eta|^2 dx. \quad (13)$$

由矩阵严格余正的定, 可以推导出存在常数 $\kappa = \kappa(B) > 0$, 使得

$$\sum_{i,j=1}^k \beta_{ij} x_i x_j \geq \kappa x^2, \quad \forall x \in C_+^N \setminus \{0\},$$

则有

$$\sum_{i,j=1}^k \beta_{ij} |x|^\alpha |u_i|^{q+1} |u_j|^{q+1} \geq \kappa |x|^\alpha |u_i|^{p+1}.$$

代入式(13)推出

$$\sum_{i=1}^k \int_{B_R} |x|^\alpha |u_i|^{p+1} dx \leq CR^{-2} \sum_{i=1}^k \int_{B_{2R} \setminus B_R} |u_i|^2 dx$$

和

$$\sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha |u_i|^{p+1} \eta^{2m} dx \leq C \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^N} u_i^2 \eta^{2m-2} |\nabla \eta|^2 dx.$$

容易发现不等式 $\eta^{(m-1)(p+1)} \leq \eta^{2m}$ 成立. 应用 Hölder 不等式发现

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha |u_i|^{p+1} \eta^{2m} dx &\leq C \left(\sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha |u_i|^{p+1} \eta^{(m-1)(p+1)} dx \right)^{\frac{2}{p+1}} \times \\ &\quad \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-\frac{2\alpha}{p-1}} |\nabla \eta|^{\frac{2(p+1)}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p+1}} \leq \\ &\quad CR^{N\frac{p-1}{p+1}-2\frac{\alpha+p+1}{p+1}} \left(\sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha |u_i|^{p+1} \eta^{2m} dx \right)^{\frac{2}{p+1}}, \end{aligned}$$

即意味着对任意的 $R > 0$, 有积分估计

$$\sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha |u_i|^{p+1} \eta^{2m} dx \leq CR^{N-2-\frac{4+2\alpha}{p-1}}. \quad (14)$$

结合式(11)和(14), 再应用 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_i|^2 \eta^{2m} dx &\leq C \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^N} |u_i|^2 \eta^{2m-2} \times \\ &\quad \left[|\Delta \eta| + |\nabla \eta|^2 \right] dx + CR^{N-2-\frac{4+2\alpha}{p-1}} \leq \\ &\quad CR^{N\frac{p-1}{p+1}-2-\frac{2\alpha}{p+1}} \left(\sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha |u_i|^{p+1} \eta^{2m} dx \right)^{\frac{2}{p+1}} + \\ &\quad CR^{N-2-\frac{4+2\alpha}{p-1}} \leq CR^{N-2-\frac{4+2\alpha}{p-1}}. \end{aligned}$$

证毕.

2 齐次稳定解的 Liouville 定理

本部分主要考虑椭圆系统(1)齐次稳定解的 Liouville 定理. 记 $p_{\text{JL}}(N)$ 为 Joseph-Lundgren 指数,

表达式为

$$p_{\text{L}}(N) = \begin{cases} +\infty, & N \leq 10 + 4\alpha, \\ [(N-2)^2 - 2(N+\alpha)(\alpha+2) + \\ 2\sqrt{(\alpha+2)^3(\alpha+2N-2)}] / \\ [(N-2)(N-4\alpha-10)], & \\ N > 10 + 4\alpha. \end{cases}$$

定理 3 对任意的 $\frac{N+2+2\alpha}{N-2} < p < p_{\text{L}}(N)$,

设 $\mathbf{u} \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) \cap L_{\text{loc}}^{p+1}(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ 是椭圆系统(1)的齐次稳定弱解, 且矩阵 $\mathbf{B}$ 是实对称矩阵, 则 $\mathbf{u} \equiv 0$.

证明 因为 $\mathbf{u}$ 是椭圆系统(1)的齐次解, 则假设存在函数 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k \in H^1(S^{N-1}) \cap L^{p+1}(S^{N-1})$, 使得

$$u_i(r, \theta) = r^{\frac{2+\alpha}{p-1}} \omega_i(\theta), \quad i=1, 2, \dots, k.$$

简单计算发现 ω_i 满足方程

$$-\Delta_{\theta} \omega_i + J \omega_i = \sum_{j=1}^k \beta_{ij} |\omega_i|^{q-1} \omega_i |\omega_j|^{q+1},$$

其中 $J = \frac{2+\alpha}{p-1} \left[N-2 - \frac{2+\alpha}{p-1} \right]$, Δ_{θ} 表示 S^{N-1} 球面上的 Beltrami-Laplace 算子. 对上面方程两边同乘函数 ω_i 且分部积分发现

$$\sum_{i=1}^k \int_{S^{N-1}} (|\nabla_{\theta} \omega_i|^2 + J \omega_i^2) d\sigma = \sum_{i,j=1}^k \int_{S^{N-1}} \beta_{ij} |\omega_i|^{q+1} |\omega_j|^{q+1} d\sigma. \quad (15)$$

由稳定解的定义, 选择测试函数为

$$\phi_i(r, \theta) = r^{\frac{N-2}{2}} \eta_{\varepsilon}(r) \omega_i(\theta), \quad i=1, 2, \dots, k,$$

则稳定解的定义意味着

$$\begin{aligned} p \sum_{i,j=1}^k \int_{\Omega} \beta_{ij} |x|^{\alpha} r^{-(2+\alpha)} |\omega_i|^{q+1} |\omega_j|^{q+1} \times \\ \left(r^{\frac{N-2}{2}} \eta_{\varepsilon}(r) \right)^2 dx \leq \\ \sum_{i=1}^k \int_{\Omega} \left| \nabla \left(r^{\frac{N-2}{2}} \eta_{\varepsilon}(r) \omega_i(\theta) \right) \right|^2 dx, \end{aligned} \quad (16)$$

其中, 对任意的 $0 < \varepsilon < 1$, 函数 $\eta_{\varepsilon} \in C_c^2 \left(\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{2}{\varepsilon} \right) \right)$ 满足在 $\left(\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon} \right)$ 上 $\eta_{\varepsilon} \equiv 1$, 且对所有的 $r > 0$, 有

$r |\eta'_{\varepsilon}(r)| \leq C$. 容易发现, 在 $[H^1(B_{2/\varepsilon} \setminus B_{\varepsilon/2}) \cap L^{p+1}(B_{2/\varepsilon} \setminus B_{\varepsilon/2})]$ 中的 $\phi_i(r, \theta)$ 可由 $C_c^1(B_{2/\varepsilon} \setminus B_{\varepsilon/2})$ 逼近, 则 $\phi_i(r, \theta)$, $i=1, 2, \dots, k$, 可以作为稳定解 $\mathbf{u}$ 的测试函数.

在式(16)的左边使用极坐标变换, 可得

$$\begin{aligned} p \sum_{i,j=1}^k \int_{\Omega} \beta_{ij} |x|^{\alpha} r^{-N-\alpha} |\omega_i|^{q+1} |\omega_j|^{q+1} \eta_{\varepsilon}^2 dx = \\ p \left(\sum_{i,j=1}^k \int_{S^{N-1}} \beta_{ij} |\omega_i|^{q+1} |\omega_j|^{q+1} d\sigma \right) \int_0^{+\infty} r^{-1} \eta_{\varepsilon}^2 dr. \end{aligned} \quad (17)$$

直接计算发现

$$\begin{aligned} |\nabla \phi_i|^2 = & \left(\frac{(N-2)^2}{4} r^{-N} \eta_{\varepsilon}^2(r) + r^{-N+2} \eta'_{\varepsilon}(r)^2 - \right. \\ & \left. (N-2) r^{-N+1} \eta_{\varepsilon}(r) \eta'_{\varepsilon}(r) \right) \omega_i^2 + \\ & r^{-N} \eta_{\varepsilon}^2(r) |\nabla_{\theta} \omega_i|^2, \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| \nabla \left(r^{\frac{N-2}{2}} \eta_{\varepsilon}(r) \omega_i(\theta) \right) \right|^2 dx \leq \\ \left(\sum_{i=1}^k \int_{S^{N-1}} \left(|\nabla_{\theta} \omega_i|^2 + \frac{(N-2)^2}{4} \omega_i^2 \right) d\sigma \right) \times \\ \left(\int_0^{+\infty} r^{-1} \eta_{\varepsilon}^2(r) dr \right) + \left(\sum_{i=1}^k \int_{S^{N-1}} \omega_i^2 d\sigma \right) \times \\ \int_0^{+\infty} [r \eta'_{\varepsilon}(r)^2 + (N-2) \eta_{\varepsilon}(r) \cdot \eta'_{\varepsilon}(r)] dr. \end{aligned} \quad (18)$$

把式(17)和(18)代入式(16)产生

$$\begin{aligned} p \left(\sum_{i,j=1}^k \int_{S^{N-1}} \beta_{ij} |\omega_i|^{q+1} |\omega_j|^{q+1} d\sigma \right) \left(\int_0^{+\infty} r^{-1} \eta_{\varepsilon}^2 dr \right) \leq \\ \left(\sum_{i=1}^k \int_{S^{N-1}} \left(|\nabla_{\theta} \omega_i|^2 + \frac{(N-2)^2}{4} \omega_i^2 \right) d\sigma \right) \times \\ \left(\int_0^{+\infty} r^{-1} \eta_{\varepsilon}^2 dr \right) + \left(\sum_{i=1}^k \int_{S^{N-1}} \omega_i^2 d\sigma \right) \times \\ \left(\int_0^{+\infty} [r \eta'_{\varepsilon}(r)^2 + (N-2) \eta_{\varepsilon}(r) |\eta'_{\varepsilon}(r)|] dr \right), \end{aligned}$$

容易发现

$$\int_0^{+\infty} r^{-1} \eta_{\varepsilon}(r)^2 dr \geq \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} r^{-1} dr \geq |\ln \varepsilon|$$

和

$$\int_0^{+\infty} [r \eta'_{\varepsilon}(r)^2 + (N-2) \eta_{\varepsilon}(r) |\eta'_{\varepsilon}(r)|] dr \leq C.$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 并取极限可得

$$p \sum_{i,j=1}^k \int_{S^{N-1}} \beta_{ij} |\omega_i|^{q+1} |\omega_j|^{q+1} d\sigma \leq \sum_{i=1}^k \int_{S^{N-1}} \left(|\nabla_{\theta} \omega_i|^2 + \frac{(N-2)^2}{4} \omega_i^2 \right) d\sigma.$$

联合式(15)发现

$$\sum_{i=1}^k \int_{S^{N-1}} \left((p-1) |\nabla_{\theta} \omega_i|^2 + \left(pJ - \frac{(N-2)^2}{4} \right) \omega_i^2 \right) d\sigma \leq 0. \quad (19)$$

采用文献[20]的方法计算不等式 $pJ - (N-2)^2/4 > 0$. 当 $p > (N+2+2\alpha)/(N-2)$ 时, 可以发现

$$p \frac{2+\alpha}{p-1} \left(N-2 - \frac{2+\alpha}{p-1} \right) - \frac{(N-2)^2}{4} > 0,$$

等价于

$$(N-2)(N-4\alpha-10)p^2 + [4(N+\alpha)(2+\alpha) - 2(N-2)^2]p + (N-2)^2 > 0.$$

记函数

$$f(p) = (N-2)(N-4\alpha-10)p^2 + [4(N+\alpha)(2+\alpha) - 2(N-2)^2]p + (N-2)^2.$$

令 $f(p) = 0$, 则有两个根

$$p_1 = [(N-2)^2 - 2(N+\alpha)(\alpha+2) + 2\sqrt{(\alpha+2)^3(\alpha+2N-2)}] / [(N-2)(N-4\alpha-10)],$$

$$p_2 = [(N-2)^2 - 2(N+\alpha)(\alpha+2) - 2\sqrt{(\alpha+2)^3(\alpha+2N-2)}] / [(N-2)(N-4\alpha-10)].$$

(i) 当 $3 \leq N < 4\alpha+10$ 时, 有 $p_1 < p_2 < \frac{N+2+2\alpha}{N-2}$ 且 $(N-2)(N-4\alpha-10) < 0$, 因此, 当 $p > \frac{N+2+2\alpha}{N-2}$ 时, 有 $f(p) < 0$.

(ii) 当 $N = 4\alpha+10$ 且 $p > \frac{N+2+2\alpha}{N-2}$ 时, 有 $f(p) < 0$.

(iii) 当 $N > 4\alpha+10$ 时, 有 $p_2 < \frac{N+2+2\alpha}{N-2} < p_1$ 且 $(N-2)(N-4\alpha-10) > 0$, 当 $\frac{N+2+2\alpha}{N-2} < p <$

$p_{\text{LL}}(N)$ 时, 有 $f(p) < 0$.

因此, 式(19)表明 $\omega_i(\theta) \equiv 0$, 即可得 $\mathbf{u} \equiv 0$. 证毕.

注 3 可以注意到, 定理 3 只假设 $\mathbf{B}$ 是实对称矩阵, 并没有要求矩阵 $\mathbf{B}$ 是严格余正的.

3 定理 1 的证明

首先给出一些引理.

引理 3 $\lim_{r \rightarrow +\infty} \mathfrak{I}(r; 0, \mathbf{u}) < +\infty$.

证明 由引理 2 积分估计可得

$$r^{\frac{4+2\alpha}{p-1}+2-N} \int_{B_r} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |\nabla u_i|^2 - \frac{1}{p+1} \sum_{i,j=1}^k \beta_{ij} |x|^{\alpha} |u_i|^{q+1} |u_j|^{q+1} \right] dx \leq C r^{\frac{4+2\alpha}{p-1}+2-N} \sum_{i=1}^k \int_{B_r} \left[|\nabla u_i|^2 + |x|^{\alpha} |u_i|^{p+1} \right] dx \leq C.$$

对任意的 $r > 0$, 存在 $\bar{r} \in (r, 2r)$ 使得

$$\sum_{i=1}^k \int_{\partial B_{\bar{r}}} u_i^2 dr = \frac{1}{r} \int_r^{2r} \left(\sum_{i=1}^k \int_{\partial B_t} u_i^2 dS \right) dt \leq \frac{1}{r} \sum_{i=1}^k \left(\int_{B_{2r}} |x|^{\alpha} |u_i|^{p+1} dx \right)^{\frac{2}{p+1}} \times \left(\int_{B_{2r}} |x|^{\frac{2\alpha}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p+1}} \leq C r^{N-1-\frac{4+2\alpha}{p-1}},$$

即有

$$\bar{r}^{\frac{4+2\alpha}{p-1}+1-N} \sum_{i=1}^k \int_{\partial B_{\bar{r}}} u_i^2 dS \leq C.$$

显然 $r \rightarrow +\infty$ 意味着 $\bar{r} \rightarrow +\infty$. 因此, 由函数 $\mathfrak{I}(r; 0, \mathbf{u})$ 的单调性可知, 对任意的 $r > 0$, 有

$$\mathfrak{I}(r; 0, \mathbf{u}) \leq C.$$

证毕.

引理 4 设 $\mathbf{u} \in C^2(\mathbb{R}^N)$ 是椭圆系统(1)的稳定解. 对任意的 $\lambda > 0$, 定义爆缩序列

$$u_i^{\lambda}(x) := \lambda^{\frac{2+\alpha}{p-1}} u_i(\lambda x), \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (20)$$

设矩阵 $\mathbf{B}$ 是严格余正的, 则

(i) 在 $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N) \cap L_{\text{loc}}^{p+1}(\mathbb{R}^N)$ 上, 有 $\mathbf{u}^{\lambda} \rightarrow \mathbf{u}^{\infty}$; 对于 $s \in (1, p+1)$, 在 $L_{\text{loc}}^s(\mathbb{R}^N)$ 上, 有 $\mathbf{u}^{\lambda} \rightarrow \mathbf{u}^{\infty}$.

(ii) $\mathbf{u}^{\infty}$ 是椭圆系统(1)的齐次稳定解.

证明 (i) 因为 $\mathbf{u}$ 是椭圆系统(1)的稳定解, 由尺度变换可以发现

$$\begin{aligned}
& q \sum_{i,j=1}^k \int_{\mathbb{R}^N} \beta_{ij} |x|^\alpha |u_i^\lambda|^{q-1} |u_j^\lambda|^{q+1} \psi_i^2 dx + (q+1) \times \\
& \sum_{i,j=1}^k \int_{\mathbb{R}^N} \beta_{ij} |x|^\alpha |u_i^\lambda|^{q-1} u_i^\lambda |u_j^\lambda|^{q-1} u_j^\lambda \psi_i \psi_j dx = \\
& q \lambda^{2-N} \sum_{i,j=1}^k \int_{\mathbb{R}^N} \beta_{ij} |y|^\alpha |u_i(y)|^{q-1} |u_j(y)|^{q+1} \times \\
& \zeta_i^2(y) dy + (q+1) \lambda^{2-N} \sum_{i,j=1}^k \int_{\mathbb{R}^N} \beta_{ij} |y|^\alpha \times \\
& |u_i(y)|^{q-1} u_i(y) |u_j(y)|^{q-1} u_j(y) \zeta_i(y) \zeta_j(y) dy \leq \\
& \lambda^{2-N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \zeta(y)|^2 dy = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \psi(x)|^2 dx,
\end{aligned}$$

这里选取变换 $y := \lambda x$ 和 $\zeta(y) = \psi(x)$, 则 u^λ 是椭圆系统(1)的稳定解. 应用引理 2 可得

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^k \int_{B_R(x)} \left[|\nabla u_i^\lambda(y)|^2 + |y|^\alpha |u_i^\lambda|^{p+1} \right] dy = \\
& \lambda^{\frac{4+2\alpha}{p-1} + 2-N} \sum_{i=1}^k \int_{B_{\lambda R}(x)} \left[|\nabla u_i(z)|^2 + \right. \\
& \left. |z|^\alpha |u_i(z)|^{p+1} \right] dz \leq CR^{N-2-\frac{4+2\alpha}{p-1}}.
\end{aligned}$$

应用椭圆正则性定理, 意味着 u^λ 在 $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N)$ 上是一致有界的. 又因 $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ 意味着 $u^\lambda \in L_{\text{loc}}^{p+1}(\mathbb{R}^N)$, 则可以假定存在子序列 u^λ (这里仍然选择指标 λ), 使得在 $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N) \cap L_{\text{loc}}^{p+1}(\mathbb{R}^N)$ 上, 有 u^λ 弱收敛于 u^∞ . 应用嵌入定理发现在 $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^N)$ 上 u^λ 强收敛于 u^∞ . 因此使用序列 $\{u^\lambda\}$ 在 $L_{\text{loc}}^{p+1}(\mathbb{R}^N)$ 上是一致有界的, 同时应用介于 L^s ($s \in (1, p+1)$) 之间的插值不等式发现, 对所有的 B_r , 当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\begin{aligned}
& \|u^\lambda - u^\infty\|_{L^s(B_r)} \leq \|u^\lambda - u^\infty\|_{L^1(B_r)}^\tau \times \\
& \|u^\lambda - u^\infty\|_{L^{p+1}(B_r)}^{1-\tau} \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

其中 $\tau \in (0, 1)$, $\frac{1}{s} = \tau + \frac{1-\tau}{p+1}$, 即在 $L_{\text{loc}}^s(\mathbb{R}^N)$ 上, u^λ 强收敛于 u^∞ .

(ii) 对任意的 $R > 0$, 令 $\lambda \rightarrow +\infty$, 应用 Hölder 不等式发现

$$\begin{aligned}
& \int_{B_R} |u_i^\lambda|^{q-1} u_i^\lambda - |u_i^\infty|^{q-1} u_i^\infty \Big| \frac{p}{q} dx \leq \\
& C_q \int_{B_R} |u_i^\lambda - u_i^\infty| \frac{p}{q} \left(|u_i^\lambda| + |u_i^\infty| \right)^{(q-1)\frac{p}{q}} dx \leq \\
& C_q \left(\int_{B_R} |u_i^\lambda - u_i^\infty|^p dx \right)^{\frac{1}{q}} \times
\end{aligned}$$

$$\left(\int_{B_R} \left(|u_i^\lambda| + |u_i^\infty| \right)^p dx \right)^{\frac{q-1}{q}} \rightarrow 0$$

和

$$\begin{aligned}
& \int_{B_R} \left| |u_j^\lambda|^{q+1} - |u_j^\infty|^{q+1} \right| \frac{p}{q+1} dx \leq \\
& C_q \int_{B_R} |u_j^\lambda - u_j^\infty| \frac{p}{q+1} \left(|u_j^\lambda| + |u_j^\infty| \right)^{q\frac{p}{q+1}} dx \leq \\
& C_q \left(\int_{B_R} |u_j^\lambda - u_j^\infty|^p dx \right)^{\frac{1}{q+1}} \times \\
& \left(\int_{B_R} \left(|u_j^\lambda| + |u_j^\infty| \right)^p dx \right)^{\frac{q}{q+1}} \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

因此, 当 $\lambda \rightarrow +\infty$ 时, 在 $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N)$ 上有

$$|u_i^\lambda|^{q-1} u_i^\lambda |u_j^\lambda|^{q+1} \rightarrow |u_i^\infty|^{q-1} u_i^\infty |u_j^\infty|^{q+1}.$$

采用类似的方法, 可以发现在 $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N)$ 上, 当 $\lambda \rightarrow +\infty$ 时, 有下面的强收敛性:

$$\begin{aligned}
& |u_i^\lambda|^{q-1} |u_j^\lambda|^{q+1} \rightarrow |u_i^\infty|^{q-1} |u_j^\infty|^{q+1}, \\
& |u_i^\lambda|^{q-1} u_i^\lambda |u_j^\lambda|^{q-1} u_j^\lambda \rightarrow |u_i^\infty|^{q-1} u_i^\infty |u_j^\infty|^{q-1} u_j^\infty,
\end{aligned}$$

容易发现 u^∞ 是稳定解.

函数 $\mathfrak{I}(r; 0, u)$ 的单调有界性意味着, 对任意的 $0 < r < R < +\infty$, 有

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} [\mathfrak{I}(\lambda R; 0, u) - \mathfrak{I}(\lambda r; 0, u)] = 0.$$

对 $\mathfrak{I}(r; 0, u)$ 使用尺度变换, 可以发现

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} [\mathfrak{I}(R; 0, u^\lambda) - \mathfrak{I}(r; 0, u^\lambda)] = 0.$$

联合推论 1, 可得

$$0 = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (\mathfrak{I}(R; 0, u^\lambda) - \mathfrak{I}(r; 0, u^\lambda)) =$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_r^R \frac{d}{dt} \mathfrak{I}(t; 0, u^\lambda) dt \geq \\
& \sum_{i=1}^k \int_{B_R \setminus B_r} \frac{\left(\frac{2+\alpha}{p-1} |x|^{-1} u_i^\infty(x) + \frac{\partial u_i^\infty}{\partial r}(x) \right)^2}{|x|^{N-2-\frac{4+2\alpha}{p-1}}} dx,
\end{aligned}$$

意味着 u^∞ 是齐次解. 证毕.

引理 4 意味着 u^∞ 是椭圆系统(1)的齐次稳定解. 根据定理 3, 可以发现 $u^\infty \equiv 0$. 在 $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^N)$ 上再应用引理 4, 可得

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} u^\lambda = 0.$$

引理 5 $\lim_{r \rightarrow +\infty} \mathfrak{I}(r; 0, u) = 0$.

证明 根据引理 2 可以发现, 对任意的 $r \in (0, 2)$, $\lambda \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} & \int_{B_r} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |\nabla u_i^\lambda|^2 - \right. \\ & \quad \left. \frac{1}{p+1} \sum_{i,j=1}^k \beta_{ij} |x|^\alpha |u_i^\lambda|^{q+1} |u_j^\lambda|^{q+1} \right] dx \leq \\ & C \sum_{i=1}^k \int_{B_2} \left[|\nabla u_i^\lambda|^2 + |x|^\alpha |u_i^\lambda|^{p+1} \right] dx \leq \\ & C \sum_{i=1}^k \int_{B_4 \setminus B_2} |\nabla u_i^\lambda|^2 dx \rightarrow 0. \end{aligned}$$

根据上式的收敛性, 选取序列 $\lambda_n \rightarrow +\infty$, 使得对 $n=1, 2, \dots$, 有

$$\sum_{i=1}^k \int_{B_2} (u_i^{\lambda_n})^2 dx \leq 2^{-n}.$$

简单计算发现

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^k \int_1^2 \int_{\partial B_r} (u_i^{\lambda_n})^2 dS dr &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^k \int_{B_2 \setminus B_1} (u_i^{\lambda_n})^2 dx \leq \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^k \int_{B_2} (u_i^{\lambda_n})^2 dx &\leq 1. \end{aligned}$$

容易看出存在 $r_0 \in (1, 2)$, 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\partial B_{r_0}} \sum_{i=1}^k (u_i^{\lambda_n})^2 dS < +\infty,$$

意味着

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^k \int_{\partial B_{r_0}} (u_i^{\lambda_n})^2 dS = 0.$$

联合函数 $\mathfrak{I}(r)$ 的尺度变换, 可以发现

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathfrak{I}(\lambda_n r_0; 0, \mathbf{u}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathfrak{I}(r_0; 0, \mathbf{u}^{\lambda_n}) = 0.$$

由函数 $\mathfrak{I}(r; 0, \mathbf{u})$ 的单调性可得

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \mathfrak{I}(r; 0, \mathbf{u}) = 0.$$

证毕.

定理 1 的证明考虑下面三种情况.

$$\text{情形 I. } 3 \leq N < 2 + \frac{4+2\alpha}{p-1}.$$

由于 $N-2 - \frac{4+2\alpha}{p-1} < 0$, 此时式(10)意味着当

$R \rightarrow +\infty$ 时,

$$\sum_{i=1}^k \int_{B_R} \left[|\nabla u_i|^2 + |x|^\alpha |u_i|^{p+1} \right] dx \leq CR^{N-2-\frac{4+2\alpha}{p-1}} \rightarrow 0.$$

因此可得 $\mathbf{u} \equiv 0$.

$$\text{情形 II. } N = 2 + \frac{4+2\alpha}{p-1}.$$

根据式(10)的积分估计, 有

$$\sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_i|^2 + |x|^\alpha |u_i|^{p+1} \right) dx < \infty,$$

即

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \int_{B_{2R} \setminus B_R} \left(|\nabla u_i|^2 + |x|^\alpha |u_i|^{p+1} \right) dx = 0.$$

应用式(9)和 Hölder 不等式可得

$$\sum_{i=1}^k \int_{B_R} \left(|\nabla u_i|^2 + |x|^\alpha |u_i|^{p+1} \right) dx \leq$$

$$CR^{-2} \sum_{i=1}^k \int_{B_{2R} \setminus B_R} |u_i|^2 dx \leq$$

$$CR^{-2} \sum_{i=1}^k \left(\int_{B_{2R} \setminus B_R} |x|^\alpha |u_i|^{p+1} dx \right)^{\frac{2}{p+1}} \times$$

$$\left(\int_{B_{2R} \setminus B_R} |x|^{-\frac{2\alpha}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p+1}} \leq$$

$$C \sum_{i=1}^k \left(\int_{B_{2R} \setminus B_R} |x|^\alpha |u_i|^{p+1} dx \right)^{\frac{2}{p+1}},$$

则当 $R \rightarrow +\infty$ 时, 上述不等式的右边趋近于 0. 因此可得 $\mathbf{u} \equiv 0$.

$$\text{情形 III. } \frac{N+2+2\alpha}{N-2} < p < p_{\text{JL}}(N).$$

因为 $\mathbf{u}$ 是椭圆系统(1)的稳定解, 容易得到

$$\lim_{r \rightarrow 0} \mathfrak{I}(r; 0, \mathbf{u}) = 0.$$

根据函数 $\mathfrak{I}(r; 0, \mathbf{u})$ 的单调性和引理 5, 意味着

对所有的 $r > 0$,

$$\mathfrak{I}(r; 0, \mathbf{u}) \equiv 0.$$

结合推论 1, 可以推导出 $\mathbf{u}$ 是椭圆系统(1)的齐次稳定解. 因此, 定理 3 表明 $\mathbf{u} \equiv 0$. 证毕.

参考文献:

- [1] FRANTZESKAKIS D J. Dark solitons in atomic Bose-Einstein condensates: from theory to experiments[J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2010, 43(21):213001.
- [2] KIVSHAR Y S, LUTHER-DAVIES B. Dark optical solitons: physics and applications[J]. Physics Reports, 1998, 298(2/3):81-197.
- [3] DANCER E N, WEI J C, WETH T. A priori bounds versus multiple existence of positive solutions for a nonlinear Schrödinger system[J]. Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse Non Linéaire, 2010, 27(3):953-969.
- [4] TAVARES H, TERRACINI S, VERZINI G, et al. Existence and nonexistence of entire solutions for non-

- cooperative cubic elliptic systems[J]. Communications in Partial Differential Equations, 2011, 36(11):1988-2010.
- [5] QUITTNER P, SOUPLET P. Optimal Liouville-type theorems for noncooperative elliptic Schrödinger systems and applications[J]. Communications in Mathematical Physics, 2012, 311(1):1-19.
- [6] WEI J C, WETH T. Radial solutions and phase separation in a system of two coupled Schrödinger equations[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 2008, 190(1):83-106.
- [7] LE P, RAHAL B. On stable and finite Morse index solutions to quasilinear Schrödinger equations[J]. Nonlinear Differential Equations and Applications, 2022, 29(4):46.
- [8] YANG H, ZOU W M. Stable and finite Morse index solutions of a nonlinear elliptic system[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2019, 471(1/2): 147-169.
- [9] LE P. Stable and finite Morse index solutions of a nonlinear Schrödinger system[J]. Nonlinear Differential Equations and Applications, 2021, 28(4):39.
- [10] DANCER E N, WETH T. Liouville-type results for non-cooperative elliptic systems in a half-space[J]. Journal of the London Mathematical Society, 2012, 86(1):111-128.
- [11] SOUPLET P. The proof of the Lane-Emden conjecture in four space dimensions[J]. Advances in Mathematics, 2009, 221(5):1409-1427.
- [12] BAHRI A, LIONS P L. Solutions of superlinear elliptic equations and their Morse indices[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1992, 45(9):1205-1215.
- [13] FARINA A. On the classification of solutions of the Lane-Emden equation on unbounded domains of $\mathbb{R}^N$ [J]. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 2007, 87(5):537-561.
- [14] DÁVILA J, DUPAIGNE L, WANG K L, et al. A monotonicity formula and a Liouville-type theorem for a fourth order supercritical problem[J]. Advances in Mathematics, 2014, 258:240-285.
- [15] HU L G. A monotonicity formula and Liouville-type theorems for stable solutions of the weighted elliptic system[J]. Advances in Differential Equations, 2017, 22(1/2):49-76.
- [16] AO W W, LAI S S, LUO S P. Classification of finite Morse index solutions to the polyharmonic Hénon equation[J]. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 2023, 62:19.
- [17] FAZLY M, HU Y Y, YANG W. On stable and finite Morse index solutions of the nonlocal Hénon-Gelfand-Liouville equation[J]. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 2021, 60:26.
- [18] LUO S P, WEI J C, ZOU W M. Monotonicity formula and classification of stable solutions to polyharmonic Lane-Emden equations[J]. International Mathematics Research Notices, 2022, 2022(21):16902-16953.
- [19] WANG K L. Recent progress on stable and finite Morse index solutions of semilinear elliptic equations[J]. Electronic Research Archive, 2021, 29(6):3805-3816.
- [20] DANCER E N, DU Y H, GUO Z M. Finite Morse index solutions of an elliptic equation with supercritical exponent[J]. Journal of Differential Equations, 2011, 250(8):3281-3310.

Liouville theorems for stable solutions of a nonlinear elliptic system with Hénon term

HUANG Yuxin¹, GAN Yiqing², HU Lianggen¹

(1.School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo 315211, China; 2.Yaojiang Middle School, Yuyao 315400, China)

Abstract: In this paper, we focus on the k -coupled elliptic system with Hénon term $-\Delta u_i = \sum_{j=1}^k \beta_{ij} |x|^\alpha |u_i|^{q-1} u_i |u_j|^{q+1}$ in $\mathbb{R}^N$, where k is a fixed positive integer, $i=1,2,\cdots,k$, $q \geq 1$, $N \geq 3$, and $B = (\beta_{ij})_{i,j=1}^k$ is a real symmetric matrix. We first use Pohozaev identity to construct monotonicity formula and find their equivalent relation. For the case that the matrix B is strictly co-positive, we obtain Liouville theorems of stable solutions (whether positive or sign-changing), by the use of Pohozaev identity, monotonicity formula of solution together with a blowing down sequence.

Key words: Liouville theorem; stable solutions; Pohozaev identity; monotonicity formula; blowing down sequence

(责任编辑 韩 超)