

DOI: 10.20098/j.cnki.1001-5132.2023.0815

一类随机偏微分方程组的均匀化问题

丁 丽, 李志远*

(宁波大学 数学与统计学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 研究一类随机偏微分方程组的均匀化问题, $\partial_t \mathbf{y}_\varepsilon(t, x) = \Delta \mathbf{y}_\varepsilon(t, x) / 2 + V_\varepsilon(x) \mathbf{A} \mathbf{y}_\varepsilon(t, x)$, 其中 $(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^d$, $d > 2$. 这里的 $\mathbf{y}_\varepsilon(t, x) = (u_\varepsilon(t, x), w_\varepsilon(t, x))^T$, $V_\varepsilon(x)$ 是含参数的高斯过程, 当其相关函数满足特定的可积条件时, 可以使用 Duhamel(迭代)展开和 Wick 定理, 给出以上方程的均匀化收敛性.

关键词: Duhamel 展开; Wick 定理; 均匀化理论; 高斯过程

中图分类号: O175.2

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2024) 02-0101-07

随机微分方程的均匀化理论自提出后一直飞速发展^[1-2], 近年来, 重大的突破是 Hairer^[3]用正则结构理论来证明随机微分方程的均匀化理论. 均匀化理论有多种证明方法, 研究成果不断^[4-6], 如 Bal^[7-8]用 Duhamel 展开得到一类方程的均匀化理论, Gu 等^[9]用费曼卡兹公式证明了含随机性的方程的均匀化.

本文主要研究了耦合随机偏微分方程组的均匀化问题. 对于 $\varepsilon \ll 1$, 研究方程:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{y}_\varepsilon(t, x) = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{y}_\varepsilon(t, x) + V_\varepsilon(x) \mathbf{A} \mathbf{y}_\varepsilon(t, x), \\ (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^d, \\ \mathbf{y}_\varepsilon(t, x) = (u_\varepsilon(t, x), w_\varepsilon(t, x))^T, x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (1)$$

初始条件 $\mathbf{y}_0(x) = (u_0(x), w_0(x))^T$, $u_0(x), w_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^d)$. 随机过程 $V_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} V(\varepsilon^{-1} x)$, $V(x)$ 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的零均值平稳实值高斯过程, 且 V 具有有界可积的相关函数 $R(x) = \mathbb{E}\{V(y)V(y+x)\}$. $\mathbf{A}$ 是 2×2 的可逆正定常矩阵. 上述方程组还包含了薛定谔方程 $\partial_t u = \Delta u / 2 + iVu$. 当 $u = u_1 + iu_2$ 时, 薛定谔方程可改写为

$$\partial_t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta/2 & 0 \\ 0 & \Delta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -V \\ V & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

条件 H: 假设 $\hat{R}(\xi)$ 是 $C^\gamma(\mathbb{R}^d)$ 阶的, $0 \leq \gamma \leq 2$, 且非负功率谱 $\hat{R}(\xi) \leq f(|\xi|)$, $f(r) > 0$ 是一个有界且径向对称的可积函数, 当 $f(r) \leq \tau_f r^{-n}$ 时, 对于 $d > 2, 0 < n < d - 2$, 有 $\rho_f := c_d \int_0^\infty f(r) r^{d-3} dr < \infty$, 其中 c_d 为单位球 S^{d-1} 的体积. 若 $\hat{R}(\xi)$ 具有以上性质, 则称其满足条件 H.

$a \vee b = \max(a, b)$, $R(x)$ 的傅里叶变换定义为 $(2\pi)^d \hat{R}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi \cdot x} R(x) dx$.

定理 1 设 $d > 2$, $\mathbf{y}_\varepsilon(t) \in L^2(\Omega \times \mathbb{R}^d)$ 是方程(1)的解, 其中任意 $T > 0$, 使得 $4T\rho_f < 1$, 假设满足条件 H 时, 存在 $\mathbf{y}_{\text{hom}}(t) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 是如下均匀化方程的解:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{y}_{\text{hom}} = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{y}_{\text{hom}} + \rho \mathbf{A}^2 \mathbf{y}_{\text{hom}}, \\ (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^d, \\ \mathbf{y}_{\text{hom}}(0, x) = \mathbf{y}_0(x), x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (2)$$

这里的 $\rho = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{R(\xi)}{\xi^2} d\xi$, 且满足

$$\|\mathbf{y}_\varepsilon(t) - \mathbf{S}_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega \times \mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon^{\frac{\beta}{2}} \|\mathbf{y}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad (3)$$

$$\|\mathbf{S}_\varepsilon(t) - \mathbf{y}_{\text{hom}}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon^{\gamma \wedge \beta} \|\mathbf{y}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad (4)$$

收稿日期: 2023-08-28.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journal1g.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(11971251); 浙江省自然科学基金(LY20A010010).

第一作者: 丁丽, 硕士研究生, 主要研究方向: 偏微分方程. Email: 3502381628@qq.com

*通信作者: 李志远, 博士/副教授, 主要研究方向: 微分方程中的反问题. E-mail: lizhiyuan@nbu.edu.cn

其中 $\beta=d-2$, $S_\varepsilon(t, x)$ 是 $\mathbf{H}_\varepsilon(t, \xi) = e^{-\frac{1}{2}t(\xi^2 - A^2 p_\varepsilon(\xi))} \hat{\mathbf{y}}_0(\xi)$ 的傅里叶变换, 这里的 $\rho_\varepsilon(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{R(\xi_1 - \varepsilon\xi)}{\xi_1^2} d\xi_1$, $\hat{\mathbf{y}}_0(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi x} \mathbf{y}_0(x) dx$.

1 预备知识与引理

引理 1^[7] 假设 $\hat{R}(\xi)$ 的边界是一个光滑的径向对称的递减函数 $f(r) > 0$, 且 $f(r) \leq \tau_f r^{-n}$, 对于维数 $d > 2$, $0 < n < d-2$, 那么得到以下估计:

$$\int \frac{1}{|\xi_k|^2} \hat{R}(\xi_k - y) d\xi_k \leq \rho_f := c_d \int_0^\infty \frac{1}{|\xi|^2} f(|\xi|) |\xi|^{d-1} d|\xi| \vee \tau_f,$$

其中 $y \in \mathbb{R}^d$, 且

$$\int \frac{1}{|\xi_k|^2} \hat{R}(\xi_k - y) \left(\frac{\varepsilon^2}{|\xi_k - z|^2} \wedge t \right) d\xi_k \leq C \rho_f \begin{cases} \varepsilon^{2-n}, & d > 4-n, \\ \varepsilon^{2-n} |\ln \varepsilon|, & d = 4-n, \\ \varepsilon^{d-2-n}, & 4 < d < 4-n, \end{cases}$$

这里的 C 是独立于 y 和 z 的常数.

引理 2^[7] 给定 $t > 0$, 考虑以下形式的积分:

$$I_{n-1} = \prod_{k=0}^{n-1} \int_0^{t_k(s)} \left(\prod_{k=0}^{n-1} f_k(s_k) \right) \prod_{k=0}^{n-1} ds_k,$$

当 $0 \leq k \leq n$ 时, 有 $0 \leq f_k(s) \leq 1$, 假设

$$\int_0^t f_{n-1}(s_{n-1}) ds_{n-1} \leq h \wedge t,$$

有

$$I_{n-1} \leq (h \wedge t) I_{n-2}.$$

此外, 设 σ 是指标 $0 \leq k \leq n-1$ 的一个排列. 定义 I_{n-1}^σ 为 I_{n-1} , 用 $f_{\sigma(k)}$ 代替 f_k . 使用上面的结果, 对于 $0 \leq k \leq n-2$, 除了 $\sigma(n-1) = K$ 和 $\sigma(K) = n-1$ 之外的所有指标都是固定的, 这使得可以通过对第 K 个变量进行积分来估计 I_{n-1} .

Wick 公式^[12]: 设 $(Z_1, Z_2, \dots, Z_k)$ 是均值为 0 的多元高斯分布, 则

$$\mathbb{E}[Z_1 Z_2 \cdots Z_k] = \sum_P \prod_{\{s, t\} \in P} \mathbb{E}[Z_s Z_t],$$

P 是所有的 $\{1, 2, 3, \dots, k\}$ 两两配对.

注 当 k 为奇数时, 两边都为 0, 且 P 有 $(2k-1)!!$ 种排列方式.

例 $\mathbb{E}[Z_1 Z_2 Z_3 Z_4] = \mathbb{E}[Z_1 Z_2] \mathbb{E}[Z_3 Z_4] + \mathbb{E}[Z_1 Z_3] \times$

$$\mathbb{E}[Z_2 Z_4] + \mathbb{E}[Z_1 Z_4] \mathbb{E}[Z_2 Z_3].$$

2 定理 1 的证明

本节通过 Duhamel 展开构造迭代解的方法证明定理 1. 利用傅里叶变换在 L^2 中的等距性, 可以将研究方程(1)的解 $y_\varepsilon(t)$ 转为研究方程傅里叶变换后的解.

证明 设 $\mathbf{Q}(t, x) = V_\varepsilon(t, x) \mathbf{A} \mathbf{y}_\varepsilon(t, x)$, 通过傅里叶变换可以将方程(1)写为

$$\left(\partial_t + \frac{1}{2} \xi^2 \right) \hat{\mathbf{y}}_\varepsilon = \hat{\mathbf{Q}}(t, \xi) = \hat{V}_\varepsilon * \mathbf{A} \hat{\mathbf{y}}_\varepsilon(t, \xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{V}_\varepsilon(\zeta) \mathbf{A} \hat{\mathbf{y}}_\varepsilon(t, \xi - \zeta) d\zeta, \quad (5)$$

这里的 $\hat{\mathbf{y}}_\varepsilon(0, x) = \hat{\mathbf{y}}_0(x)$, 则方程的解为

$$\hat{\mathbf{y}}_\varepsilon(t, x) = e^{-\frac{1}{2}\xi^2 t} \hat{\mathbf{y}}_0(\xi) + \int_0^t e^{-\frac{1}{2}\xi^2 s} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{V}_\varepsilon(\xi - \xi_1) \times \mathbf{A} \hat{\mathbf{y}}_\varepsilon(t-s, \xi_1) d\xi_1 ds. \quad (6)$$

2.1 Duhamel 展开

解的构造如下:

$$\hat{\mathbf{y}}_\varepsilon(t, \xi) = \sum_{n \geq 0} \hat{\mathbf{y}}_{n, \varepsilon}(t, \xi),$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{n, \varepsilon}(t, \xi_0) = \int_{\mathbb{R}^{nd}} \prod_{k=0}^{n-1} \int_0^{t_k(s)} e^{-\frac{1}{2}\xi_k^2 s_k} e^{-\frac{1}{2}\left(t - \sum_{k=0}^{n-1} s_k\right) \xi_n^2} \times \prod_{k=0}^{n-1} \hat{V}_\varepsilon(\xi_k - \xi_{k+1}) \mathbf{A}^k \hat{\mathbf{y}}_0(\xi_n) d\mathbf{s} d\xi, \quad (7)$$

其中 $\mathbf{s} = (s_0, \dots, s_{n-1})$, $t_k(\mathbf{s}) = t - s_0 - \dots - s_{k-1}$, $t_0(\mathbf{s}) = t$,

$$d\mathbf{s} = \prod_{k=0}^{n-1} ds_k, d\xi = \prod_{k=1}^n d\xi_k.$$

由 $\hat{\mathbf{y}}_{n, \varepsilon}(t, x) = (\hat{u}_{n, \varepsilon}(t, x), \hat{w}_{n, \varepsilon}(t, x))^T$, 构造与式(7)类似,

$$\begin{aligned} \hat{u}_{n, \varepsilon}(t, \xi_0) &= \int_{\mathbb{R}^{nd}} \prod_{k=0}^{n-1} \int_0^{t_k(s)} e^{-\frac{1}{2}\xi_k^2 s_k} e^{-\frac{1}{2}\left(t - \sum_{k=0}^{n-1} s_k\right) \xi_n^2} \times \\ &\quad \prod_{k=0}^{n-1} \hat{V}_\varepsilon(\xi_k - \xi_{k+1}) R_{u, A^n}(\xi_n) d\mathbf{s} d\xi, \\ \hat{w}_{n, \varepsilon}(t, \xi_0) &= \int_{\mathbb{R}^{nd}} \prod_{k=0}^{n-1} \int_0^{t_k(s)} e^{-\frac{1}{2}\xi_k^2 s_k} e^{-\frac{1}{2}\left(t - \sum_{k=0}^{n-1} s_k\right) \xi_n^2} \times \\ &\quad \prod_{k=0}^{n-1} \hat{V}_\varepsilon(\xi_k - \xi_{k+1}) R_{w, A^n}(\xi_n) d\mathbf{s} d\xi, \end{aligned} \quad (8)$$

式中 $R_{u, A^n}(\xi_n) = A_{11}^n \hat{u}_0(\xi_n) + A_{12}^n \hat{w}_0(\xi_n)$, $R_{w, A^n}(\xi_n) = A_{21}^n \hat{u}_0(\xi_n) + A_{22}^n \hat{w}_0(\xi_n)$, 其中 A_{ij}^n 表示 A^n 第 i 行第 j 列的元素.

由式(7)可知, $\mathbb{E}(\hat{\mathbf{y}}_\varepsilon(t, x)) = \mathbb{E}\left(\sum_{n \geq 0} \hat{\mathbf{y}}_{n, \varepsilon}(t, \xi)\right) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}(\hat{\mathbf{y}}_{n, \varepsilon}(t, \xi))$, 定义

$$Y_\varepsilon^n(t, \xi_0) = \int_{\mathbb{R}^{nd}} \prod_{k=0}^{n-1} \int_0^{t_k(s)} e^{-\frac{1}{2} s_k^2} e^{-\frac{1}{2} \left(t - \sum_{k=0}^{n-1} s_k \right) \xi_n^2} \times \\ \mathbb{E} \left[\prod_{k=0}^{n-1} \hat{V}_\varepsilon(\xi_k - \xi_{k+1}) \right] A^n \hat{y}_0(\xi_n) ds d\xi. \quad (9)$$

$\hat{y}_\varepsilon(t, x)$ 的协方差矩阵为

$$\text{var}(\hat{y}_\varepsilon(t, \xi)) = \begin{pmatrix} \text{var}(\hat{u}_\varepsilon) & \text{cov}(\hat{u}_\varepsilon, \hat{w}_\varepsilon) \\ \text{cov}(\hat{w}_\varepsilon, \hat{u}_\varepsilon) & \text{var}(\hat{w}_\varepsilon) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

其中 $\text{var}(\hat{u}_\varepsilon) = \mathbb{E}(\hat{u}_\varepsilon)^2 - \mathbb{E}(\hat{u}_\varepsilon)\mathbb{E}(\hat{u}_\varepsilon)$, $\text{cov}(\hat{u}_\varepsilon, \hat{w}_\varepsilon) = \mathbb{E}(\hat{u}_\varepsilon \hat{w}_\varepsilon) - \mathbb{E}(\hat{u}_\varepsilon)\mathbb{E}(\hat{w}_\varepsilon)$.

由 $\mathbb{E}(\hat{u}_\varepsilon \hat{w}_\varepsilon) = \sum_{n, m > 0} \mathbb{E}\{\hat{u}_{\varepsilon, n}(t, \xi) \overline{\hat{w}_{\varepsilon, m}(t, \xi)}\}$, 定义

$$X_\varepsilon^{n, m}(t, \xi_0, \xi_0) = \mathbb{E}\{\hat{u}_{\varepsilon, n}(t, \xi) \overline{\hat{w}_{\varepsilon, m}(t, \xi)}\} = \\ \int_{\mathbb{R}^{d(n+m)}} \prod_{k=0}^{n-1} \int_0^{t_k(s)} \prod_{l=0}^{m-1} \int_0^{t_l(\tau)} e^{-\frac{1}{2} s_k^2} e^{-\frac{1}{2} \left(t - \sum_{k=0}^{n-1} s_k \right) \xi_n^2} \times \\ e^{-\frac{1}{2} \tau_l^2} e^{-\frac{1}{2} \left(t - \sum_{l=0}^{m-1} \tau_l \right) \xi_m^2} \mathbb{E} \left\{ \prod_{k=0}^{n-1} \prod_{l=0}^{m-1} \hat{V}_\varepsilon(\xi_k - \xi_{k+1}) \times \right. \\ \left. \overline{\hat{V}_\varepsilon(\xi_l - \xi_{l+1})} \right\} R_{u, A^n}(\xi_n) R_{w, A^m}(\xi_m) ds d\tau d\xi d\zeta.$$

引入符号 $s_n(s) = t_n(s) = t - \sum_{k=0}^{n-1} s_k$, $\tau_m(\tau) = t_m(\tau) =$

$t - \sum_{l=0}^{m-1} \tau_l$, 对于 $0 \leq k \leq m$, 令上式中 $\xi_{n+k+1} = \xi_{m-k}$ 和 $s_{n+k+1} = \tau_{m-k}$; 因为 $V_\varepsilon(x)$ 是实值函数, 有

$$X_\varepsilon^{n, m}(t, \xi_0, \xi_{n+m+1}) = \int \prod_{k=0}^{n+m+1} e^{-\frac{1}{2} s_k^2} \times \\ \mathbb{E} \left\{ \prod_{k=0, k \neq n}^{n+m} \hat{V}_\varepsilon(\xi_k - \xi_{k+1}) \right\} R_{u, A^n}(\xi_n) \times \\ R_{w, A^m}(\xi_{n+1}) ds d\xi. \quad (11)$$

2.2 图的求和

在估计高斯过程 $\hat{V}_\varepsilon(x)$ 的矩时, 若 $n+m$ 是奇数, 则期望消失, 除非 $n+m=2\bar{n}$ 是偶数. 定义 $(\xi_k, \xi_{l(k)})$ 是一个配对, $1 \leq k < l(k)$. 根据 Wick 公式, 高斯变量乘积的期望有一个明确的结构^[12], 由于 $\hat{R}(-\xi) = \hat{R}(\xi)$, 可得

$$\mathbb{E} \left\{ \hat{V}_\varepsilon(\xi_{k-1} - \xi_k) \hat{V}_\varepsilon(\xi_{l(k)-1} - \xi_{l(k)}) \right\} = \varepsilon^{d-2\alpha} \hat{R}(\varepsilon(\xi_k - \xi_{k-1})) \delta(\xi_k - \xi_{k-1} + \xi_{l(k)} - \xi_{l(k)-1}),$$

$A_0(\mathfrak{g})$ 为 k 的 $\bar{n}$ 个值的集合, $B_0(\mathfrak{g})$ 为 $l(k)$ 的 $\bar{n}$ 个值的集合, 有

$$\mathbb{E} \left\{ \prod_{k=1, k \neq n+1}^{n+m+1} \hat{V}_\varepsilon(\xi_{k-1} - \xi_k) \right\} = \sum_{\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}} \prod_{k \in A_0(\mathfrak{g})} \varepsilon^{d-2} \hat{R}(\varepsilon(\xi_k - \xi_{k-1})) \delta(\xi_k - \xi_{k-1} + \xi_{l(k)} - \xi_{l(k)-1}).$$

因此, $Y_\varepsilon^n(t, \xi)$ 与 $X_\varepsilon^{n, m}(t, \xi)$ 中有大量的项, 在

每一个配对中, 有 $l = l(k)$, $l(k) > k+1$. $(\xi_k, \xi_{l(k)})$ 组成的配对集合构成了 $\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}$, 将各种配对定义为不同的图, 不同的图在解的极限行为中贡献不同. 定义如下:

(1)交叉图: 如果 $k \leq n$, $l(k) \geq n+2$, 则称这个图有一个交叉对, 用 $\mathfrak{G}_c$ 表示至少有一个交叉对的图的集合.

(2)非交叉图: $\mathfrak{G} \setminus \mathfrak{G}_c = \mathfrak{G}_{nc}$.

(3)简单图: 如果 $l(k) = k+1$, 则称这个图有一个简单对, 用 $\mathfrak{G}_s$ 表示配对都为 (ξ_k, ξ_{k+1}) 的集合.

对 δ 函数的所有参数 $\xi_k - \xi_{k-1} + \xi_{l(k)} - \xi_{l(k)}$ 的 $k \in A_0(\mathfrak{g})$ 求和表明, 最后一个 δ 函数可以在不修改 $Y_\varepsilon^n(t, \xi)$ 中积分的情况下用 $\delta(\xi_0 - \xi_n)$ 代替. 根据以上图的分析, 有

$$Y_\varepsilon^n(t, \xi_0) = A^n \hat{y}_0(\xi_0) \int \prod_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{1}{2} s_k^2} \sum_{\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}} \prod_{k \in A_0(\mathfrak{g})} \varepsilon^{d-2} \hat{R}(\varepsilon(\xi_k - \xi_{k-1})) \delta(\xi_k - \xi_{k-1} + \xi_{l(k)} - \xi_{l(k)-1}) ds d\xi, \quad (12)$$

$$U_\varepsilon^n(t, \xi_0) = R_{u, A^n}(\xi_0) \int \prod_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{1}{2} s_k^2} \sum_{\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}} \prod_{k \in A_0(\mathfrak{g})} \varepsilon^{d-2} \hat{R}(\varepsilon(\xi_k - \xi_{k-1})) \delta(\xi_k - \xi_{k-1} + \xi_{l(k)} - \xi_{l(k)-1}) ds d\xi, \quad (13)$$

$$W_\varepsilon^m(t, \xi_0) = R_{w, A^m}(\xi_0) \int \prod_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{1}{2} s_k^2} \sum_{\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}} \prod_{k \in A_0(\mathfrak{g})} \varepsilon^{d-2} \hat{R}(\varepsilon(\xi_k - \xi_{k-1})) \delta(\xi_k - \xi_{k-1} + \xi_{l(k)} - \xi_{l(k)-1}) ds d\xi. \quad (14)$$

同理可得

$$X_\varepsilon^{n, m}(t, \xi_0, \xi_{n+m+1}) = \int \prod_{k=0}^{n+m+1} e^{-\frac{1}{2} s_k^2} R_{u, A^n}(\xi_n) R_{w, A^m}(\xi_{n+1}) \sum_{\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}} \prod_{k \in A_0(\mathfrak{g})} \varepsilon^{d-2} \hat{R}(\varepsilon(\xi_k - \xi_{k-1})) \delta(\xi_k - \xi_{k-1} + \xi_{l(k)} - \xi_{l(k)-1}) ds d\xi. \quad (15)$$

2.2.1 交叉图分析

交叉图只出现在 $\hat{y}_\varepsilon(t, x)$ 的方差函数中, 定义

$$Z_\varepsilon^{n, m}(t, \xi, \zeta) = \text{cov}(\hat{u}_{\varepsilon, n}(t, \xi), \hat{w}_{\varepsilon, m}(t, \zeta)) = \\ X_\varepsilon^{n, m}(t, \xi, \zeta) - U_\varepsilon^n(t, \xi) W_\varepsilon^m(t, \zeta). \quad (16)$$

由上式可知 $Z_\varepsilon^{n, m}(t, \xi, \zeta)$ 中含有交叉图的和, 则

$$Z_\varepsilon^{n, m}(t, \xi_0, \xi_{n+m+1}) = \sum_{\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}_c} \int \prod_{k=0}^{n+m+1} e^{-\frac{1}{2} s_k^2} R_{u, A^n}(\xi_n) \times \\ R_{w, A^m}(\xi_{n+1}) \prod_{k \in A_0(\mathfrak{g})} \varepsilon^{d-2} \hat{R}(\varepsilon(\xi_k - \xi_{k-1})) \times$$

$$\delta(\xi_k - \xi_{k-1} + \xi_{l(k)} - \xi_{l(k)-1}) d\mathbf{s} d\xi. \quad (17)$$

如果只考虑一个交叉图, 这个交叉图一共有 $M(M \geq 1)$ 个交叉对, 交叉对定义为 $(\xi_{q_m}, \xi_{l(q_m)})$, 则 $Q = \max_m \{q_m\}, 1 \leq m \leq M$.

对所有 $k \leq n$ 的函数中的参数求和, 当 $Q \leq n$ 时, 这些 δ 函数中的最后一个可以被替换为

$$\delta\left(\xi_0 - \xi_n + \sum_{m=1}^M \xi_{q_m} - \xi_{q_m-1}\right) = \delta\left(\xi_Q - \xi_{Q-1} + \xi_0 - \xi_n + \sum_{m=1}^{M-1} \xi_{q_m} - \xi_{q_m-1}\right). \quad (18)$$

当 $Q \leq n$ 时, 将使用上述函数在变量 ξ_Q 中进行积分.

类似地, 通过对所有具有 $k \geq n+2$ 的函数中的参数求和可以得到, 当 $l(q) < n+m+1$ 时, 这些 δ 函数中的最后一个可以替换为

$$\delta\left(\xi_{n+1} - \xi_{n+m+1} + \sum_{m=1}^M \xi_{l(q_m)} - \xi_{l(q_m)-1}\right),$$

利用最后两个独立的 δ 函数, 得到式(17)中函数的乘积涉及以下约束:

$$\delta(\xi_{n+m+1} - \xi_{n+1} + \xi_n - \xi_0). \quad (19)$$

在 $\xi_{n+m+1} = \xi_0$ 处对式(17)中 $|Z_\varepsilon^{n,m}(t, \xi_0, \xi_0)|$ 求值, 并在 $\mathbb{R}^d$ 上对 ξ_0 变量积分, 定义 $A'(\mathbf{g}) = A_0(\mathbf{g}) \setminus \{Q\}$.

对每个 $k \in A'(\mathbf{g}) \cup \{0\}$ 作变量替换 $\xi_k \rightarrow \xi_k / \varepsilon$, 定义

$$\xi_k^\varepsilon = \begin{cases} \xi_k, & k \notin A'(\mathbf{g}) \cup \{0\}, \\ \xi_k / \varepsilon, & k \in A'(\mathbf{g}) \cup \{0\}, \end{cases} \quad (20)$$

此时注意 $\xi_n = \xi_{n+1}$, 因为 $\xi_{n+m+1} = \xi_0$. 由此可以得到

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |Z_\varepsilon^{n,m}(t, \xi_0, \xi_0)| d\xi_0 &\leq \sum_{\mathbf{g} \in \mathfrak{G}_c} \int e^{-\frac{1}{2}(s_0 + s_{n+m+1})\varepsilon^{-2}\xi_0^2} \times \\ &\quad \prod_{k=1}^{n+m} e^{-\frac{1}{2}s_k(\xi_k^\varepsilon)^2} \left| R_{u, A^n}(\xi_n) R_{w, A^m}(\xi_{n+1}) \right|_{k \in A'(\mathbf{g})} \prod \varepsilon^{-2} \times \\ &\quad \hat{R}(\xi_k - \varepsilon \xi_{k-1}^\varepsilon) \delta\left(\frac{\xi_k}{\varepsilon} - \xi_{k-1}^\varepsilon + \xi_{l(k)} - \xi_{l(k)-1}^\varepsilon\right) \times \\ &\quad \varepsilon^{-2} \hat{R}\left(\xi_0 - \varepsilon \xi_n^\varepsilon + \sum_{m=1}^{M-1} \xi_{q_m} - \varepsilon \xi_{q_m-1}^\varepsilon\right) \times \\ &\quad \delta(\xi_Q - \xi_{Q-1} + \xi_{l(Q)} - \xi_{l(Q)-1}) d\mathbf{s} d\xi, \end{aligned} \quad (21)$$

根据引理 2, 有

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |Z_\varepsilon^{n,m}(t, \xi_0, \xi_0)| d\xi_0 &\leq \sum_{\mathbf{g} \in \mathfrak{G}_c} \left(\int d\mathbf{s} \right) \times \\ &\quad \left| R_{u, A^n}(\xi_n) R_{w, A^m}(\xi_{n+1}) \right|_{k \in A'(\mathbf{g})} \prod \varepsilon^{-2} \left(\frac{2\varepsilon^2}{\xi_k^2} \wedge t \right) \times \\ &\quad \hat{R}(\xi_k - \varepsilon \xi_{k-1}^\varepsilon) \delta\left(\frac{\xi_k}{\varepsilon} - \xi_{k-1}^\varepsilon + \xi_{l(k)} - \xi_{l(k)-1}^\varepsilon\right) \times \end{aligned}$$

$$\varepsilon^{-2} \left(\frac{2\varepsilon^2}{\xi_0^2} \wedge t \right)^2 \hat{R}(\xi_0 - \varepsilon \xi_n^\varepsilon + \sum_{m=1}^{M-1} (\xi_{q_m} - \varepsilon \xi_{q_m-1}^\varepsilon)) \delta(\xi_Q - \xi_{Q-1} + \xi_{l(Q)} - \xi_{l(Q)-1}) d\xi,$$

这里, $d\mathbf{s}$ 对应于 $k \notin A'(\mathbf{g}) \cup \{0\} \cup \{n+m+1\}$ 对剩余时间变量 s_k 的积分. 有 $2\bar{n} - (\bar{n}+1) = \bar{n} - 1$ 个这样的变量. 注意最后一个括号平方, 它来自于两个变量 s_0 和 s_{n+m+1} 的时间积分.

当 $Q \leq n$ 时, 定义 k_0 使 $n = l(k_0)$, 定义 k_1 使 $l(k_1) = n+m+1$. 首先假设 $Q < n$ 且 $l(Q) < n+m+1$. 对于每一个 $k \in A'(\mathbf{g}) \setminus (k_0 \cup k_1)$, 使用引理 1 来求估计

$$\int \varepsilon^{-2} \left(\frac{2\varepsilon^2}{\xi_k^2} \wedge t \right) \hat{R}(\xi_k - \varepsilon \xi_{k-1}^\varepsilon) \delta\left(\frac{\xi_k}{\varepsilon} - \xi_{k-1}^\varepsilon + \xi_{l(k)} - \xi_{l(k)-1}^\varepsilon\right) d\xi_k d\xi_{l(k)} \leq C \rho_f, \quad (22)$$

在 $\xi_{l(Q)}$ 变量中的积分是通过使用上面的函数来估计的. $k = k_0 \in A'(\mathbf{g})$ 的函数可以写成 $\delta(\xi_Q - \mu)$ 的形式, 其中 μ 是变量 $\xi_j (j \neq Q)$ 的线性组合, 因此用于在变量 ξ_Q 中积分. $\hat{R}(\xi_{k_0} - \varepsilon \xi_{k_0-1}^\varepsilon)$ 这一项用于在变量 ξ_Q 中积分. 在变量 ξ_0 中的积分是用引理 1 来估计的, 可得

$$\begin{aligned} \int \varepsilon^{-2} \left(\frac{\varepsilon^2}{\xi_0^2} \wedge t \right)^2 \hat{R}\left(\xi_0 - \varepsilon \xi_n^\varepsilon + \sum_{m=1}^{M-1} (\xi_{q_m} - \varepsilon \xi_{q_m-1}^\varepsilon)\right) d\xi_0 &\leq C \rho_f \varepsilon^\beta, \end{aligned}$$

由式(19), 函数 $\delta(\xi_{k_1} - \xi_{k_1-1} - \xi_{n+m+1} - \xi_{n+m})$ 可以看作等于 $\delta(\xi_n - \xi_{n+1})$, 它处理了变量 ξ_{n+1} 的积分. 当 $Q = n$ 或 $l(Q) = n+m+1$ 时, 刚刚描述的估计更容易处理. 余下的项用初始条件对最后一个变量 ξ_n 进行积分的, 得到估计

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |Z_\varepsilon^{n,m}(t, \xi_0, \xi_0)| d\xi_0 &\leq C \sum_{\mathbf{g} \in \mathfrak{G}_c} \left(\int d\mathbf{s} \right) \rho_f^{\bar{n}-1} \times \\ &\quad \left| R_{u, A^n}(\xi_n) R_{w, A^m}(\xi_{n+1}) \right| \rho_f \varepsilon^\beta = C \sum_{\mathbf{g} \in \mathfrak{G}_c} \left(\int d\mathbf{s} \right) \times \\ &\quad \rho_f^{\bar{n}} \varepsilon^\beta \left| R_{u, A^n}(\xi_n) R_{w, A^m}(\xi_{n+1}) \right|, \end{aligned} \quad (23)$$

利用斯特林公式, 可得 $|\mathfrak{G}_c| < \frac{(2\bar{n}-1)!}{2^{n-1}(\bar{n}-1)!}$ 以 $n \left(\frac{2\bar{n}}{e} \right)^{\bar{n}}$ 为界, 仍然需要在时间上求积分. 验证了

$$\prod_{k=0}^{n-1} \int_0^{t_k(s)} ds_0, \dots, ds_{n-1} = \frac{t^n}{n!}, t_k(s) = t - s_0 - \dots - s_{k-1}.$$

设 $\bar{p} = \bar{p}(\mathbf{g})$ 为 $\tilde{s}$ 中 $k \leq n$ 时 s_k 的个数, 设 $\bar{q} = \bar{q}(\mathbf{g})$ 为 s_k 中 $k \geq n+1$ 时 $\tilde{s}$ 的个数, 其中 $\bar{p} + \bar{q} =$

$\bar{n}-1$. 结合上式, 发现

$$\begin{aligned} (\int d\mathbf{s}) &= \frac{t^{\bar{p}} t^{\bar{q}}}{\bar{p}! \bar{q}!} = \frac{t^{\bar{n}-1}}{(\bar{n}-1)!} \left(\frac{\bar{n}-1}{\bar{p}} \right) \leq \\ &t^{\bar{n}-1} \left(\frac{\bar{n}-1}{2e} \right)^{-\bar{n}+1} \leq t^{\bar{n}-1} \bar{n} \left(\frac{\bar{n}}{2e} \right)^{-\bar{n}}, \end{aligned} \quad (24)$$

这里用了斯特林公式. 这表明

$$\rho_f^{\bar{n}} \sum_{\mathbf{g} \in \mathfrak{G}_c} (\int d\mathbf{s}) \leq \frac{\bar{n}}{T} (4\rho_f T)^{\bar{n}}, \quad (25)$$

因此, 需要选择足够小的 T , 使 $4\rho_f T < 1$. 然后, 对于 τ 满足 $4\rho_f T < \tau^2 < 1$, 可得

$$\begin{aligned} \int |Z_{\varepsilon}^{n,m}(t, \xi_0, \xi_0)| d\xi_0 &\leq C\varepsilon^\beta \times \\ &|\tau^n R_{u, A^n}(\xi_n) \tau^m R_{w, A^m}(\xi_{n+1})|, \end{aligned} \quad (26)$$

这里的 C 是一个正的常数, 需要对 n 和 m 求和才能得到估计

$$\begin{aligned} &\left| \mathbb{E} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}_\varepsilon \hat{w}_\varepsilon|(t, \xi) d\xi \right\} - \int_{\mathbb{R}^d} \left| \mathbb{E} \{ \hat{u}_\varepsilon(t, \xi) \} \right| \right. \\ &\quad \left| \mathbb{E} \{ \hat{w}_\varepsilon(t, \xi) \} \right| d\xi \right| \leq \left(\frac{\hat{u}_0(\xi)}{1-\tau A_{11}} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\hat{w}_0(\xi)}{1-\tau A_{12}} \right) \left(\frac{\hat{u}_0(\xi)}{1-\tau A_{21}} + \frac{\hat{w}_0(\xi)}{1-\tau A_{22}} \right) C\varepsilon^\beta. \end{aligned} \quad (27)$$

由于 $\text{cov}(\hat{u}_\varepsilon, \hat{w}_\varepsilon) = \text{cov}(\hat{w}_\varepsilon, \hat{u}_\varepsilon)$, 所以估计相同. 根据上述估计, 可得 $\text{var}(\hat{u}_\varepsilon)$ 与 $\text{var}(\hat{w}_\varepsilon)$,

$$\begin{aligned} &\left| \mathbb{E} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}_\varepsilon|^2(t, \xi) d\xi \right\} - \int_{\mathbb{R}^d} \left| \mathbb{E} \{ \hat{u}_\varepsilon(t, \xi) \} \right|^2 d\xi \right| \leq \\ &\quad \left(\frac{\hat{u}_0(\xi)}{1-\tau A_{11}} + \frac{\hat{w}_0(\xi)}{1-\tau A_{12}} \right)^2 C\varepsilon^\beta, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} &\left| \mathbb{E} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{w}_\varepsilon|^2(t, \xi) d\xi \right\} - \int_{\mathbb{R}^d} \left| \mathbb{E} \{ \hat{w}_\varepsilon(t, \xi) \} \right|^2 d\xi \right| \leq \\ &\quad \left(\frac{\hat{u}_0(\xi)}{1-\tau A_{21}} + \frac{\hat{w}_0(\xi)}{1-\tau A_{22}} \right)^2 C\varepsilon^\beta, \end{aligned} \quad (29)$$

由式(27)~(29), 得

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^d} \|\text{var}(\hat{\mathbf{y}}_\varepsilon(t, \xi))\| d\xi \leq \left\| \left((I - \tau A)^{-1} \hat{\mathbf{y}}_0(\xi) \right) \times \right. \\ &\quad \left. \left((I - \tau A)^{-1} \hat{\mathbf{y}}_0(\xi) \right)^T \right\| C\varepsilon^\beta \leq \\ &\quad C\varepsilon^\beta \left\| (I - \tau A)^{-1} \right\|_2^2 \|\hat{\mathbf{y}}_0(\xi)\|^2 \leq \\ &\quad C\varepsilon^\beta C_\tau \|\hat{\mathbf{y}}_0(\xi)\|^2, \end{aligned} \quad (30)$$

这里的 C_τ 是与 τ 和 A 有关的常数.

2.2.2 非交叉图分析

将上一节获得的估计应用于式(12)中定义的 $\mathbf{Y}_\varepsilon^n(t, \xi)$ 的分析. 目标是证明: 只有简单图 $\mathfrak{G}_s$ 中贡

献了 $O(1)$ 阶项, $\mathfrak{G}_{nc}$ 中的所有图都贡献了 $O(\varepsilon^\beta)$ 阶项. 在定义期望后, 简单图的贡献为

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}_\varepsilon(t, \xi_0) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\mathbf{S}}_\varepsilon^n(t, \xi_0), \\ \tilde{\mathbf{S}}_\varepsilon^n(t, \xi_0) &= A^n \hat{\mathbf{y}}_0(\xi_0) \int \prod_{k=0}^n e^{-\frac{1}{2} s_k \xi_k^2} \prod_{k=0}^{\bar{n}-1} \varepsilon^{d-2} \\ &\quad \hat{R}(\varepsilon(\xi_{2k+1} - \xi_{2k})) \delta(\xi_{2(k+1)} - \xi_{2k}) d\mathbf{s} d\xi. \end{aligned} \quad (31)$$

对于所有的 $k \in A_0(\mathbf{g})$, 在 $\mathbf{Y}_\varepsilon^n(t, \xi)$ 中进行变量替换 $\xi_k \rightarrow \xi_k / \varepsilon$,

$$\xi_k^\varepsilon = \begin{cases} \xi_k, & k \notin A_0(\mathbf{g}), \\ \xi_k / \varepsilon, & k \in A_0(\mathbf{g}), \end{cases} \quad (32)$$

可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_\varepsilon^n(t, \xi) &= A^n \hat{\mathbf{y}}_0(\xi_0) \sum_{\mathbf{g} \in \mathfrak{G}_s} \prod_{k=0}^n e^{-\frac{1}{2} s_k (\xi_k^\varepsilon)^2} \times \\ &\quad \prod_{k \in A_0(\mathbf{g})} \varepsilon^{-2} \hat{R}(\xi_k - \varepsilon \xi_{k-1}^\varepsilon) \times \\ &\quad \delta\left(\frac{\xi_k}{\varepsilon} - \xi_{k-1}^\varepsilon + \xi_{l(k)} - \xi_{l(k)-1}^\varepsilon\right) d\mathbf{s} d\xi, \end{aligned} \quad (33)$$

假设其中一个配对 $k = \kappa$, 有 $l(k) - 1 \geq k$,

$$\begin{aligned} &|A^n \hat{\mathbf{y}}_0(\xi_0)| \int_{k \in A_0(\mathbf{g}) \setminus \kappa} \varepsilon^{-2} \left(\frac{\varepsilon^2}{\xi_k^2} \wedge t \right) \hat{R}(\xi_k - \varepsilon \xi_{k-1}^\varepsilon) \times \\ &\quad \delta\left(\frac{\xi_k}{\varepsilon} - \xi_{k-1}^\varepsilon + \xi_{l(k)} - \xi_{l(k)-1}^\varepsilon\right) \varepsilon^{-2} \left(\frac{\varepsilon^2}{\xi_k^2} \wedge t \right) \times \\ &\quad \left(\frac{\varepsilon^2}{|\xi_k - \varepsilon \xi_{k-1}^\varepsilon - \varepsilon \xi_{l(k)-1}^\varepsilon|^2} \wedge t \right) \hat{R}(\xi_k - \varepsilon \xi_{k-1}^\varepsilon) \times \\ &\quad \delta\left(\frac{\xi_\kappa}{\varepsilon} - \xi_{\kappa-1}^\varepsilon + \xi_{l(\kappa)} - \xi_{l(\kappa)-1}^\varepsilon\right) d\mathbf{s} d\xi \leq \\ &\quad \varepsilon^\beta (\int d\mathbf{s}) \rho_f^{\bar{n}} |A^n \hat{\mathbf{y}}_0(\xi_0)|. \end{aligned}$$

故由上式可得

$$|\mathbf{Y}_\varepsilon^n(t, \xi_0) - \tilde{\mathbf{S}}_\varepsilon^n(t, \xi_0)| \leq |\tau^n A^n \hat{\mathbf{y}}_0(\xi_0)| \varepsilon^\beta, \quad (34)$$

根据 Duhamel 解的构造可知

$$\begin{aligned} &|\mathbb{E} \{ \hat{\mathbf{y}}_\varepsilon \}(t, \xi) - \tilde{\mathbf{S}}_\varepsilon(t, \xi)| \lesssim \\ &\quad (I - \tau A)^{-1} |\hat{\mathbf{y}}_0(\xi)| \varepsilon^\beta, \end{aligned} \quad (35)$$

由式(30)与(35)可得

$$\|\hat{\mathbf{y}}_\varepsilon(t) - \tilde{\mathbf{S}}_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega \times \mathbb{R}^d)} \lesssim \varepsilon^{\frac{\beta}{2}} \|\hat{\mathbf{y}}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \quad (36)$$

2.2.3 简单图分析

$\mathbf{y}_\varepsilon$ 的均匀化理论: 由于 $\tilde{\mathbf{S}}_\varepsilon(t, \xi)$ 的定义中只保留了简单图, 因此只要简单地假设平均场近似 $\mathbb{E} \{ \hat{\mathcal{V}}_\varepsilon \hat{\mathcal{V}}_\varepsilon \} \sim \mathbb{E} \{ \hat{\mathcal{V}}_\varepsilon \} \mathbb{E} \{ \hat{\mathcal{V}}_\varepsilon \}$, 因为 Duhamel 展开一

致, 就可以从 $\hat{y}_\varepsilon$ 的定义中得到它所满足的方程. 因此, 可以发现 $\tilde{\mathcal{S}}_\varepsilon(t, \xi)$ 是以下积分方程的解:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}}_\varepsilon(t, \xi) = & e^{-\frac{1}{2}t\xi^2} \hat{y}_0(\xi) + \int_0^t e^{-\frac{1}{2}\xi^2 s} \int_0^{t-s} e^{-\frac{1}{2}\xi_1^2 s_1} \times \\ & \int \varepsilon^{d-2} \hat{R}(\varepsilon(\xi_1 - \xi)) A^2 \mathcal{S}_\varepsilon(t-s-s_1, \xi) \times \\ & d\xi_1 ds ds_1 = e^{-\frac{1}{2}t\xi^2} \hat{y}_0(\xi) + \int_0^t \int_0^v e^{-\frac{1}{2}\xi^2(v-s_1)} \times \\ & e^{-\frac{1}{2}\xi_1^2 s_1} \varepsilon^{d-2} \int \hat{R}(\varepsilon(\xi_1 - \xi)) A^2 \mathcal{S}_\varepsilon(t-v, \xi) \times \\ & d\xi_1 ds_1 dv = e^{-\frac{1}{2}t\xi^2} \hat{y}_0(\xi) + \int_0^t \int_0^v e^{-\frac{1}{2}\xi^2(v-\varepsilon^2 s_1)} \times \\ & e^{-\frac{1}{2}\xi_1^2 s_1} \int \hat{R}(\xi_1 - \varepsilon\xi) d\xi_1 ds_1 A^2 \mathcal{S}_\varepsilon(t-v, \xi) dv = \\ & e^{-\frac{1}{2}t\xi^2} \hat{y}_0(\xi) + A_\varepsilon \tilde{\mathcal{S}}_\varepsilon(t, \xi). \end{aligned} \quad (37)$$

这里 $v = s + s_1$, 对上式中最后一个积分进行变量替换, $\varepsilon\xi_1 \rightarrow \xi_1, \varepsilon^2 s_1 \rightarrow s_1$. A_ε 定义为 $A_\varepsilon = B_\varepsilon + E_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} A_\varepsilon U(t, \xi) = & \rho_\varepsilon \int_0^t e^{-\frac{1}{2}\xi^2 v} A^2 U(t-v, \xi) dv + \\ & E_\varepsilon U(t, \xi). \end{aligned} \quad (38)$$

引理 3 设 $\xi \in \mathbb{R}^d$ 和 $f(r)$ 如引理 1 中. 定义的算子 E_ε 在 $(0, T)$ 上连续函数的 Banach 空间中是有界的. 此时有

$$E_\varepsilon \mathcal{L}(C(0, T)) \lesssim \varepsilon^{\beta-n}. \quad (39)$$

证明可见文献[7]中引理 3.1. 算子 A_ε 可以写成

$$A_\varepsilon U(t, \xi) = \int_0^t \varphi_\varepsilon(s, \xi) U(t-s\xi) ds,$$

式中 $\varphi_\varepsilon(s, \xi)$ 均匀有界于 s, ξ, ε 乘以常数 φ_∞ . 方程为

$$(I - A_\varepsilon)U(t, \xi) = M(t, \xi),$$

存在一个由 Duhamel 展开给出的唯一(根据 Gronwall 引理)的解, 并由

$$|U(t, \xi)| \leq \|M\|_\infty e^{t\varphi_\infty},$$

根据式(38)定义 $B_\varepsilon = A_\varepsilon - E_\varepsilon$. 验证了 $\tilde{H}_\varepsilon(t, \xi) = e^{-\frac{1}{2}t(\xi^2 - A^2 \rho_\varepsilon(\xi))} \hat{y}_0(\xi)$ 是以下方程的解:

$$(I - B_\varepsilon)\tilde{H}_\varepsilon = e^{-\frac{1}{2}t\xi^2} \hat{y}_0(\xi),$$

因此, 对于低频率, 解可能随时间呈指数增长. 误差 $V_\varepsilon(t, \xi) = (\tilde{\mathcal{S}}_\varepsilon(t, \xi) - \tilde{H}_\varepsilon(t, \xi))$ 是以下方程的解:

$$(I - A_\varepsilon)V_\varepsilon = E_\varepsilon \tilde{H}_\varepsilon(t, \xi), \quad (40)$$

所以在有限的时间间隔内(常数随时间呈指数增长, 但不依赖于 ξ), 可得

$$|\tilde{\mathcal{S}}_\varepsilon(t, \xi) - \tilde{H}_\varepsilon(t, \xi)| = |V_\varepsilon(t, \xi)| \lesssim \varepsilon^\beta |\hat{y}_0(\xi)|. \quad (41)$$

将上述不等式与式(36)结合得到式(3)中的估计值. 由此得到 $\mathbb{E}\{\hat{y}_\varepsilon(t, \xi)\}$ 由下式给出:

$$e^{-\frac{1}{2}t(\xi^2 - A^2 \rho_\varepsilon(\xi))} \hat{y}_0(\xi).$$

还需要分析上述项的极限, 从而得出误差 $\rho_\varepsilon(\xi) - \rho$, 这取决于 $\hat{R}(\xi)$ 的正则性. 对于 $\gamma = 2$ 的 $C^2(\mathbb{R}^d)$ 类的 $\hat{R}(\xi)$, 有

$$\left| e^{-\frac{1}{2}t(\xi^2 - A^2 \rho_\varepsilon(\xi))} - e^{-\frac{1}{2}t(\xi^2 - A^2 \rho)} \right| \leq t e^{Ct} e^{-\frac{1}{2}\xi^2 t} \times$$

$$A^2 |\rho_\varepsilon(\xi) - \rho| \lesssim e^{Ct} e^{-\frac{1}{2}\xi^2 t} A^2 \varepsilon^2 t \xi^2. \quad (42)$$

此时, 可以用 $\hat{R}(-\xi) = \hat{R}(\xi)$ 和 $\nabla \hat{R}(0) = 0$ 得到泰勒展开中的一阶项为 0, 从而得到二阶精度. 对于 $0 < \gamma < 2$ 的 $C^\gamma(\mathbb{R}^d)$ 类的 $\hat{R}(\xi)$, 通过插值得到

$$\left| e^{-\frac{1}{2}t(\xi^2 - A^2 \rho_\varepsilon(\xi))} - e^{-\frac{1}{2}t(\xi^2 - A^2 \rho)} \right| \lesssim e^{Ct} e^{-\frac{1}{2}\xi^2 t} A^2 \varepsilon^\gamma t \xi^\gamma, \quad (43)$$

当 $2 \geq \gamma$ 时, 上项在 ξ 与 t 上一致地以 $O(\varepsilon^\gamma)$ 为界. 对于式(31)中定义的简单图的求和, 根据式(41), 可以将上述结果改写为

$$|\tilde{\mathcal{S}}_\varepsilon(t, \xi) - \hat{y}_{\text{hom}}(t, \xi)| \lesssim \varepsilon^{\gamma \wedge \beta} A^2 |\hat{y}_0(\xi)|,$$

$$\hat{y}_{\text{hom}}(t, \xi) = e^{-\frac{1}{2}(\xi^2 - A^2 \rho)t} \hat{y}_0(\xi),$$

其中 $t \in (0, T)$ 和 $\xi \in \mathbb{R}^d$ 在时间上是一致有界的. 由此, 可推导出式(4), 结合式(35)从而得出定理 1.

参考文献:

- [1] ALLAIRE G. Homogenization and two-scale convergence[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1992, 23(6): 1482-1518.
- [2] YAO Z. Homogenization of some linear and semilinear Schrödinger equations with real potential[J]. Acta Mathematica Scientia, 2001, 21(1):137-144.
- [3] HAIRER M. A theory of regularity structures[J]. Inventiones Mathematicae, 2014, 198(2):269-504.
- [4] KEERTHIYIL N A, KASINATHAN S. Homogenization of the heat equation in a noncylindrical domain with randomly oscillating boundary[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2022, 45(10):6435-6458.
- [5] WILLIAM C. Quantitative stochastic homogenization of the G equation[J]. Probability Theory and Related Fields,

- 2022, 186(1/2):493-520.
- [6] DONG R, LI D S, ZHANG H L. Uniform Lipschitz estimates of homogenization of elliptic systems in divergence form with Dini conditions[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, 2021, 37(1):48-68.
- [7] BAL G. Homogenization with large spatial random potential[J]. Multiscale Modeling & Simulation, 2010, 8(4):1484-1510.
- [8] BAL G. Convergence to homogenized or stochastic partial differential equations[J]. Applied Mathematics Research Express, 2011, 2011(2):215-241.
- [9] GU Y, BAL G. Homogenization of parabolic equations with large time-dependent random potential[J]. Stochastic Processes and Their Applications, 2015, 125(1):91-115.
- [10] GU Y, BAL G. Weak convergence approach for parabolic equations with large, highly oscillatory, random potential [J]. Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques, 2016, 52(1):261-285.
- [11] GU Y. Gaussian fluctuations from the 2D KPZ equation [J]. Stochastics and Partial Differential Equations: Analysis and Computations, 2020, 8(1):150-185.
- [12] WICK G C. The evaluation of the collision matrix[J]. Physical Review, 1950, 80(2):268-272.
- [13] CHEN T. Localization lengths and Boltzmann limit for the Anderson model at small disorders in dimension 3[J]. Journal of Statistical Physics, 2005, 120(1):279-337.
- [14] ERDŐS L, YAU H T. Linear Boltzmann equation as the weak coupling limit of a random Schrödinger equation[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2000, 53(6):667-735.
- [15] LUKKARINEN J, SPOHN H. Kinetic limit for wave propagation in a random medium[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 2007, 183(1):93-162.

Homogenization of a class of stochastic systems of partial differential equations

DING Li, LI Zhiyuan

(School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: The homogenization problem of a class of stochastic partial differential equations is studied, $\partial_t \mathbf{y}_\varepsilon(t, x) = \Delta \mathbf{y}_\varepsilon(t, x) / 2 + V_\varepsilon(x) \mathbf{A} \mathbf{y}_\varepsilon(t, x)$, where $d > 2$, $(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^d$. Here $\mathbf{y}_\varepsilon(t, x) = (u_\varepsilon(t, x), w_\varepsilon(t, x))^T$, $V_\varepsilon(x)$ is a Gaussian process with scale, in the case that its correlation function satisfies certain integrability conditions, Duhamel (iterative) expansion and Wick's theorem can be used to give the homogenizing convergence of the above equation.

Key words: Duhamel expansion; Wick's theorem; homogenization theory; Gaussian process

(责任编辑 韩 超)