

DOI: 10.20098/j.cnki.1001-5132.2023.0225

不含邻点的循环平衡样本设计的若干构造

蔡钦琳, 郭超, 王小苗*

(宁波大学 数学与统计学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 不含邻点的平衡样本设计可被用于抽样调查. 借助循环差阵, 建立区组大小为 4 的不含邻点循环平衡样本设计(CBSEC)的递归构造. 应用递归构造和基于计算机搜索的直接构造, 给出含 2 个相同半轨道或 4 个四分之一轨道的 CBSEC($v, 4, 4$) 的一些存在性结果. 并且当 $k \in \{3, 4, 5\}$ 时, 利用完美差族给出了 CBSEC(v, k, λ) 的一个新构造.

关键词: 平衡样本设计; 循环 BSEC; 区组轨道; 差阵; 完美差族

中图分类号: O157.2

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2024) 02-0096-05

循环有序集 $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{v-1}\}$ 的一个对子 $\{x_i, x_j\}$ 称为相邻, 是指 $j = i + 1$, 其中 $0 \leq i \leq (v - 2)$, 或者 $\{i, j\} = \{0, v - 1\}$; 否则, $\{x_i, x_j\}$ 称为不相邻. 一个不含邻点的平衡样本设计记为 BSEC(v, k, λ), 是一个对子 $(X, \mathcal{B})$, 其中, X 是循环有序 v 个点的集合(称为单元), $\mathcal{B}$ 是 X 的 k 元子集的集合(称为区组), 满足 X 的任何相邻对子不会出现在任何区组中, 而任何不相邻对子恰好出现在 λ 个区组中. 在一个 BSEC(v, k, λ) 中, 共有 $\lambda v(v - 3) / (k(k - 1))$ 个区组.

BSEC 概念最早在 1988 年由 Hedayat 等^[1]提出. 当所有单元以一维顺序排列时, 相邻单元提供了相似信息, 故不含邻点的平衡样本设计可被用于抽样调查. 文献[1]证明, 与简单的随机抽样相比, 该设计能显著降低总体的 Horvitz-Thompson 估计量的方差.

BSEC(v, k, λ) $(X, \mathcal{B})$ 的一个自同构是 X 上保持 $\mathcal{B}$ 不变的置换. 若 BSEC(v, k, λ) 含有一个由 v 长圈组成的自同构, 则称为循环, 简记为 CBSEC(v, k, λ). 不失一般性, 用模 v 的整数加群 Z_v 来表示 X . 相对非循环 BSEC 来说, CBSEC 能更容易地选择一个随机区组的良好代数结构. 令 K_v 表示 v 个顶点的完全图, C_v 表示 v 个顶点的圈, CBSEC

(v, k, λ) 等价于 $\lambda(K_v \setminus C_v)$ 的循环 K_k -分解.

Wei^[2]首先开始对 CBSEC 的研究. Zhang 等^[3]建立了 CBSEC($v, 3, \lambda$) 存在的充要条件. Zhang 等^[4]考虑了 CBSEC($v, 4, 1$), 并证明 CBSEC($v, 4, 1$) 存在的必要条件是 $v \equiv 3 \pmod{12}$ 且 $v \geq 3$. Dukes 等^[5]给出了 CBSEC 的渐近存在性结果, 证明对于任意 $k \geq 2$ 和任意充分大的 v , 存在一个正整数 λ , 使得 CBSEC(v, k, λ) 存在. Guo 等^[6]证明对于任意 $v \not\equiv 0 \pmod{16}$ 且 $v \geq 12$, 存在 $\lambda \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$, 使得 CBSEC($v, 4, \lambda$) (或 $\lambda(K_v \setminus C_v)$ 的一个循环 K_4 -分解) 存在. 孔海荣^[7]给出了二维 BSEC 的构造方法.

本文给出了 CBSEC($v, 4, 4$) 新的递归构造方法, 得到了含 2 个相同半轨道的 CBSEC($v, 4, 4$) 和含 4 个四分之一轨道 CBSEC($v, 4, 4$) 的存在性结果. 并利用完美差族的辅助设计, 建立当 $k \in \{3, 4, 5\}$ 时, 完美 CBSEC(v, k, λ) 的一个新构造.

1 预备知识

在全文中, 并集被认为是包含重复数的多重集的并. 对于有限集 A 和正整数 h , 用 hA 来表示 $A \cup A \cup \dots \cup A$ (h 次). 对于正整数 r 和 CBSEC 的基区组 B , 符号 $r \otimes B$ 表示 B 在基区组集合中出现 r 次. 令 $[a, b]$ 表示满足 $a \leq n \leq b$ 的整数 n 的集合.

收稿日期: 2023-02-16.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journal.g.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(11771227); 宁波市自然科学基金(202003N4141); 浙江省省属高校基本科研业务费专项资金(SJLY2020008).

第一作者: 蔡钦琳, 硕士研究生, 主要研究方向: 组合设计与编码理论. E-mail: caiqinlin1999@163.com

*通信作者: 王小苗, 博士/教授, 主要研究方向: 组合设计与编码理论. E-mail: wangxiaomiao@nbu.edu.cn

令 $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ 是 $\text{CBSEC}(v, 4, \lambda)$ 中的一个区组. 包含 B 的区组轨道 $\text{Orb}(B)$ 是指所有不同区组 $B+i = \{b_1+i, b_2+i, b_3+i, b_4+i\}$ 构成的集合, 其中, $i \in Z_v$, 加法运算在 Z_v 上进行. 从每个区组轨道中任意选择一个固定区组, 称其为基区组. 若一个区组轨道含有 v 个不同区组, 则称这个轨道是长的; 否则是短的.

当 $v \equiv 0(\text{mod } 2)$ (或 $v \equiv 0(\text{mod } 4)$) 时, 含 $v/2$ (或 $v/4$) 个不同区组的区组轨道被称为半轨道 (或四分之一轨道). 在四分之一轨道中, 可以选择 $\{0, v/4, v/2, 3v/4\}$ 作为基区组. 在半轨道中, 可以假设基区组形式为 $\{0, x, v/2, x+v/2\}$, 其中 $x \notin \{0, v/4, v/2, 3v/4\}$. 在本文中, 生成四分之一轨道的基区组用 $\downarrow$ 标记.

在 $\text{CBSEC}(v, 4, \lambda)$ 中, 区组 B 的稳定子群 $\text{Stab}(B)$ 是指 Z_v 中满足条件 $B+g=B$ 的所有元素 $g \in Z_v$ 构成的一个子群. 显然, $|\text{Orb}(B)| \cdot |\text{Stab}(B)| = v$. B 的差列表是指多重集 $\Delta(B) = \{b_i - b_j : 1 \leq i \neq j \leq 4\}$. 在 $\Delta(B)$ 中元素 $g \in Z_v$ 的重复数形如 $\mu_g |\text{Stab}(B)|$, 其中 μ_g 为某个整数. B 的部分差列表记为多重集 ∂B , 其中每个 $g \in Z_v$ 都恰好出现 μ_g 次. 显然, $\Delta(B) = \partial B$ 当且仅当 B 属于长轨道.

引理 1 Z_v 的 4 元子集的集合 $\{B_1, B_2, \dots, B_t\}$ 构成一个 $\text{CBSEC}(v, 4, \lambda)$ 的基区组集, 当且仅当 $\partial B_1 \cup \partial B_2 \cup \dots \cup \partial B_t = \lambda(Z_v \setminus \{0, 1, -1\})$.

例 1 存在一个 $\text{CBSEC}(24, 4, 2)$, 其 5 个基区组为 $B_1 = \{0, 2, 5, 15\}, B_2 = \{0, 2, 7, 10\}, B_3 = \{0, 4, 8, 15\}, B_4 = B_5 = \{0, 6, 12, 18\}$, 其中, B_4 和 B_5 生成 2 个四分之一轨道. 可以验证, $\Delta(B_1) = \partial B_1 = \pm\{2, 3, 5, 9, 10, 11\}$, $\Delta(B_2) = \partial B_2 = \pm\{2, 3, 5, 7, 8, 10\}$, $\Delta(B_3) = \partial B_3 = \pm\{4, 4, 7, 8, 9, 11\}$, $\Delta(B_4) = \Delta(B_5) = \pm\{6, 6, 6, 6, 12, 12\}$ 和 $\partial B_4 = \partial B_5 = \pm\{6, 12\}$.

为方便起见, 在下文中, 当涉及 CBSEC 的区组 B 的差时, 均指 B 的部分差列表 ∂B .

引理 2^[6] 若 (1) $v \equiv 0(\text{mod } 6)$, $v \in [12, 96] \cup \{108, 162, 216\}$ 且 $v \neq 18$; (2) $v \equiv 6, 30(\text{mod } 36)$ 且 $v > 6$, 则存在一个含一个半轨道的 $\text{CBSEC}(v, 4, 2)$.

引理 3 若 $v \equiv 0(\text{mod } 12)$ 且 $v \in [24, 108]$, 则存在一个含 2 个四分之一轨道的 $\text{CBSEC}(v, 4, 2)$.

证明 当 $v = 24$ 时, 由例 1 得到结论. 当 v 为其他值时, 含 2 个四分之一轨道的 $\text{CBSEC}(v, 4, 2)$

的基区组如下所示:

$$\begin{aligned} v = 36 : & \{0, 2, 4, 7\}, \{0, 3, 10, 24\}, \{0, 4, 15, 23\}, \\ & \{0, 5, 13, 24\}, \{0, 6, 16, 22\}, 2 \otimes \{0, 9, 18, 27\}^{\downarrow}, \\ v = 48 : & \{0, 2, 4, 7\}, \{0, 3, 7, 17\}, \{0, 5, 18, 32\}, \\ & \{0, 6, 19, 28\}, \{0, 6, 21, 32\}, \{0, 8, 23, 31\}, \\ & \{0, 9, 19, 37\}, 2 \otimes \{0, 12, 24, 36\}^{\downarrow}, \\ v = 60 : & 2 \otimes \{0, 2, 16, 35\}, \{0, 3, 20, 37\}, \\ & \{0, 3, 23, 54\}, \{0, 4, 28, 52\}, \{0, 4, 42, 53\}, \\ & \{0, 5, 47, 55\}, \{0, 6, 32, 53\}, \{0, 9, 38, 48\}, \\ & 2 \otimes \{0, 15, 30, 45\}^{\downarrow}, \\ v = 72 : & 2 \otimes \{0, 2, 16, 42\}, 2 \otimes \{0, 3, 20, 44\}, \\ & \{0, 4, 25, 63\}, \{0, 4, 37, 49\}, \{0, 5, 43, 50\}, \\ & \{0, 6, 53, 63\}, \{0, 6, 59, 67\}, \{0, 7, 29, 64\}, \\ & \{0, 10, 49, 61\}, 2 \otimes \{0, 18, 36, 54\}^{\downarrow}, \\ v = 84 : & 2 \otimes \{0, 2, 18, 50\}, 2 \otimes \{0, 3, 20, 57\}, \\ & \{0, 4, 26, 79\}, \{0, 4, 60, 79\}, \{0, 6, 46, 77\}, \\ & \{0, 6, 61, 76\}, \{0, 7, 35, 76\}, \{0, 14, 39, 58\}, \\ & \{0, 10, 61, 72\}, \{0, 12, 41, 51\}, \{0, 13, 38, 73\}, \\ & 2 \otimes \{0, 21, 42, 63\}^{\downarrow}, \\ v = 96 : & 2 \otimes \{0, 2, 20, 62\}, 2 \otimes \{0, 3, 22, 66\}, \\ & 2 \otimes \{0, 4, 21, 68\}, \{0, 5, 31, 70\}, \{0, 5, 40, 90\}, \\ & \{0, 6, 61, 73\}, \{0, 8, 81, 89\}, \{0, 9, 80, 89\}, \\ & \{0, 10, 53, 67\}, \{0, 10, 55, 69\}, \{0, 11, 56, 69\}, \\ & \{0, 12, 58, 71\}, 2 \otimes \{0, 24, 48, 72\}^{\downarrow}, \\ v = 108 : & \{0, 2, 21, 55\}, \{0, 2, 21, 58\}, \{0, 3, 23, 59\}, \\ & \{0, 3, 23, 60\}, \{0, 4, 22, 61\}, \{0, 4, 22, 62\}, \\ & \{0, 5, 29, 64\}, \{0, 5, 29, 101\}, \{0, 6, 14, 75\}, \\ & \{0, 6, 68, 98\}, \{0, 7, 42, 70\}, \{0, 8, 17, 99\}, \\ & \{0, 10, 25, 70\}, \{0, 11, 42, 76\}, \{0, 12, 43, 76\}, \\ & \{0, 13, 26, 93\}, \{0, 14, 30, 97\}, 2 \otimes \{0, 27, 54, 81\}^{\downarrow}. \end{aligned}$$

2 $\text{CBSEC}(v, 4, 4)$ 的构造和结果

引理 4^[6] 若存在一个 $\text{CBSEC}(v, 4, 4)$, 含 N_1 个四分之一轨道、 N_2 个半轨道和 N_3 个长轨道, 则

$$\begin{cases} (N_1, N_2, N_3) = (0, 0, v/3 - 1), \text{若 } v \equiv 3(\text{mod } 6); \\ (N_1, N_2, N_3) = (0, 0, v/3 - 1) \text{ 或 } (0, 2, v/3 - 2), \\ \quad \text{若 } v \equiv 6(\text{mod } 12); \\ (N_1, N_2, N_3) = (0, 0, v/3 - 1), \text{ 或 } (N_1, N_2) \in \\ \quad \{(0, 2), (2, 1), (4, 0)\} \text{ 且 } N_3 = v/3 - 2, \\ \quad \text{若 } v \equiv 0(\text{mod } 12). \end{cases}$$

令 λ 是一个正整数, G 是一个 v 阶交换群, 且

$\lambda(v-1) \equiv 0 \pmod{4}$. G 上的 λ -重-四元集是指一个有序四元集 $\{(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4}) : 1 \leq i \leq \lambda(v-1)/4\}$, 满足以下条件:

$$(1) \bigcup_{i=1}^{\lambda(v-1)/4} \{\pm(a_{i2}-a_{i1}), \pm(a_{i4}-a_{i3})\} = \underline{\lambda}(G \setminus \{0\});$$

$$(2) \bigcup_{i=1}^{\lambda(v-1)/4} \{a_{i3}-a_{i1}, a_{i3}-a_{i2}, a_{i4}-a_{i1}, a_{i4}-a_{i2}\} = \underline{\lambda}(G \setminus \{0\}).$$

令 $(G, \cdot)$ 是 v 阶有限群. G 上的一个 (v, k, λ) -差阵(DM)简记为 (G, k, λ) -DM, 是一个元素取自 G 的 $k \times \lambda v$ 矩阵 $D = (d_{ij})$, 使得对于任意 2 个不同行 x 和 y , 差多重集 $\{d_{xy}d_{y'j}^{-1} : 1 \leq j \leq \lambda v\}$ 恰好包含 G 中的每个元素 λ 次. 若 G 是交换群, 则运算通常使用加法符号, 此时使用差 $d_{xy} - d_{y'j}$. (Z_v, k, λ) -DM 称为循环的, 记为 (v, k, λ) -CDM.

引理 5^[6] 若存在一个 $(v, 4, 1)$ -CDM, 则存在一个 Z_v 上的 4-重-四元集.

对于奇数 v , 一个 $(v, 4, 1)$ -CDM, $D = (d_{ij})$, 称为强的, 其中 $d_{ij} \in Z_v$, $1 \leq i \leq 4$ 和 $1 \leq j \leq v$, 指存在 $d \in Z_v$ 使得该差阵包含一列 $(d_{1t}, d_{2t}, d_{3t}, d_{4t})^T$, $1 \leq t \leq v$, 满足条件 $(d_{2t}-d_{1t}, d_{3t}-d_{1t}, d_{4t}-d_{1t}) \equiv (d, (v-1)/2, d+(v-1)/2) \pmod{v}$. 当 $v \equiv 1 \pmod{4}$ 时, 若 $d = (v-1)/4$, 则 $(v, 4, 1)$ -CDM 称为双强的.

引理 6^[8] 设 v 和 k 是正整数且满足 $\gcd(v, (k-1)!) = 1$. 对于 $i = 0, 1, \dots, k-1$ 和 $j = 0, 1, \dots, v-1$, 令 $d_{ij} \equiv ij \pmod{v}$, 则 $D = (d_{ij})$ 是一个 $(v, k, 1)$ -CDM. 特别地, 若 v 是素数, 则对于任意 $1 \leq k \leq v$, 存在一个 $(v, k, 1)$ -CDM.

引理 7 若 $v \equiv 1, 5 \pmod{6}$ 且 $v \geq 5$, 则存在一个强的 $(v, 4, 1)$ -CDM. 若 $v \equiv 1, 5 \pmod{12}$ 且 $v \geq 5$, 则存在一个双强的 $(v, 4, 1)$ -CDM.

证明 当 $v \equiv 1, 5 \pmod{6}$ 且 $v \geq 5$ 时, 由引理 6 可知, $D = (d_{ij})$ 构成了一个 $(v, 4, 1)$ -CDM, 其中对于 $i = 0, 1, 2, 3$, $j = 0, 1, \dots, v-1$, 有 $d_{ij} \equiv ij \pmod{v}$. 若 $v \equiv 1, 5 \pmod{12}$, 则存在一列 $(d_{0t}, d_{1t}, d_{2t}, d_{3t})^T$, 其中, $t = (v-1)/4$, 使得 $(d_{1t}-d_{0t}, d_{2t}-d_{0t}, d_{3t}-d_{0t}) = ((v-1)/4, (v-1)/2, 3(v-1)/4)$ 成立. 若 $v \equiv 7, 11 \pmod{12}$, 则存在一列 $(d_{0t}, d_{1t}, d_{2t}, d_{3t})^T$, 其中 $t = (3v-1)/4$, 使得 $(d_{1t}-d_{0t}, d_{2t}-d_{0t}, d_{3t}-d_{0t}) \equiv ((3v-1)/4, (v-1)/2, (v-3)/4) \pmod{v}$ 成立.

引理 8 存在一个强的 $(27, 4, 1)$ -CDM.

证明 在文献[9]的引理 4.1 中, 给出了一个齐次 $(27, 4, 1)$ -CDM. 将该 CDM 的第 1 行、第 2 行和第 4 行分别作为所需的强的 $(27, 4, 1)$ -CDM, $B = (B_1 | B_2)$ 的第 2 行、第 4 行和第 3 行, 然后新增一个由零元素组成的行.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 24 & 8 & 9 & 5 & 25 & 16 & 7 & 21 & 12 & 17 & 2 & 20 \\ 0 & 4 & 21 & 3 & 14 & 24 & 19 & 12 & 25 & 5 & 15 & 6 & 10 & 13 \\ 0 & 19 & 26 & 11 & 13 & 10 & 4 & 23 & 15 & 3 & 22 & 1 & 14 & 6 \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 19 & 26 & 11 & 13 & 10 & 4 & 23 & 15 & 3 & 22 & 1 & 14 & 6 \\ 2 & 1 & 26 & 17 & 8 & 11 & 22 & 16 & 20 & 9 & 7 & 23 & 18 \\ 18 & 24 & 8 & 9 & 5 & 25 & 16 & 7 & 21 & 12 & 17 & 2 & 20 \end{pmatrix}.$$

2.1 含 2 个相同半轨道的 CBSEC $(v, 4, 4)$

构造 1^[6] 假设存在:

- (1) 一个含 2 个相同半轨道的 CBSEC $(v, 4, 4)$;
- (2) 一个 Z_v 上的 λ -重-四元集, $\lambda \in \{1, 2, 4\}$;
- (3) 一个强的 $(v, 4, 1)$ -CDM, 则存在一个含 2 个相同半轨道的 CBSEC $(uv, 4, 4)$.

结合构造 1 和引理 5, 得到以下推论.

推论 1 假设存在一个含 2 个相同半轨道的 CBSEC $(u, 4, 4)$ 和一个强的 $(v, 4, 1)$ -CDM, 则存在一个含 2 个相同半轨道的 CBSEC $(uv, 4, 4)$.

定理 1 若 $u \equiv 0 \pmod{6}$, $u \in [12, 96] \cup \{108, 162, 216\}$, $v \equiv 1, 5 \pmod{6}$, 则存在一个含 2 个相同半轨道的 CBSEC $(uv, 4, 4)$.

证明 由文献[6]中的定理 4.7 可知, 存在含 2 个相同半轨道的 CBSEC $(18, 4, 4)$. 当 $u \equiv 0 \pmod{6}$, $u \in [12, 96] \cup \{108, 162, 216\}$ 且 $u \neq 18$ 时, 重复引理 2 中含一个半轨道的 CBSEC $(u, 4, 2)$ 的基区组, 得到一个含 2 个相同半轨道的 CBSEC $(u, 4, 4)$. 由引理 7 可知, 当 $v \equiv 1, 5 \pmod{6}$ 且 $v \geq 5$ 时, 存在一个强的 $(v, 4, 1)$ -CDM. 应用推论 1, 可得到所求的含 2 个相同半轨道的 CBSEC $(uv, 4, 4)$.

定理 2 若 $v \equiv 0 \pmod{6}$ 且 $v > 6$, 除了可能的例外值 $v \equiv 0 \pmod{48}$, 则存在一个含 2 个相同半轨道的 CBSEC $(v, 4, 4)$.

证明 当 $v \equiv 12 \pmod{24}$ 时, 记 $v = 4 \times 3^\alpha t$, 其中 $\alpha \geq 1$ 和 $t \equiv 1, 5 \pmod{6}$. 若 $\alpha = 1, 2, 3$, 由定理 1 可知, 存在一个含 2 个相同半轨道的 CBSEC $(4 \times 3^\alpha t, 4, 4)$. 若 $\alpha \geq 4$, 由引理 8 可知, 存在一个强的

(27, 4, 1)-CDM. 将推论 1 递归地应用在含 2 个相同半轨道的 CBSEC($4 \times 3^{\alpha-3}t, 4, 4$) 上, 可得到含 2 个相同半轨道的 CBSEC($4 \times 3^{\alpha}t, 4, 4$).

当 $v \equiv 24(\text{mod } 48)$ 时, 记 $v = 8 \times 3^{\alpha}t$, 其中 $\alpha \geq 1$ 和 $t \equiv 1, 5(\text{mod } 6)$. 当 $v \equiv 18(\text{mod } 36)$ 时, 记 $v = 2 \times 3^{\alpha}t$, 其中, $\alpha \geq 2$ 和 $t \equiv 1, 5(\text{mod } 6)$. 具体证明过程与 $v \equiv 12(\text{mod } 24)$ 时的情况类似. 当 $v > 6$ 且 $v \equiv 6, 30(\text{mod } 36)$ 时, 重复引理 2 中含一个半轨道的 CBSEC($v, 4, 2$) 的基区组 2 次.

2.2 含 4 个四分之一轨道的 CBSEC($v, 4, 4$)

构造 2 假设存在:

- (1) 一个含 4 个四分之一轨道的 CBSEC($u, 4, 4$);
- (2) 一个 Z_v 上的 λ -重-四元集, $\lambda \in \{1, 2, 4\}$;
- (3) 一个双强的 $(v, 4, 1)$ -CDM, 则存在一个含 4 个四分之一轨道的 CBSEC($uv, 4, 4$).

证明 取一个含 4 个四分之一轨道的 CBSEC($u, 4, 4$). 由引理 4 可知, $u \equiv 0(\text{mod } 12)$. 不失一般性, 令基区组为 $B_s = \{0, x_{s1}, x_{s2}, x_{s3}\}$, $1 \leq s \leq u/3 + 2$, 其生成四分之一轨道的 4 个基区组为 $B_{u/3-1} = B_{u/3} = B_{u/3+1} = B_{u/3+2} = \{0, u/4, u/2, 3u/4\}$. 令 $D = (d_{ij})$ 是一个双强的 $(v, 4, 1)$ -CDM, 其中对于 $1 \leq i \leq 4$, $1 \leq j \leq v$, 有 $d_{ij} \in Z_v$, 且设 $(d_{21} - d_{11}, d_{31} - d_{11}, d_{41} - d_{11}) \equiv ((v-1)/4, (v-1)/2, 3(v-1)/4)(\text{mod } v)$. 如下构造一个 CBSEC($uv, 4, 4$), 其基区组由以下两部分组成.

- (1) 对于每个基区组 $B_s = \{0, x_{s1}, x_{s2}, x_{s3}\}$, $1 \leq s \leq u/3 - 1$, 取 v 个基区组

$$B_{sj} = \{0, x_{s1} + (d_{2j} - d_{1j})u, x_{s2} + (d_{3j} - d_{1j})u, x_{s3} + (d_{4j} - d_{1j})u\},$$

其中 $j = 1, 2, \dots, v$, 加法运算在 Z_{uv} 上进行. 令 $\mathcal{F}_1 = \{B_{sj} : 1 \leq s \leq u/3 - 1, 1 \leq j \leq v\} \cup \{3 \otimes B_{u/3-1}\}$. 则由双强 CDM 的定义可得:

$$\partial(\mathcal{F}_1) = 4\{a + bu : 2 \leq a \leq u - 2, 0 \leq b \leq v - 1\}.$$

注意到,

$$\begin{aligned} B_{u/3-1,0} &= \{0, u/4 + (v-1)u/4, u/2 + \\ &\quad (v-1)u/2, 3u/4 + 3(v-1)u/4\} = \\ &\quad \{0, uv/4, uv/2, 3uv/4\}, \end{aligned}$$

在 Z_{uv} 上生成一个四分之一轨道. 因为 Z_{uv} 上 $B_{u/3-1,1}$ 的稳定子群大小为 4, 故 $\mathcal{F}_1$ 中的 4 个基区组 $B_{u/3-1,1}$ 贡献 $\{uv/4, uv/2, 3uv/4\}$ 中的每个差各 4 次.

- (2) 设 $\{(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4}) : 1 \leq i \leq \lambda(v-1)/4\}$ 是 Z_v

上的一个 λ -重-四元集. 令 $\mathcal{F}_2 = \{(ua_{i1}, ua_{i2}, ua_{i3} + 1, ua_{i4} + 1) : 1 \leq i \leq \lambda(v-1)/4\}$. 则

$$\begin{aligned} \partial(\mathcal{F}_2) &= \bigcup_{i=1}^{\lambda(v-1)/4} \{\pm u(a_{i2} - a_{i1}), \pm u(a_{i4} - a_{i3}), \\ &\quad u(a_{i3} - a_{i1}) + 1, u(a_{i3} - a_{i2}) + 1, u(a_{i4} - a_{i1}) + \\ &\quad 1, u(a_{i4} - a_{i2}) + 1, -u(a_{i3} - a_{i1}) - 1, -u(a_{i3} - \\ &\quad a_{i2}) - 1, -u(a_{i4} - a_{i1}) - 1, -u(a_{i4} - a_{i2}) - 1\} = \\ &\quad \underline{\lambda}\{a + bu : a \in \{0, \pm 1\}, b \in Z_v \setminus \{0\}\}. \end{aligned}$$

因此, $\mathcal{F}_1 \cup (4/\lambda\mathcal{F}_2)$ 构成了含 4 个四分之一轨道的 CBSEC($uv, 4, 4$) 的基区组, 且 $B_{u/3-1,1}$ 生成所有的 4 个四分之一轨道.

结合构造 2 和引理 5, 得到下面推论.

推论 2 假设存在一个含 4 个四分之一轨道的 CBSEC($u, 4, 4$) 和一个双强的 $(v, 4, 1)$ -CDM, 则存在一个含 4 个四分之一轨道的 CBSEC($uv, 4, 4$).

定理 3 若 $u \equiv 0(\text{mod } 12)$, $u \in [24, 108]$, $v \equiv 1, 5(\text{mod } 12)$, 则存在一个含 4 个四分之一轨道的 CBSEC($uv, 4, 4$).

证明 当 $u \equiv 0(\text{mod } 12)$ 且 $u \in [12, 108]$ 时, 重复引理 3 中的含 2 个四分之一轨道的 CBSEC($u, 4, 2$) 的基区组, 得到含 4 个四分之一轨道的 CBSEC($u, 4, 4$). 由引理 7 可知, 当 $v \equiv 1, 5(\text{mod } 12)$ 且 $v \geq 5$ 时, 存在一个双强 $(v, 4, 1)$ -CDM. 应用推论 2, 得到所求含 4 个四分之一轨道的 CBSEC($uv, 4, 4$).

3 基于 PDF 的递归构造

假设 $\mathcal{B} = \{\{0, b_{1i}, b_{2i}, \dots, b_{k-1,i}\} : i = 1, 2, \dots, r\}$ 是一个 CBSEC(v, k, λ) 的基区组族. 令 $\text{ele}(\mathcal{B}) = \bigcup_{i=1}^r \{b_{1i}, b_{2i}, \dots, b_{k-1,i}\}$. 若 $\text{ele}(\mathcal{B}) \subseteq \{1, 2, \dots, \lfloor v/2 \rfloor\}$, 则称 CBSEC(v, k, λ) 为完美, 记作 PBSEC(v, k, λ).

对于一个集合 B , 令 $\Delta^+ B = \{x - y : x, y \in B, x > y\}$. 一个完美的 $(v, k, 1)$ -差族(简记为 $(v, k, 1)$ -PDF)是 Z_v 的子集(基区组)族 $\mathcal{F}$, 满足 $\Delta^+ \mathcal{F} = \bigcup_{B \in \mathcal{F}} \Delta^+ B$, 恰好覆盖 $\{1, 2, \dots, (v-1)/2\}$ 中每个元素一次. $(v, k, 1)$ -PDF 存在一个明显必要条件是 $v \equiv 1(\text{mod } k(k-1))$.

令 X^1 是 m 维向量 $(-r, -r+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, r-1, r)$, 其中 $m = 2r+1$. 令 $X^2, X^3, \dots, X^n$ 是 X^1 的置换. 若对于任意连续的置换子序列, 它们的向量和是 X^1 的置换, 则称 $X^1, X^2, \dots, X^n$ 为 m 阶 n 长的加法置换序列, 简记为 ASP(m, n).

引理 9^[10-11] 令 $k \in \{3, 4, 5\}$. 若存在一个 $(u,$

$k, 1$)-PDF, 则存在一个 ASP $(u, k-1)$.

构造 3 令 $k \in \{3, 4, 5\}$, 整数 λ 能被 $k(k-1)/2$ 整除. 假设存在

(1) 一个 $(v, k, 1)$ -PDF; (2) 一个 $(u, k, 1)$ -PDF; (3) 一个 PBSEC (u, k, λ) , 则存在一个 PBSEC (uv, k, λ) .

证明 假设 $\{0, a_{1i}, \dots, a_{k-1,i}\} : 1 \leq i \leq t$ 是一个 $(v, k, 1)$ -PDF 的基区组族, 其中 $v = k(k-1)t + 1$. 因为存在一个 $(u, k, 1)$ -PDF, 由引理 9 可知, 存在一个 ASP $(u, k-1)$, $X^1, X^2, \dots, X^{k-1}$, 其中对于每个 $l \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ 有 $X^l = (x_l^1, x_l^2, \dots, x_l^{k-1})$. 令

$$A_{ij} = \{0, ua_{1i} + x_j^1, ua_{2i} + x_j^1 + x_j^2, \dots, ua_{k-1,i} + x_j^1 + x_j^2 + \dots + x_j^{k-1}\},$$

其中, $1 \leq i \leq t$ 和 $1 \leq j \leq u$. 则有

$$\bigcup_{1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq u} \Delta^+ A_{ij} = \{(u+1)/2, (u+3)/2, \dots, (uv-1)/2\}.$$

令 $\{B_i = \{0, b_{1i}, \dots, b_{k-1,i}\} : i = 1, 2, \dots, \lambda(u-3)/(k \cdot (k-1))\}$ 是 PBSEC (u, k, λ) 的基区组族. 则

$$\bigcup_{i=1}^{\lambda(u-3)/(k(k-1))} \Delta^+ B_i = \lambda\{2, 3, \dots, (u-1)/2\}.$$

因此, $\lambda\{A_{ij} : 1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq u\} \cup \{B_i : 1 \leq i \leq \lambda(u-3)/(k(k-1))\}$ 构成一个 PBSEC (uv, k, λ) .

参考文献:

- [1] HEDAYAT A S, RAO C R, STUFKEN J. Sampling plans excluding contiguous units[J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 1988, 19(2):159-170.
- [2] WEI R. Cyclic BSEC of block size 3[J]. Discrete

Mathematics, 2002, 250(1/2/3):291-298.

- [3] ZHANG J, CHANG Y X. The spectrum of cyclic BSEC with block size three[J]. Discrete Mathematics, 2005, 305(1/2/3):312-322.
- [4] ZHANG J, CHANG Y X. Partitionable sets and cyclic BSECs with block size four[J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 2009, 139(6):1974-1979.
- [5] DUKES P J, LING A C H. Existence of balanced sampling plans avoiding cyclic distances[J]. Metrika, 2009, 70(2):131-140.
- [6] GUO C, WANG X M, FENG T. Cyclic balanced sampling plans excluding contiguous units with block size four[J]. Discrete Mathematics, 2022, 345(7):112899.
- [7] 孔海荣. 关于区组长为 4 的二维不含邻点的平衡样本设计的构造[D]. 石家庄: 河北师范大学, 2005.
- [8] COLBOURN M J, COLBOURN C J. Recursive constructions for cyclic block designs[J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 1984, 10(1):97-103.
- [9] ABEL R J R, GE G N. Some difference matrix constructions and an almost completion for the existence of triplewhist tournaments TWh(v)[J]. European Journal of Combinatorics, 2005, 26(7):1094-1104.
- [10] BOSE R C. On the construction of balanced incomplete block designs[J]. Annals of Eugenics, 1939, 9(4):353-399.
- [11] WILSON R M. Cyclotomy and difference families in elementary abelian groups[J]. Journal of Number Theory, 1972, 4(1):17-47.

Some constructions on cyclic balanced sampling plans excluding contiguous units

CAI Qinlin, GUO Chao, WANG Xiaomiao

(School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: Balanced sampling plans excluding contiguous units can be used for survey sampling. In this paper, using the tool of cyclic difference matrix, recursive constructions are established for cyclic balanced sampling plans excluding contiguous units (CBSEC) with block size 4. With the applications of recursive constructions and direct constructions based on computer search, some existence results on CBSEC $(v, 4, 4)$ s either with the same two half orbits or with four quarter orbits are presented. A new construction for CBSEC (v, k, λ) s with $k \in \{3, 4, 5\}$ is also given via perfect difference families.

Key words: balanced sampling plan; cyclic BSEC; block orbit; difference matrix; perfect difference family

(责任编辑 章践立)