

DOI: 10.20098/j.cnki.1001-5132.2023.1113

一类基于观测器的随机端口 Hamilton 系统的输出调节

王飞飞, 徐松*

(宁波大学 数学与统计学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 研究一类含匹配干扰的随机端口 Hamilton 系统的输出调节问题, 提出了一种基于观测器的输出调节方法. 首先, 利用随机端口 Hamilton 系统的耗散结构和内模原理, 设计基于观测器的调节器, 保证闭环系统依概率渐近稳定且跟踪误差渐近收敛. 在此基础上, 对同时含匹配干扰和外部干扰的随机端口 Hamilton 系统, 给出基于观测器的鲁棒调节器. 这些输出调节方法能保证随机端口 Hamilton 系统的耗散结构, 将系统的输出调节问题转为稳定性问题, 从而避免求解调节器方程及 Hamilton-Jacobi-Isacs 不等式. 数值结果表明这些输出调节方法是有效的.

关键词: 随机端口 Hamilton 系统; 输出调节; 稳定性; 内模原理

中图分类号: O211.9

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2024) 03-0036-08

广义 Hamilton 系统是一类广泛存在于力学、物理学和生命科学等领域的动态系统. 作为一类重要的非线性系统, 广义 Hamilton 系统结构清晰, 既有能量的产生, 又有能量的耗散, 还有与外部环境的能量交换. 特别地, 在一定条件下, Hamilton 函数可以作为系统的 Lyapunov 函数, 这使得 Hamilton 系统方法在众多控制问题中表现出了很大的优越性. 目前, 对广义 Hamilton 控制系统的研究主要集中在 Hamilton 实现、Hamilton 系统的控制设计以及应用等方面^[1-5].

在实际控制系统中, 系统受随机因素的影响不可避免, 若处理不当, 可能影响系统的控制性能和稳定性. 近年来, 随机控制系统的研究引起了广泛的关注. 作为广义 Hamilton 系统的推广, 随机 Hamilton 系统的控制设计问题自然吸引了众多学者的兴趣^[6-10]. 文献[6]介绍了随机端口 Hamilton 系统的定义, 展示了如何用 Stratonovich 或 Itô 积分等价地表示随机端口 Hamilton 系统. 文献[7]将随机端口 Hamilton 系统扩展为输入扰动的随机端口 Hamilton 系统, 并提出一种基于无源性的控制器. 文献[8]提出一个基于能量的静态和动态控制方法,

研究了随机 Hamilton 系统的稳定性. 文献[9]基于随机端口 Hamilton 系统模型, 给出了在一类坐标变换下保持随机端口 Hamilton 系统结构的一个充要条件. 文献[10]基于随机不确定非线性系统动态模型, 研究了车摆系统在外随机激励与不确定扰动同时作用下的干扰抑制问题.

一般控制系统有三大基本问题, 即稳定性分析、镇定和输出调节. 输出调节问题不仅要保证闭环系统的稳定性(即解决稳定性分析和镇定问题), 而且要使得闭环系统的输出能渐近跟踪参考输入且渐近抑制干扰^[11]. 所以, 输出调节问题更有挑战性和实用性, 一直是控制理论与应用中的热点和难点. 目前, 针对广义 Hamilton 系统的输出调节问题已有一些研究结果. 文献[12]根据非线性输出调节理论设计了由两个子控制器并联的调节器: 一个内模单元和一个调节器, 解决了端口受控 Hamilton 系统的输出反馈调节问题. 文献[13]提出了一种简单的、满足条件的最小阶控制器结构, 给出了一种无穷维 Hamilton 系统的鲁棒输出调节方法. 但是, 上述研究没有考虑到系统受随机干扰因素的影响.

收稿日期: 2023-11-07.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journalg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金数学天元基金(12226510).

第一作者: 王飞飞, 硕士研究生, 主要研究方向: 非线性控制、随机控制. E-mail: 2111071037@nbu.edu.cn

*通信作者: 徐松, 教授, 主要研究方向: 非线性控制、随机控制. E-mail: xusong@nbu.edu.cn

最近, 文献[14]基于 Hamilton 系统的耗散结构和能量的控制方案, 利用状态反馈方法研究了带有正弦扰动的随机端口 Hamilton 系统的输出调节问题. 由于控制系统的状态变量并不总是可测的, 基于状态反馈的控制方法并不适用于所有控制系统, 而基于观测器的控制方法可以有效避免这一缺陷. 但截至目前, 尚未见到有关基于观测器的随机端口 Hamilton 系统的输出调节问题的研究文献.

鉴于此, 本文基于观测器方法和内模原理, 在文献[15]的基础上, 研究了一类含匹配干扰的随机端口 Hamilton 系统的输出调节问题.

符号: $\mathbb{R}^n$ 表示实 n 维向量, $\mathbb{R}^{n \times m}$ 表示 $n \times m$ 实矩阵集, $R > 0 (R \geq 0)$ 表示正定矩阵(半正定矩阵), $\|\cdot\|$ 表示欧几里得范数且 $\|x\|_A^2 = x^T A x$.

1 问题描述

考虑下面由 Itô 随机微分方程所描述的含匹配干扰的随机端口 Hamilton 系统:

$$\begin{cases} dx(t) = \left([J(x(t)) - R(x(t))] \frac{\partial H}{\partial x}(x(t)) + \right. \\ \quad \left. g(x(t))[u(t) - v(t)] \right) dt + g_\omega(x(t)) d\omega(t), \\ y(t) = g^T(x(t)) \frac{\partial H}{\partial x}(x(t)), \end{cases} \quad (1)$$

式中: 系统的状态 $x(t) \in \mathbb{R}^n$; 控制输入 $u(t) \in \mathbb{R}^m$; 控制输出 $y(t) \in \mathbb{R}^m$; $\omega(t) \in \mathbb{R}^r$ 为定义在完备空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 上的独立标准的维纳过程, Ω 为样本空间, $\mathcal{F}$ 表示 σ -域流, $\mathcal{P}$ 为概率测度; $J(x(t)) = -J^T(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$; $0 \leq R(x(t)) = -R^T(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$; Hamilton 函数 $H(x(t))$ 是二阶可微的且 $H(0) = 0$; $g(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 是连续且列满秩的; $g_\omega(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times r}$ 是连续的且 $g_\omega(0) = 0$; 匹配干扰 $v(t) \in \mathbb{R}^n$ 由如下形式的外部系统产生:

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t) = A \nabla H_{\text{ex}}, \\ v(t) = g_{\text{as}}^T \nabla H_{\text{ex}}, \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\eta(t) \in \mathbb{R}^{2k}$ 是外部系统的状态, 常数矩阵 $A = \text{diag}\{A_1, A_2, \dots, A_k\} \in \mathbb{R}^{2k \times 2k}$, $\forall i = 1, 2, \dots, k$, $A_i = \begin{pmatrix} 0 & -\psi_i \\ \psi_i & 0 \end{pmatrix}$, $\psi_i > 0$, $g_{\text{as}} \in \mathbb{R}^{n \times 2k}$ 是常数矩阵, $H_{\text{ex}} = \|\eta(t)\|_Q^2 / 2$.

随机端口 Hamilton 系统(1)的输出调节问题描述如下: 寻找一个基于观测器的调节器

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = \alpha(x(t), \xi(t)), \\ u(t) = \beta(x(t), \xi(t)), \end{cases} \quad (3)$$

使得闭环系统在平衡点 x_e 处局部依概率渐近稳定, 控制输出渐近追踪干扰信号且抑制干扰.

引理 1^[16] 考虑随机非线性系统

$$\begin{cases} dx(t) = f(x(t))dt + g_\omega(x(t))d\omega(t), \\ y(t) = h(x(t)), \end{cases} \quad (4)$$

其中系统状态 $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $f(x(t)) \in \mathbb{R}^n$, $g_\omega(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $h(x(t)) \in \mathbb{R}^m$ 都是充分可微的且 $f(0) = 0$, $g_\omega(0) = 0$, $h(0) = 0$. 若存在正定函数 $V(x) \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ 且 $\mathcal{L}V(x) \leq 0$, 则系统(4)在平衡点 x_e 处局部依概率 Lyapunov 稳定, 即 $\forall \varepsilon > 0$ 且 $\rho \in (0, 1)$, $\exists \delta = \delta(\rho, \varepsilon) > 0$, 使得 $\forall x_0 \in U(0, \delta) \subset \mathcal{D}$, 有 $\mathcal{P}\left(\sup_{t \geq t_0} \|x(t)\| > \varepsilon\right) \leq \rho$; 若 $\mathcal{L}V(x) \leq 0$ 且 $\{x \in \mathcal{D} | \mathcal{L}V(x) = 0\} = \{0\}$, 则系统(4)局部依概率渐近稳定, 即 $\exists \delta > 0$, 使得 $\forall x_0 \in U(0, \delta) \subset \mathcal{D}$, 有 $\lim_{x_0 \rightarrow 0} \mathcal{P}\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0\right) = 1$. 其中, 沿系统(4)的轨线微分算子可表示为

$$\mathcal{L}(\cdot) \triangleq \left(\frac{\partial(\cdot)}{\partial x} \right)^T f(x) + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ g_\omega^T(x) \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} g_\omega(x) \right\}, \quad (5)$$

$\text{tr}\{\cdot\}$ 是对角矩阵的迹.

定义 1^[17] 考虑随机非线性系统

$$\begin{cases} dx(t) = f(x(t))dt + g_{v_\alpha}(x(t))v_\alpha(t)dt + \\ \quad g_\omega(x(t))d\omega(t), \\ z(t) = h_1(x(t)), \end{cases} \quad (6)$$

式中: $g_{v_\alpha}(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times l}$ 为矩阵值函数; $v_\alpha(t) \in \mathbb{R}^l$ 为外部干扰信号, $\forall t > 0$, 满足 $E\left(\int_0^t \|v_\alpha(s)\|^2 ds\right) < \infty$, $E(\cdot)$ 表示在概率测度 $\mathcal{P}$ 下的期望; $z(t) \in \mathbb{R}^r$ 为罚信号; $h_1(x(t)) \in \mathbb{R}^m$ 是充分可微的且 $h_1(0) = 0$; 其余变量如系统(4)中所定义. 对于给定的 $\gamma > 0$, $v_\alpha(t) \in L_2[0, T]$, 若系统(6)满足

$$E\left\{\int_0^T \|z(t)\|^2 dt\right\} \leq E\left\{\gamma^2 \int_0^t \|v_\alpha(s)\|^2 ds\right\},$$

则称系统(6)的 L_2 增益不大于 γ .

2 主要结果

2.1 随机端口 Hamilton 系统的输出调节

考虑随机端口 Hamilton 系统(1)的输出调节问题, 其中匹配干扰 $v(t)$ 由外部系统(2)产生.

为此, 先构造外部系统状态 $\eta(t)$ 的观测器:

$$\dot{\hat{\eta}}(t) = \xi(t) - \Phi K_v x(t), \quad (7)$$

其中 $\xi(t) \in \mathbb{R}^{2k}$ 表示内模的状态, $\Phi = g_{as} g^T(x(t))$, K_v 为调节参数.

接下来, 最关键的步骤是设计内模单元 $\dot{\xi}(t) = \alpha(x(t), \xi(t))$, 使得系统(1)和(2)能保持随机端口 Hamilton 系统的耗散结构. 令

$$u(t) = g_{as}^T Q \hat{\eta}(t) - g^T(x(t)) \frac{\partial H}{\partial x}(x(t)), \quad (8)$$

则系统(1)的第一个方程可表示为

$$\begin{aligned} dx(t) = & [J(x(t)) - R(x(t))] \frac{\partial H}{\partial x}(x(t)) dt + \\ & \Phi^T Q e(t) dt + g_{v_a}(x(t)) v_a(t) dt + \\ & g_{\omega}(x(t)) d\omega(t), \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $e(t) = \eta(t) - \hat{\eta}(t)$ 是外部系统的状态估计误差.

同时, 设计内模 $\dot{\xi}(t)$ 如下:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) = & A Q \hat{\eta}(t) - \Phi \frac{\partial H}{\partial x}(x(t)) + \Phi K_v [J(x(t)) - \\ & R(x(t))] \frac{\partial H}{\partial x}(x(t)) + \frac{dg^T(x(t))}{dt} K_v x(t) + \\ & \frac{1}{2} \Phi K_v [g(x(t)) [r^T(x(t)) r(x(t)) + \\ & I_m / \gamma^2] g^T(x(t))] \frac{\partial H}{\partial x}(x(t)), \end{aligned} \quad (10)$$

则

$$\begin{aligned} d\hat{\eta}(t) = & A Q \hat{\eta}(t) dt - d\xi(t) + d(\Phi K_v x(t)) = \\ & A Q \hat{\eta}(t) dt - \Phi K_v \Phi^T Q e(t) dt + \\ & \Phi K_v g_{\omega}(x(t)) d\omega(t) + \Phi \frac{\partial H}{\partial x}(x(t)) dt. \end{aligned} \quad (11)$$

令 $X(t) = (x^T(t), e^T(t))^T$, $\bar{A} = A - \Phi K_v \Phi^T$, 结合式(9)和(11), 得

$$\begin{cases} dX(t) = [J(X(t)) - R(X(t))] \frac{\partial H}{\partial X}(X(t)) dt + \\ \quad G_{\omega}(X(t)) d\omega(t), \\ y(t) = G^T(X(t)) \frac{\partial H}{\partial X}(X(t)), \end{cases} \quad (12)$$

其中

$$H(X(t)) = H(x(t)) + \frac{1}{2} \|e(t)\|_Q^2,$$

$$R(X(t)) = \text{diag} \left\{ R(x(t)) + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} g(x(t)) g^T(x(t)), \bar{A} \right\},$$

$$J(X(t)) = \begin{pmatrix} J(x(t)) & -\Phi^T \\ \Phi^T & 0_{m \times m} \end{pmatrix},$$

$$G_{\omega}(X(t)) = \begin{pmatrix} I_{m \times m} \\ \Phi K_v \end{pmatrix} g_{\omega}(x(t)),$$

$$\bar{G}(X(t)) = \begin{pmatrix} (r(x(t)) g(x(t)))^T \\ 0_{m \times m} \end{pmatrix}.$$

定理 1 假设 $\bar{A}$ 是 Hurwitz 矩阵, 且不等式

$$\begin{aligned} \lambda(x) = & \left(\frac{\partial H}{\partial x}(x) \right)^T R(x) \left(\frac{\partial H}{\partial x}(x) \right) - \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ g_{\omega}^T(x) \times \right. \\ & \left. \left[\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x) + (\Phi K_v)(\Phi K_v)^T \right] g_{\omega}(x) \right\} \geq 0 \end{aligned} \quad (13)$$

成立, 则系统(1)和(2)的输出调节问题可由下列调节器完成:

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = A Q \hat{\eta}(t) - \Phi \frac{\partial H}{\partial x}(x(t)) + \\ \quad \Phi K_v [J(x(t)) - R(x(t))] \frac{\partial H}{\partial x}(x(t)) + \\ \quad \frac{dg^T(x(t))}{dt} K_v x(t), \\ \hat{\eta}(t) = \xi(t) - \Phi K_v x(t), \\ u(t) = g_{as}^T Q \hat{\eta}(t) - g^T(x(t)) \frac{\partial H}{\partial x}(x(t)), \end{cases} \quad (14)$$

即系统(12)在平衡点处是局部依概率渐近稳定的, 并且误差 $e(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$.

证明 首先, 选择 $H(X)$ 为闭环系统的 Lyapunov 函数. 由于 $\lambda(x) \geq 0$, $K_v \geq 0$, $\bar{A}$ 是 Hurwitz 矩阵, 沿系统(12)的轨线有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}H(X) = & \left(\frac{\partial H}{\partial X}(X) \right)^T [J(X) - R(X)] \left(\frac{\partial H}{\partial X}(X) \right) + \\ & \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ G_{\omega}^T(X) \frac{\partial^2 H}{\partial X^2}(X) G_{\omega}(X) \right\} = \\ & - \left(\frac{\partial H}{\partial X}(X) \right)^T [R(x) + g(x) g^T(x)] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial H}{\partial X}(X) \right) - (Qe)^T \bar{A}(Qe) - \frac{1}{2} \times \\ & \text{tr} \left\{ g_\omega^T(x) \left[\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x) + (\Phi K_v)(\Phi K_v)^T \right] g_\omega(x) \right\} = \\ & -\lambda(x) - \left(\frac{\partial H}{\partial x}(x) \right)^T [g(x)g^T(x)] \left(\frac{\partial H}{\partial x}(x) \right) + \\ & (Qe)^T \bar{A}(Qe) \leq 0, \end{aligned}$$

因此, 闭环系统依概率收敛于包含在下列集合的最大不变集上:

$$\begin{aligned} S = \{X(t): \mathcal{L}H(X) = 0\} = & \left\{ \begin{bmatrix} x^T(t), e^T(t) \end{bmatrix}: \right. \\ & \left. g^T(x) \frac{\partial H}{\partial x}(x) = 0, e(t) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

因为 $g(x)$ 是列满秩的且 Hess 矩阵 $H(0) > 0$, 所以 $y(t) = 0$, 得

$$\mathcal{P} = \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, x(0) = x_0 \right\} = 1.$$

由引理1可知, 闭环系统在平衡点处局部依概率渐近稳定, 并且误差 $e(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$, 证毕.

注1 定理1的结果包含了确定性 Hamilton 系统的输出调节问题和随机端口 Hamilton 系统的稳定性问题. 在系统(1)中, 若 $g_\omega(x(t)) = 0$, 则调节器(14)解决了确定性 Hamilton 系统的输出调节问题; 若 $v(t) = 0$, 即系统(1)中的正弦干扰消失, 则随机端口 Hamilton 系统的稳定性可由以下控制器完成:

$$u(t) = -g^T(x(t)) \frac{\partial H}{\partial x}(x(t)). \quad (15)$$

2.2 随机端口 Hamilton 系统的鲁棒输出调节

本小节研究同时含匹配干扰和外部干扰的随机端口 Hamilton 系统的鲁棒输出调节问题.

考虑如下含正弦干扰和外部干扰的随机端口 Hamilton 系统:

$$\begin{cases} dx(t) = \left[\begin{bmatrix} J(x(t)) - R(x(t)) \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x}(x(t)) + \right. \\ \quad \left. g(x(t)) [u(t) - v(t)] \right] dt + \\ \quad g_{v_\alpha}(x(t)) v_\alpha(t) dt + g_\omega(x(t)) d\omega(t), \\ y(t) = g_{v_\alpha}^T(x(t)) \frac{\partial H}{\partial x}(x(t)), \\ z(t) = r(x(t)) g^T(x(t)) \frac{\partial H}{\partial x}(x(t)), \end{cases} \quad (16)$$

式中: $g_{v_\alpha}(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times l}$ 为列满秩的矩阵值函数; $v_\alpha(t) \in \mathbb{R}^l$ 为外部干扰信号; $z(t) \in \mathbb{R}^r$ 为罚信号; $r(x(t)) \in \mathbb{R}^{r \times m}$ 为列满秩的权重矩阵; 其余变量如系统(1)所定义.

根据2.1节基于观测器的调节器设计思路, 给出如下形式的鲁棒调节器:

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = A Q \hat{\eta}(t) - \Phi \frac{\partial H}{\partial x}(x(t)) + \Phi K_v [J(x(t)) - \\ \quad R(x(t))] \frac{\partial H}{\partial x}(x(t)) + \frac{dg^T(x(t))}{dt} K_v x(t) + \\ \quad \frac{1}{2} \Phi K_v (g(x(t)) [r^T(x(t)) r(x(t)) + I_m / \gamma^2] \times \\ \quad g^T(x(t))) \frac{\partial H}{\partial x}(x(t)), \\ \hat{\eta}(t) = \xi(t) - \Phi K_v x(t), \\ u(t) = g_{as}^T Q \hat{\eta}(t) - \frac{1}{2} \left[r^T(x(t)) r(x(t)) + \frac{1}{\gamma^2} I_m \right] \times \\ \quad g^T(x(t)) \frac{\partial H}{\partial x}(x(t)), \end{cases} \quad (17)$$

调节器(17)和(14)有着相似的结构, 增加的部分 $[r^T(x(t)) r(x(t)) + I_m / \gamma^2] / 2$ 用于抑制外部干扰 $v_\alpha(t)$. 将式(17)代入系统(16)和(2), 则系统(16)的第一个方程可写为

$$\begin{aligned} dx(t) = & \left[\begin{bmatrix} J(x(t)) - R(x(t)) - \frac{1}{2} g(x(t)) \times \right. \\ & \left. \left[r^T(x(t)) r(x(t)) + \frac{1}{\gamma^2} I_m \right] g^T(x(t)) \right] \right] \times \\ & \frac{\partial H}{\partial x}(x(t)) dt - \Phi^T Q e(t) dt + \\ & g_{v_\alpha}(x(t)) v_\alpha(t) dt + g_\omega(x(t)) d\omega(t), \end{aligned} \quad (18)$$

其中 $e(t) = \eta(t) - \hat{\eta}(t)$ 是外部系统的状态估计误差, 且

$$\begin{aligned} de(t) = & A Q \eta(t) dt - d\xi(t) + d(\Phi K_v x(t)) = \\ & A Q e(t) dt - \Phi K_v \Phi^T Q e(t) dt + \\ & \Phi K_v g_{v_\alpha}(x(t)) v_\alpha(t) dt + \Phi \frac{\partial H}{\partial x}(x(t)) dt + \\ & \Phi K_v g_\omega(x(t)) d\omega(t). \end{aligned} \quad (19)$$

令 $X(t) = (x^T(t), e^T(t))^T$, $\bar{A} = A - \Phi K_v \Phi^T$, 结合式(18)和(19), 得

$$\begin{cases} d\mathbf{X}(t) = [\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{X}(t)) - \bar{\mathbf{R}}(\mathbf{X}(t))] \frac{\partial \bar{\mathbf{H}}}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}(t)) dt + \\ \quad \mathbf{G}_{v_\alpha}(\mathbf{X}(t)) \mathbf{v}_\alpha(t) dt + \mathbf{G}_\omega(\mathbf{X}(t)) d\boldsymbol{\omega}(t), \\ \mathbf{y}(t) = \bar{\mathbf{G}}_{v_\alpha}^\top(\mathbf{X}(t)) \frac{\partial \bar{\mathbf{H}}}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}(t)), \\ \mathbf{z}(t) = \bar{\mathbf{G}}^\top(\mathbf{X}(t)) \frac{\partial \bar{\mathbf{H}}}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}(t)), \end{cases} \quad (20)$$

其中

$$\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{X}(t)) = \mathbf{H}(\mathbf{x}(t)) + \frac{1}{2} \|\mathbf{e}(t)\|_Q^2,$$

$$\bar{\mathbf{R}}(\mathbf{X}(t)) = \text{diag} \left\{ \mathbf{R}(\mathbf{x}(t)) + \frac{1}{2} \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) \times \left[\mathbf{r}^\top(\mathbf{x}(t)) \mathbf{r}(\mathbf{x}(t)) + \frac{1}{\gamma^2} \mathbf{I}_m \right] \mathbf{g}^\top(\mathbf{x}(t)), \bar{\mathbf{A}} \right\},$$

$$\bar{\mathbf{G}}_{v_\alpha}(\mathbf{X}(t)) = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_{v_\alpha}(\mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{0}_{m \times m} \end{pmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{X}(t)) = \begin{pmatrix} (\mathbf{r}(\mathbf{x}(t)) \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)))^\top \\ \mathbf{0}_{m \times m} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}_{v_\alpha}(\mathbf{X}(t)) = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_{v_\alpha}(\mathbf{x}(t)) \\ \boldsymbol{\Phi} \mathbf{K}_v \mathbf{g}_{v_\alpha}(\mathbf{x}(t)) \end{pmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{X}(t)) = \mathbf{J}(\mathbf{X}(t)),$$

$\mathbf{G}_\omega(\mathbf{X}(t))$ 见式(12).

定理 2 假设 $\tilde{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}} - \boldsymbol{\Phi} \mathbf{K}_v \mathbf{g}_{v_\alpha}(\mathbf{x}(t)) \mathbf{g}_{v_\alpha}^\top(\mathbf{x}(t)) \times \mathbf{K}_v \boldsymbol{\Phi}^\top$ 是 Hurwitz 矩阵, 且不等式(13)成立, 则系统(16)和(2)的鲁棒输出调节问题可由调节器(17)完成, 即系统(20)的 L_2 增益(由 $\mathbf{v}_\alpha$ 到 $\mathbf{z}$)不大于 γ , 在平衡点处是局部依概率渐近稳定的, 并且 $\mathbf{e}(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$).

证明 首先证明闭环系统的 L_2 增益(由 $\mathbf{v}_\alpha$ 到 $\mathbf{z}$)不大于 γ . 因为 $\lambda(\mathbf{x}) \geq 0$, $\tilde{\mathbf{A}}$ 是 Hurwitz 矩阵, 沿系统(20)的轨线有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{X}) - \frac{1}{2} \{ \gamma^2 \|\mathbf{v}_\alpha\|^2 - \|\mathbf{z}\|^2 \} &= \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{H}}}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}) \right)^\top \times \\ & [\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{X}) - \bar{\mathbf{R}}(\mathbf{X})] \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{H}}}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}) \right) + \\ & \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \mathbf{G}_\omega^\top(\mathbf{X}) \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{H}}}{\partial \mathbf{X}^2}(\mathbf{X}) \mathbf{G}_\omega(\mathbf{X}) \right\} + \\ & \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{H}}}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}) \right)^\top \mathbf{G}_{v_\alpha}(\mathbf{X}) \mathbf{v}_\alpha - \frac{1}{2} \{ \gamma^2 \|\mathbf{v}_\alpha\|^2 - \|\mathbf{z}\|^2 \} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\lambda(\mathbf{x}) - \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \right)^\top \frac{1}{2\gamma^2} [\mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{g}^\top(\mathbf{x}) + \\ & 2\mathbf{g}_{v_\alpha}(\mathbf{x}) \mathbf{g}_{v_\alpha}^\top(\mathbf{x})] \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \right) - \\ & \frac{1}{4} \left\| \gamma \mathbf{v}_\alpha - \frac{2}{\gamma} \mathbf{g}_{v_\alpha}^\top(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \right\|^2 - \\ & \frac{1}{4} \left\| \gamma \mathbf{v}_\alpha - \frac{2}{\gamma} \mathbf{g}_{v_\alpha}^\top(\mathbf{x}) \mathbf{K}_v \boldsymbol{\Phi}^\top \mathbf{Q} \mathbf{e} \right\|^2 + \\ & (\mathbf{Q} \mathbf{e})^\top \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{Q} \mathbf{e}) \leq 0, \end{aligned}$$

则

$$\mathcal{L}\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{X}) \leq \frac{1}{2} \{ \gamma^2 \|\mathbf{v}_\alpha\|^2 - \|\mathbf{z}\|^2 \}. \quad (21)$$

结合式(21)和 Itô 公式, 可得

$$\begin{aligned} E\{\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{X}(t))\} - E\{\bar{\mathbf{H}}(0)\} &\leq \\ E\left\{ \int_0^t \frac{1}{2} (\gamma^2 \|\mathbf{v}_\alpha\|^2 - \|\mathbf{z}\|^2) dt \right\}, \end{aligned} \quad (22)$$

因为 $\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{X}(t)) \geq 0$ 和 $\bar{\mathbf{H}}(0) = 0$, 且不等式(13)成立, 所以系统(20)的 L_2 增益(由 $\mathbf{v}_\alpha$ 到 $\mathbf{z}$)不大于 γ .

接下来证明当 $\mathbf{v}_\alpha(t) = 0$ 时, 闭环系统依概率渐近稳定. 选择 Hamilton 函数 $\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{X}(t))$, 则

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{X}) &= -\lambda(\mathbf{x}) - \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \right)^\top \frac{1}{2\gamma^2} [\mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{g}^\top(\mathbf{x}) + \\ & 2\mathbf{g}_{v_\alpha}(\mathbf{x}) \mathbf{g}_{v_\alpha}^\top(\mathbf{x})] \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \right) - \\ & \frac{1}{\gamma^2} \left\| \mathbf{g}_{v_\alpha}^\top(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \right\|^2 - \frac{1}{\gamma^2} \left\| \mathbf{g}_{v_\alpha}^\top(\mathbf{x}) \mathbf{K}_v \boldsymbol{\Phi}^\top \mathbf{Q} \mathbf{e} \right\|^2 + \\ & (\mathbf{Q} \mathbf{e})^\top \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{Q} \mathbf{e}) - \frac{1}{2} \|\mathbf{z}\|^2 \leq \\ & -\frac{1}{\gamma^2} \left\| \mathbf{g}_{v_\alpha}^\top(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \right\|^2 + (\mathbf{Q} \mathbf{e})^\top \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{Q} \mathbf{e}) \leq 0, \end{aligned}$$

从而闭环系统依概率收敛于包含在下列集合内的最大不变集上:

$$\begin{aligned} S = \{ \mathbf{X}(t) : \mathcal{L}\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{X}) = 0 \} &= \left\{ \left[\mathbf{x}^\top(t), \mathbf{e}^\top(t) \right] : \right. \\ & \left. \mathbf{g}_{v_\alpha}^\top(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{e}(t) = 0 \right\}, \end{aligned} \quad (23)$$

因为 $\mathbf{g}_{v_\alpha}(\mathbf{x}(t))$ 列满秩, 所以系统(16)在平衡点处局部依概率渐近稳定, 并且 $\mathbf{e}(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$), 证毕.

注 2 在系统(16)中, 当 $\mathbf{g}_\omega(\mathbf{x}(t)) = 0$ 时, 若不等式(13)成立, 则调节器(17)解决了确定性 Hamilton 系统的鲁棒输出调节问题; 若 $\mathbf{v}(t) = 0$,

即系统(16)中的正弦干扰消失, 则随机端口 Hamilton 系统的稳定性可由下列控制器完成:

$$\begin{aligned} u(t) = & -\frac{1}{2} \left(r^T(x(t)) r(x(t)) + I_m / \gamma^2 \right) \times \\ & g^T(x(t)) \frac{\partial H}{\partial x}(x(t)). \end{aligned} \quad (24)$$

3 数值分析

考虑如下倒立摆系统^[14]:

$$\begin{aligned} dx(t) = & \left[\left[J(x(t)) - R(x(t)) \right] \frac{\partial H}{\partial x}(x(t)) + \right. \\ & \left. g(x(t)) [u(t) - v(t)] \right] dt + \theta g_{v_\alpha}(x(t)) \times \\ & v_\alpha(t) dt + g_\omega(x(t)) d\omega(t), \end{aligned} \quad (25)$$

其中

$$\begin{aligned} J(x(t)) = & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R(x(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ g(x(t)) = & g_{v_\alpha}(x(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ g_\omega(x(t)) = & \begin{pmatrix} 0 \\ x_2(t)/2 \end{pmatrix}, \\ x(t) = & (x_1^T(t), x_2^T(t))^T, \\ \theta = & 0, 1, \end{aligned}$$

Hamilton 函数 $H(x(t)) = x_2^2(t)/2 + g \cos x_1(t)$, g 表示重力, $v(t)$ 是由外部系统(2)产生的. 令

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_{as} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = I_2.$$

下面将验证调节器(14)和(17)的有效性. 为此, 先检验调节器(14)和(17)中的条件, 直接计算得

$$\lambda(x) \geq x_2^2(t)(3 - 2K_v^2)/8, \quad (26)$$

当 $K_v \leq \sqrt{6}/2$ 时, 不等式(13)成立.

根据定理 1, 对于系统(1)和(2)基于观测器的调节器可设计为

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1(t) = \xi_2(t) - K_v x_2(t), \\ \dot{\xi}_2(t) = -\xi_1(t) - (K_v + 1)x_2(t) + K_v g \sin x_1(t), \\ u(t) = \xi_2(t) - (K_v + 1)x_2(t). \end{cases} \quad (27)$$

根据定理 2, 对于系统(16)和(2)基于观测器的鲁棒调节器可设计为

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1(t) = \xi_2(t) + K_v x_2(t), \\ \dot{\xi}_2(t) = -\xi_1(t) - (K_v + 1)x_2(t) + \\ \quad (1 + 1/\gamma^2)x_2(t)/2, \\ u(t) = \xi_2(t) - K_v x_2(t) - (1 + 1/\gamma^2)x_2(t)/2. \end{cases} \quad (28)$$

为了验证调节器的性能表现, 分别将式(27)和(28)与控制器(15)、(24)及开环系统进行比较. 调节器的参数取值为 $K_v = 0.5$, $B = 1$, $\gamma = 1$, $r(x(t)) = 1$, $v_\alpha(t) = 0.5 + \cos 2\pi x_1(t)$. 为了研究调节器(28)的鲁棒性, 外部干扰 $v_\alpha(t)$ 将在 2~3 s 时施加于系统. 仿真结果如图 1 和图 2 所示.

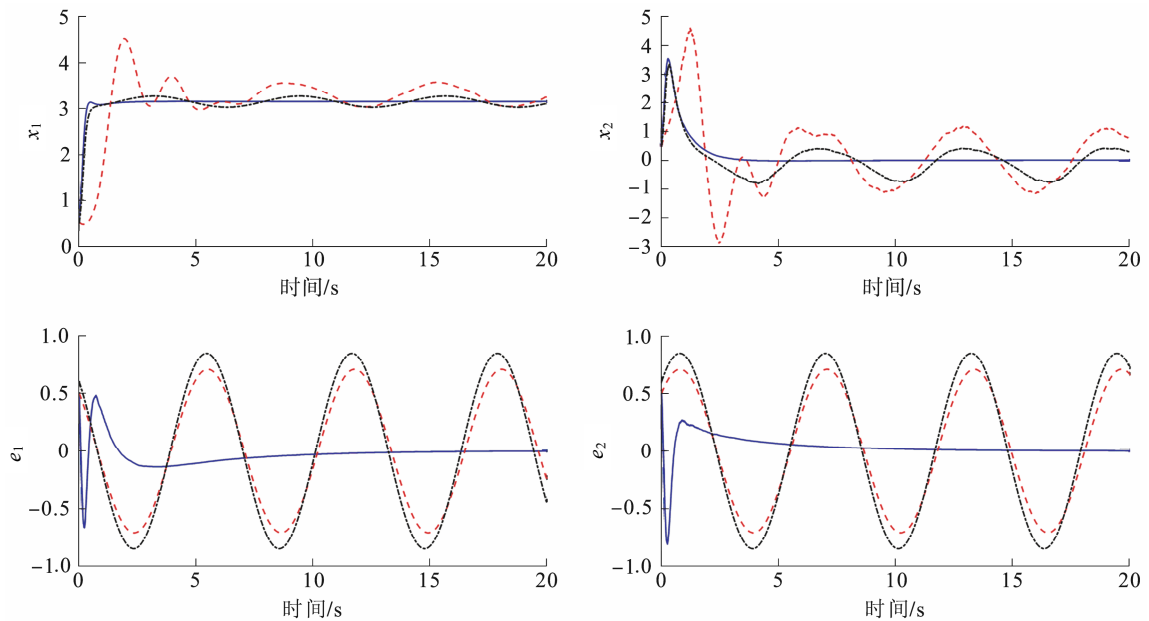


图 1 倒立摆系统($\theta = 0$)的动态响应

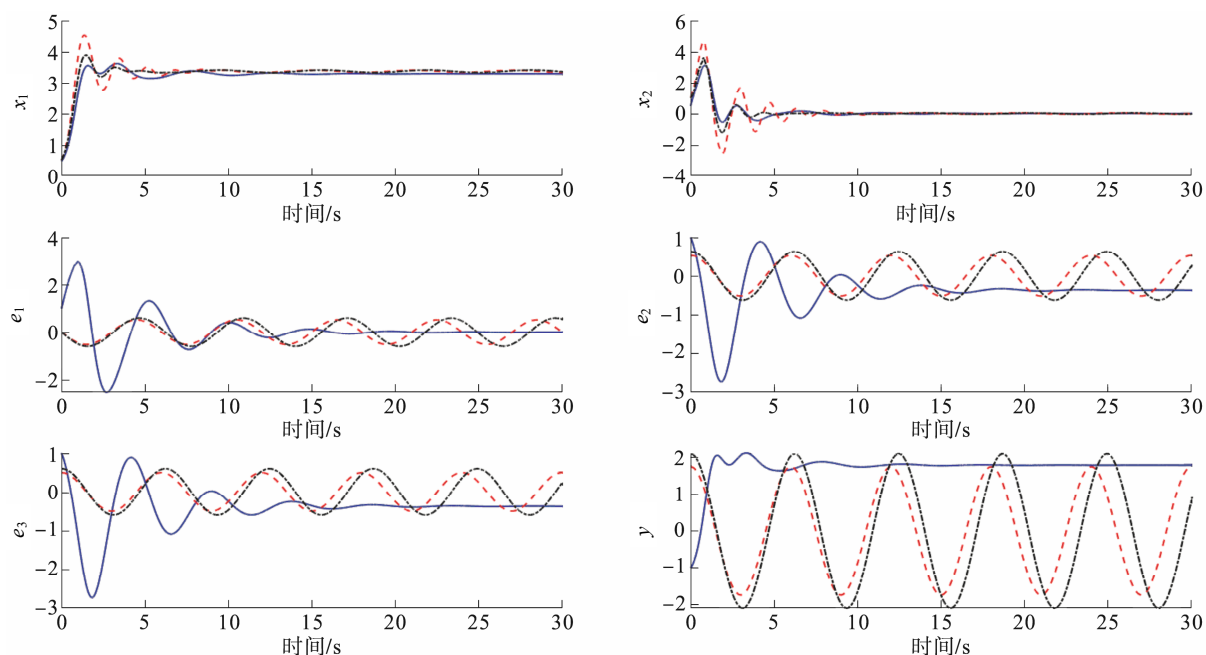
图2 倒立摆系统($\theta=1$)的动态响应

图1中,蓝色线(实线)和黑色线(点划线)分别表示倒立摆系统的状态分量 $(x_1, x_2, e_1, e_2)^T$ 在调节器(27)和控制器(15)下的状态响应,红色线(虚线)表示状态分量 $(x_1, x_2, e_1, e_2)^T$ 在开环系统下的响应。

图2中,蓝色线(实线)和黑色线(点划线)分别表示倒立摆系统的状态分量 $(x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, y)^T$ 在调节器(28)和控制器(24)下的状态响应,红色线(虚线)表示状态分量 $(x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, y)^T$ 在开环系统下的响应。

图1表明含匹配干扰的倒立摆系统在调节器(27)的作用下依概率渐近稳定在平衡点处,并且追踪误差 $e(t) = \eta(t) - \hat{\eta}(t)$ 渐近收敛到原点,但控制器(15)不能使得倒立摆系统渐近稳定及参考输入渐近追踪干扰,同时开环系统也不稳定。

从图2可知,含匹配干扰和外部干扰的倒立摆系统在调节器(28)下不仅依概率渐近稳定在平衡点处,而且追踪误差 $e(t) = \eta(t) - \hat{\eta}(t)$ 渐近收敛到原点,对外部干扰也具有鲁棒性。然而,控制器(24)不能使得倒立摆系统渐近稳定及参考输入渐近追踪干扰,而且开环系统也不稳定。

4 结论

本文研究了一类含匹配干扰的随机端口 Hamilton 系统的输出调节问题。基于随机端口

Hamilton 系统的耗散结构和内模原理,提出了基于观测器的调节器和鲁棒调节器。所提出的调节器确保含匹配干扰的随机端口 Hamilton 系统的耗散结构,将输出调节问题转化为随机端口 Hamilton 的稳定性问题,从而避免了求解调节器方程和 Hamilton-Jacobi-Isacs 不等式。通过仿真验证所提出的调节器是有效的,基于观测器的调节器和鲁棒调节器都可以使倒立摆系统依概率渐近稳定并且追踪误差收敛到原点。

参考文献:

- [1] MASCHKE B, ORTEGA R, VAN DER SCHAFT A J. Energy-based Lyapunov functions for forced Hamiltonian systems with dissipation[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, 45(8):1498-1502.
- [2] XU S, HOU X R. A family of H_∞ controllers for dissipative Hamiltonian systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2012, 22(11):1258-1269.
- [3] FUJIMOTO K, SAKURAMA K, SUGIE T. Trajectory tracking control of port-controlled Hamiltonian systems via generalized canonical transformations[J]. Automatica, 2003, 39(12):2059-2069.
- [4] WANG Y Z, CHENG D Z, LI C W, et al. Dissipative Hamiltonian realization and energy-based L_2 -disturbance attenuation control of multimachine power systems[J].

- IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(8): 1428-1433.
- [5] ORTEGA R, VAN DER SCHAFT A, MASCHKE B, et al. Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled Hamiltonian systems[J]. Automatica, 2002, 38(4):585-596.
- [6] CORDONI F, DI PERSIO L, MURADORE R. Stochastic port-Hamiltonian systems[J]. Journal of Nonlinear Science, 2022, 32(6):91.
- [7] FANG Z, GAO C H. Stabilization of input-disturbed stochastic port-Hamiltonian systems via passivity[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(8): 4159-4166.
- [8] HADDAD W M, RAJPUROHIT T, JIN X. Energy-based feedback control for stochastic port-controlled Hamiltonian systems[J]. Automatica, 2018, 97:134-142.
- [9] SATOH S, FUJIMOTO K. Passivity based control of stochastic port-Hamiltonian systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(5):1139-1153.
- [10] 曹桂州, 刘艳红. 基于随机 Hamilton 实现的车摆系统干扰抑制控制[J]. 系统科学与数学, 2016, 36(7):1006-1015.
- [11] 程代展, 董亚丽. 输出调节和内模原理[J]. 自动化学报, 2003, 29(2):284-295.
- [12] GENTILI L, VAN DER SCHAFT A. Regulation and input disturbance suppression for port-controlled Hamiltonian Systems[J]. IFAC Proceedings Volumes, 2003, 36(2):205-210.
- [13] HUMALOJA J P, PAUNONEN L. Robust regulation of infinite-dimensional port-Hamiltonian systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2018, 63(5):1480-1486.
- [14] XU S, WANG W, CHEN S Y. Energy-based output regulation for stochastic port-Hamiltonian systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2021, 31(5):1720-1734.
- [15] FERGUSON J, WU D J, ORTEGA R. On matched disturbance suppression for port-hamiltonian systems[J]. IEEE Control Systems Letters, 2020, 4(4):892-897.
- [16] KHASMINSKII R. Stochastic stability of differential equations[M]. Berlin: Springer, 2012.
- [17] MAO X R. Stochastic versions of the LaSalle theorem[J]. Journal of Differential Equations, 1999, 153(1):175-195.

Observer-based output regulation for a class of stochastic port-Hamiltonian systems

WANG Feifei, XU Song

(School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: The output regulation problem of a class of stochastic port-Hamiltonian systems (SPHSs) with corresponding disturbance is studied, and an observer-based output regulation method is proposed. Firstly, an observer-based regulator is designed for SPHSs using the stochastic dissipativity and the internal model principle, which ensures the asymptotical stability in probability of the closed-loop system and drives the tracking error converge to the origin. On this basis, an observer-based robust regulator is used for SPHSs with both corresponding and external disturbances. The output regulators preserve the stochastic port- Hamiltonian structure of the disturbed systems, thus the output regulation problems are in part solved for the stabilization without needing to solve regulator equations and Hamilton-Jacobi-Issacs inequalities. Numerical results can be used to validate the effectiveness of the output regulation methods presented in paper.

Key words: stochastic port-Hamiltonian system; output regulation; stability; internal model principle

(责任编辑 韩 超)