

DOI: 10.20098/j.cnki.1001-5132.2023.0920

噪声情形下块稀疏信号恢复的充分条件

单 滢, 王金平*

(宁波大学 数学与统计学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 压缩感知是一种有效的信号采集技术, 利用信号的可压缩性, 通过采样与非线性算法完美地恢复信号. 基于压缩感知理论, 本文通过块正交匹配追踪算法, 研究在 l_∞ 有界噪声影响下恢复块稀疏信号和强衰减块稀疏信号的约束等距性质, 给出保证该算法准确恢复原信号的充分条件, 并通过数值实验对影响稀疏信号性能的因素进行分析比较.

关键词: BOMP 算法; l_∞ 有界噪声; 稀疏信号; 强衰减块稀疏信号

中图分类号: O177.6; O175.5

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2024) 03-0044-06

压缩感知(Compressed Sensing, CS)是 Candès 等^[1-2]、Donoho^[3]于 2006 年提出的新型采样理论, 它通过开发信号的稀疏性, 突破传统香农采样定理的限制, 用随机采样获取信号的离散样本, 从而利用非线性算法完美地恢复信号^[2]. 压缩感知一经提出, 就在图像处理、医学成像、无线通信等诸多领域受到高度关注. 其中所需要恢复的稀疏信号 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 和测量信号 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ 组成如下线性模型^[4]:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v}, \quad (1)$$

这里 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ($m \ll n$) 称为感知矩阵, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ 称为噪声. 本文研究在 l_∞ 有界噪声^[5] ($\|\mathbf{A}^* \mathbf{v}\|_\infty \leq \varepsilon$) 情形下的信号恢复条件, 得到的主要结果可推广至其他情形, 例如 l_2 有界噪声^[6].

自压缩感知理论建立以来, 已经提出了许多有效精确的恢复算法. 其中贪婪算法由于每次迭代均会选择局部最优解, 将问题简化, 便于操作从而得到广泛关注, 例如正交匹配追踪(Orthogonal Matching Pursuit, OMP)算法^[4-5]. 文献[7]将 OMP 算法拓展到块稀疏信号中, 提出了块正交匹配追踪(Block Orthogonal Matching Pursuit, BOMP)算法, 使信号采样和恢复的速度更快, 且相较于传统意义下的恢复算法有更高的恢复概率.

信号的稀疏表示是算法应用的前提, 当信号 $\mathbf{x}$

中的非零元素成块显现时, 可将 $\mathbf{x}$ 视作由总块数为 L 和每块长度均为 d 的子块连接^[8],

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}^*[1], \mathbf{x}^*[2], \dots, \mathbf{x}^*[L]]^*, \quad (2)$$

其中 $\mathbf{x}[i] = [x_{d(i-1)+1}, x_{d(i-1)+2}, \dots, x_{di}]^*$, $1 \leq i \leq L$. 若信号 $\mathbf{x}$ 最多有 K 个子块的范数是不为零的, 则称为块 K 稀疏信号. 此时信号 $\mathbf{x}$ 的支撑集^[9]记为

$$T = \text{supp}(\mathbf{x}) = \{i \in [1, L]: \mathbf{x}^*[i] \neq 0\}.$$

同时为了分析算法恢复信号的准确性能, 文献[10]提出了一个有效的约束条件, 若对于任意块 K 稀疏信号 $\mathbf{x}$, 存在最小常数 $\delta_{BK} \in [0, 1]$ 使得

$$(1 - \delta_{BK}) \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 \leq (1 + \delta_{BK}) \|\mathbf{x}\|_2^2, \quad (3)$$

则称感知矩阵 $\mathbf{A}$ 满足块约束等距性质(Restricted Isometry Property, RIP).

基于上述块约束条件, 为了稳定恢复块稀疏信号, 文献[11]提出在无噪声和 l_2 有界噪声情形下块 RIP 都需满足 $\delta_{2K} < \sqrt{2} - 1$; 文献[12]对于无噪声干扰下的块 RIP 条件优化为 $\delta_{K+1} < 1/(1 + \sqrt{K})$; 文献[13]与文献[9]提出在 l_2 有界噪声干扰下的条件分别为 $\delta_{K} < \sqrt{(t-1)/t}$ 和 $\delta_{K+1} < 1/\sqrt{K+1}$; 文献[14]提出在加性噪声干扰下约束条件为 $\delta_{bs} + a\delta_{(b+1)s} < a - 1$. 本文提出在 l_∞ 有界噪声干扰下分别恢复稀疏信号和强衰减块稀疏信号的条件.

收稿日期: 2023-09-26

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journal.g.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(62071262).

第一作者: 单滢, 硕士研究生, 主要研究方向: 积分变换与图像处理. E-mail: 1315813196@qq.com

*通信作者: 王金平, 博士/教授, 主要研究方向: 积分变换与图像处理. E-mail: wangjinping@nbu.edu.cn

1 预备知识

为了便于下文的叙述, 首先介绍文章中所需用到的符号.

块 K 稀疏信号 $\mathbf{x}$ 的支撑集记为 T , BOMP 算法中选定元素的索引集记为 T_k , 全部非零块 $\mathbf{x}[i]$ 所对应的索引集记为 Ω , 并有 $|\Omega| \leq K$, 其中 $|\Omega|$ 是 Ω 的基数. 将 Ω 的补集记为 $\Omega^c = \{1, 2, \dots, L\} \setminus \Omega$, 同样有 $T^c = \{1, 2, \dots, L\} \setminus T$, 且 $\Omega \setminus T = \{k \mid k \in \Omega, k \notin T\}$. 将 $\mathbf{A}$ 只包含索引列块的子矩阵记为 $\mathbf{A}[T]$, 同样有 $\mathbf{x}$ 的子向量为 $\mathbf{x}[T]$. 将 $\mathbf{A}[T]$ 的转置矩阵记为 $\mathbf{A}^*[T]$, 逆矩阵记为 $\mathbf{A}^{-1}[T]$. 对于任意满秩矩阵 $\mathbf{A}[T]$, 记投影为 $\mathbf{P}[T] = \mathbf{A}[T](\mathbf{A}^*[T]\mathbf{A}[T])^{-1}\mathbf{A}^*[T]$, 以及正交投影 $\mathbf{P}^\perp[T] = \mathbf{I} - \mathbf{P}[T]$.

定义 1^[11] 若 $\mathbf{x} \in R^n$, 一般 l_2/l_p 混合范数定义为

$$\|\mathbf{x}\|_{2,p} = \|\mathbf{w}\|_p, \quad (4)$$

其中 $p=1, 2, \infty$, 当 $\mathbf{w} \in R^L$ 以及 $1 \leq i \leq L$ 时, 有 $\mathbf{w} = \|\mathbf{x}[i]\|_2$. 注意到当 $p=2$ 时, $\|\mathbf{x}\|_{2,2} = \|\mathbf{x}\|_2$, 故下文不区分这两个范数. 若块大小 $d=1$, 有 $\|\mathbf{x}\|_{2,p} = \|\mathbf{x}\|_p$ ($p=1, 2, \infty$).

定义 2^[9] 令 $\alpha > 1$, 当块 K 稀疏信号 $\mathbf{x}$ 满足 $\|\mathbf{x}[i]\|_2 \geq \alpha \|\mathbf{x}[i+1]\|_2$, $1 \leq i \leq K-1$ 时, 称 $\mathbf{x}$ 为 α 强衰减的.

算法 1 BOMP 算法^[7]

输入: 稀疏度 K , 感知矩阵 $\mathbf{A}$, 测量向量 $\mathbf{y}$, 块数 L .
初始化: $k=0$, 残差 $\mathbf{r}^0 = \mathbf{y}$, 索引集 $\lambda_0 = \emptyset$.
迭代直至满足停止条件:

1. $k = k + 1$;
2. $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{r}^0$ 最接近的块索引

$$\lambda_k = \underset{1 \leq i \leq L}{\operatorname{argmax}} \|\mathbf{A}^*[i]\mathbf{r}^{k-1}\|_2;$$
3. 更新索引集: $T_k = T_{k-1} \cup \{\lambda_k\}$;
4. 寻找最优解: $\hat{\mathbf{x}}[T_k] = \operatorname{argmin} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}[T_k]\mathbf{x}\|_2$;
5. 更新残差: $\mathbf{r}^k = \mathbf{y} - \mathbf{y}^k = \mathbf{y} - \mathbf{A}[T_k]\hat{\mathbf{x}}[T_k]$.

输出: $\hat{\mathbf{x}}[T_k] = \operatorname{argmin} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2$.

引理 1^[15] 若感知矩阵 $\mathbf{A}$ 在 K_1 阶和 K_2 阶都满足块 RIP 条件, 当 $K_1 < K_2$ 时, 有 $\delta_{K_1} < \delta_{K_2}$.

引理 2^[16] 若 $\mathbf{A}$ 在阶 $|T_1 \cup T_2|$ 上满足块 RIP 条件, 且 $|T_1 \setminus T_2| \neq 0$, 对于任意信号 $\mathbf{x}$ 有

$$\|\mathbf{P}^\perp[T_2]\mathbf{A}[T_1 \setminus T_2]\mathbf{x}\|_2^2 \leq (1 + \delta_{|T_1 \cup T_2|}) \|\mathbf{x}\|_2^2.$$

引理 3^[17] 若 $\|\mathbf{A}^*\mathbf{v}\|_\infty \leq \varepsilon$, 则满足

$$|\mathbf{A}, \mathbf{P}^\perp \mathbf{v}| \leq \left(1 + \frac{\sqrt{k} \delta_{K+1}}{1 - \delta_{K+1}}\right) \varepsilon.$$

2 主要结果

在 Eldar 等^[11]首次运用块相关度提出 BOMP 算法精确恢复稀疏信号的约束条件之后, 针对 BOMP 算法解决线性模型大多以块相关度^[3]为判断准则, 本文与其不同之处在于运用块 RIP 约束条件分析 BOMP 算法精确恢复性能. 在 l_∞ 有界噪声影响下, 分别对 BOMP 算法恢复普通信号和 α 强衰减块稀疏信号的过程提出感知矩阵的具体约束条件, 得到有关最优解的误差估计值. 首先提出 BOMP 算法恢复普通稀疏信号的充分条件.

定理 1 已知 $f(t)$ 是在定义域 $(0, \infty)$ 上的函数, 并满足 $0 < f(t) < t$. 若块 K 稀疏信号 $\mathbf{x}$ 在 $\|\mathbf{A}^*\mathbf{v}\|_\infty \leq \varepsilon$ 噪声环境下满足

$$\|\mathbf{x}[\Omega \setminus T]\|_{2,1}^2 \leq f(|\Omega \setminus T|) \|\mathbf{x}[\Omega \setminus T]\|_2^2, \quad (5)$$

以及感知矩阵 $\mathbf{A}$ 的 $K+1$ 阶约束等距常数满足

$$\delta_{K+1} < \frac{1}{\sqrt{f(K)+1}}, \quad (6)$$

则 BOMP 算法在 $\|\mathbf{A}^*\mathbf{r}^k\|_{2,\infty} \leq \varepsilon$ 的停止准则下第 K 次迭代能准确恢复信号, 最小值为

$$\min \|\mathbf{x}[i]\|_2 > \frac{\sqrt{2}((\sqrt{K}-1)\delta_{K+1}+1)\varepsilon}{(1-\delta_{K+1})(1-\sqrt{f(K)+1}\delta_{K+1})}, \quad (7)$$

恢复信号所产生的误差为

$$\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_2 \leq \frac{\sqrt{K}}{1 - \delta_{K+1}} \varepsilon. \quad (8)$$

证明 首先, 用归纳法证明 BOMP 算法每次迭代都选择了正确的索引集即意味着此次迭代成功. 当 $k=1$ 时, 根据 BOMP 算法的初始化可知 $T_{k-1} = T_0 = \emptyset$, 因此 $T_{k-1} \subseteq \Omega$ 成立, 等同于 BOMP 算法在第一次迭代时成功. 假设前 k 次迭代均成立, 即有 $T_k \subseteq \Omega$, 对于每个 $k < K$ 都有 $|T_k \cap T| = k$. 在第 $k+1$ 次迭代中, 要证明 $T_{k+1} \subseteq \Omega$ 成立相当于证明 $\|\mathbf{A}^*[\Omega \setminus T_k]\mathbf{r}^k\|_{2,\infty} > \|\mathbf{A}^*[\Omega^c]\mathbf{r}^k\|_{2,\infty}$. (9)

根据 BOMP 算法迭代过程以及正交投影算子可得

$$\mathbf{r}^k = \mathbf{y} - \mathbf{A}[T_k]\hat{\mathbf{x}}[T_k] = \mathbf{P}^\perp[T_k]\mathbf{A}[\Omega \setminus T_k]\mathbf{x}[\Omega \setminus T_k] + \mathbf{P}^\perp[T_k]\mathbf{v}, \quad (10)$$

以及

$$\hat{\mathbf{x}}[T_k] = (\mathbf{A}^*[T]\mathbf{A}[T])^{-1}\mathbf{A}^*[T]\mathbf{y}. \quad (11)$$

利用三角不等式以及式(10)分别获得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}^*[\Omega \setminus T_k]\mathbf{r}^k\|_{2,\infty} &\geq \\ \|\mathbf{A}^*[\Omega \setminus T_k]\mathbf{P}^\perp[T_k]\mathbf{A}[\Omega \setminus T_k]\mathbf{x}[\Omega \setminus T_k]\|_{2,\infty} - \\ \|\mathbf{A}^*[\Omega \setminus T_k]\mathbf{P}^\perp[T_k]\mathbf{v}\|_{2,\infty}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}^*[\Omega^c]\mathbf{r}^k\|_{2,\infty} &\leq \|\mathbf{A}^*[\Omega^c]\mathbf{P}^\perp[T_k]\mathbf{A}[\Omega \setminus T_k] \times \\ &\quad \mathbf{x}[\Omega \setminus T_k]\|_{2,\infty} + \|\mathbf{A}^*[\Omega^c]\mathbf{P}^\perp[T_k]\mathbf{v}\|_{2,\infty}. \end{aligned} \quad (13)$$

将式(9)与(12)、(13)相结合, 得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}^*[\Omega \setminus T_k]\mathbf{Bu}\|_{2,\infty} - \|\mathbf{A}^*[j]\mathbf{Bu}\|_{2,\infty} &> \\ \|\mathbf{A}^*[\Omega \setminus T_k]\mathbf{P}^\perp[T_k]\mathbf{v}\|_{2,\infty} + \\ \|\mathbf{A}^*[\Omega^c]\mathbf{P}^\perp[T_k]\mathbf{v}\|_{2,\infty}, \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $j \in \Omega^c$, 且

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{P}^\perp[T_k][\mathbf{A}[\Omega \setminus T_k] \quad \mathbf{A}[j]], \\ \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}[\Omega \setminus T_k] \\ 0 \end{bmatrix} \in R^{(|\Omega \setminus T_k|+1)d}. \end{aligned} \quad (15)$$

由式(5)可得,

$$\begin{aligned} \sqrt{f(|\Omega \setminus T_k|)} \|\mathbf{x}[\Omega \setminus T_k]\|_2 \|\mathbf{A}^*[\Omega \setminus T_k]\mathbf{Bu}\|_{2,\infty} &\geq \\ \|\mathbf{x}[\Omega \setminus T_k]\|_{2,1} \|\mathbf{A}^*[\Omega \setminus T_k]\mathbf{Bu}\|_{2,\infty} &\geq \\ \sum_{i \in \Omega \setminus T_k} \|\mathbf{x}[i]\mathbf{A}^*[i]\mathbf{Bu}\|_2 = (\mathbf{P}^\perp[T]\mathbf{A}[\Omega \setminus T_k] \times \\ &\quad \mathbf{x}[\Omega \setminus T_k])^* \mathbf{Bu} = \|\mathbf{Bu}\|_2. \end{aligned} \quad (16)$$

令

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \rho \|\mathbf{x}[i]\|_2 \mathbf{h} \end{bmatrix} \in R^{(|\Omega \setminus T_k|+1)d}, \\ \rho &= \frac{1 - \sqrt{f(|\Omega \setminus T_k|) + 1}}{\sqrt{f(|\Omega \setminus T_k|)}}, \\ \mathbf{h} &= \frac{\mathbf{A}^*[j]\mathbf{Bu}}{\|\mathbf{A}^*[j]\mathbf{Bu}\|_2}, \end{aligned}$$

经简单计算可得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{B}(\mathbf{u} + \mathbf{w})\|_2^2 - \|\mathbf{B}(\rho^2 \mathbf{u} - \mathbf{w})\|_2^2 &= (1 - \rho^4) \|\mathbf{Bu}\|_2^2 + \\ &\quad 2(\rho + \rho^3) \|\mathbf{x}[i]\|_2 \|\mathbf{A}^*[j]\mathbf{Bu}\|_2. \end{aligned} \quad (17)$$

由引理 2 可知

$$\begin{aligned} \|\mathbf{B}(\mathbf{u} + \mathbf{w})\|_2^2 - \|\mathbf{B}(\rho^2 \mathbf{u} - \mathbf{w})\|_2^2 &\geq (1 - \delta_{|\Omega|+1}) \times \\ \|\mathbf{u} + \mathbf{w}\|_2^2 - (1 + \delta_{|\Omega|+1}) \|\rho^2 \mathbf{u} - \mathbf{w}\|_2^2 &= \\ ((1 - \delta_{|\Omega|+1}) - (1 + \delta_{|\Omega|+1})\rho^2)(1 + \rho^2) \|\mathbf{x}[i]\|_2^2 &= \\ \left(1 - \frac{1 + \rho^2}{1 - \rho^2} \delta_{|\Omega|+1}\right)(1 - \rho^4) \|\mathbf{x}[i]\|_2^2. \end{aligned}$$

结合上述两式有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Bu}\|_2^2 - \sqrt{f(|\Omega \setminus T_k|)} \|\mathbf{x}[i]\|_2 \|\mathbf{A}^*[i]\mathbf{Bu}\|_2 &\geq \\ \|\mathbf{x}[i]\|_2^2 \left(1 - \sqrt{f(|\Omega \setminus T_k|)} \delta_{|\Omega|+1}\right), \end{aligned} \quad (18)$$

通过函数 $f(t)$ 的性质和归纳假设可知

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}[\Omega \setminus T_k]\|_2 &\geq \sqrt{|\Omega| - k} \min_{i \in \Omega} \|\mathbf{x}[i]\|_2 \geq \\ \sqrt{f(|\Omega|) - k} \min_{i \in \Omega} \|\mathbf{x}[i]\|_2. \end{aligned} \quad (19)$$

因此结合式(16)与(18)、(19)有

$$\begin{aligned} \sqrt{f(|\Omega \setminus T_k|)} (\|\mathbf{x}[\Omega \setminus T_k]\|_2 \|\mathbf{A}^*[\Omega \setminus T_k]\mathbf{Bu}\|_{2,\infty} - \\ \|\mathbf{x}[\Omega \setminus T_k]\|_2 \|\mathbf{A}^*[\Omega^c]\mathbf{Bu}\|_{2,\infty}) &\geq \\ \frac{1 - \sqrt{f(|\Omega \setminus T_k|) + 1} \delta_{|\Omega|+1}}{\sqrt{f(|\Omega \setminus T_k|)}} \|\mathbf{x}[\Omega \setminus T_k]\|_2^2 &\geq \\ (1 - \sqrt{f(K) + 1} \delta_{K+1}) \min_{i \in \Omega} \|\mathbf{x}[i]\|_2. \end{aligned} \quad (20)$$

针对式(14)的右侧, 分别在所属索引集内找到满足最优解的第 i 块和第 j 块,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}^*[\Omega \setminus T_k]\mathbf{P}^\perp[T_k]\mathbf{v}\|_{2,\infty} + \|\mathbf{A}^*[\Omega^c]\mathbf{P}^\perp[T_k]\mathbf{v}\|_{2,\infty} &= \\ \|\mathbf{A}^*[i]\mathbf{P}^\perp[T_k]\mathbf{v}\|_2 + \|\mathbf{A}^*[j]\mathbf{P}^\perp[T_k]\mathbf{v}\|_2 &\leq \\ \sqrt{2} \|\mathbf{A}^*[i \cup j]\mathbf{P}^\perp[T_k]\mathbf{v}\|_2 &\leq \\ \sqrt{2} \max\{\|\mathbf{A}[i], \mathbf{P}^\perp[T_k]\mathbf{v}\|\} &\leq \\ \left(1 + \frac{\sqrt{K-1}}{1 - \delta_{K+1}} \delta_{K+1}\right) \varepsilon. \end{aligned} \quad (21)$$

由式(20)和(21)经过合并同类项可获得

$$\min_{i \in \Omega} \|\mathbf{x}[i]\|_2 > \frac{\sqrt{2}((\sqrt{K} - 1)\delta_{K+1} + 1)\varepsilon}{(1 - \delta_{K+1})(1 - \sqrt{f(K) + 1} \delta_{K+1})},$$

若式(7)成立, 则代表 BOMP 算法在 K 次迭代中均选择了正确的索引集.

其次, 证明 BOMP 算法能够精确地执行 K 次迭代, 这等价于证明

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}^*\mathbf{r}^k\|_{2,\infty} &> \varepsilon, \quad 0 \leq k < K, \\ \|\mathbf{A}^*\mathbf{r}^K\|_{2,\infty} &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

当 $0 \leq k < K$ 时, 由式(10)得到

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}^*\mathbf{r}^k\|_{2,\infty} &\geq \|\mathbf{A}^*\mathbf{P}^\perp[T_k]\mathbf{A}[\Omega \setminus T_k]\mathbf{x}[\Omega \setminus T_k]\|_{2,\infty} - \\ \|\mathbf{A}^*\mathbf{P}^\perp[T_k]\mathbf{v}\|_{2,\infty}. \end{aligned} \quad (22)$$

利用范数的性质, 当 $i \in \Omega \setminus T_k$ 时, 均有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}^*\mathbf{P}^\perp[T_k]\mathbf{A}[\Omega \setminus T_k]\mathbf{x}[\Omega \setminus T_k]\|_{2,\infty} &\geq \\ \frac{1}{\sqrt{K-k}} \|\mathbf{A}^*\mathbf{P}^\perp[T_k]\mathbf{A}[i]\mathbf{x}[i]\|_2 &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\|A^*P^\perp[T_k]A[i]x[i]\|_2\|x[i]\|_2}{\sqrt{K-k}\|x[i]\|_2} \geq \\
& \frac{x[i], A^*P^\perp[T_k]A[i]x[i]}{\sqrt{K-k}\|x[i]\|_2} = \frac{P^\perp[T_k]A[i]x[i]}{\sqrt{K-k}\Re[i]} \geq \\
& \frac{(1-\delta_{K+1})\|x[i]\|_2}{\sqrt{K-k}} \geq \\
& (1-\delta_{K+1})\min\|x[i]\|_2. \quad (23)
\end{aligned}$$

拓展引理3得到

$$\begin{aligned}
& \|A^*P^\perp[T]v\|_{2,\infty} = \max\left|\left\langle A[i], P^\perp[T]v \right\rangle\right| \leq \\
& \left(1 + \frac{\sqrt{K-1}\delta_{K+1}}{1-\delta_{K+1}}\right)\varepsilon. \quad (24)
\end{aligned}$$

由于 $1 - \sqrt{f(K)+1}\delta_{K+1} \leq 1 - \delta_{K+1} \leq \sqrt{1-\delta_{K+1}}$, 式(22)等价于

$$\begin{aligned}
& \|A^*r^k\|_{2,\infty} \geq (1-\delta_{K+1})\min\|x[i]\|_2 - \\
& \left(1 + \frac{\sqrt{K-1}\delta_{K+1}}{1-\delta_{K+1}}\right)\varepsilon > \varepsilon.
\end{aligned}$$

同样, 在 l_∞ 有界噪声下有 $\|A^*r^k\|_{2,\infty} = \|A^*P^\perp[T]v\|_{2,\infty} \leq \|P^\perp[T]\|_{2,\infty}\|A^*v\|_{2,\infty} \leq \varepsilon$. 根据以上停止条件, BOMP 算法执行 K 次迭代后终止.

最后计算恢复误差, 通过线性模型(1)可得到 $A[T]\hat{x}[T] = P[T]y = A[T]x[T] + P[T]v$, (25)

故有

$$\begin{aligned}
& \|P[T]v\|_2^2 = \|A[T](\hat{x}[T] - x[T])\|_2^2 \geq \\
& (1-\delta_{K+1})\|\hat{x}[T] - x[T]\|_2^2, \quad (26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \|P[T]v\|_2^2 = \|A[T](A^*[T]A[T])^{-1}A^*[T]v\|_2^2 \leq \\
& \frac{1}{1-\delta_{K+1}}\|A^*[T]v\|_2^2. \quad (27)
\end{aligned}$$

结合式(26)和(27)这两个不等式有

$$(1-\delta_{K+1})\|\hat{x}[T] - x[T]\|_2^2 \leq \frac{1}{1-\delta_{K+1}}\|A^*[T]v\|_2^2,$$

在 l_∞ 有界噪声影响下,

$$\begin{aligned}
& \|\hat{x}[T] - x[T]\|_2 \leq \frac{\sqrt{k}}{1-\delta_{K+1}}\|A^*[T]v\|_{2,\infty} \leq \\
& \frac{\sqrt{k}}{1-\delta_{K+1}}\varepsilon \leq \frac{\sqrt{K}}{1-\delta_{K+1}}\varepsilon.
\end{aligned}$$

定理1证明完毕.

通过柯西不等式和 l_2/l_p 混合范数可验证得到, 当 $f(t)=t$ 时, 式(5)仍然成立. 由定理1获得如下推论, 为在 l_∞ 有界噪声环境下利用 BOMP 算法来实现块稀疏信号的稳定恢复提供了充分条件.

推论1 在 l_∞ 有界噪声环境下, 若 A 在 $K+1$ 阶上的块 RIP 满足

$$\delta_{K+1} < \frac{1}{\sqrt{f(K)+1}},$$

那么在 $\|A^*r^k\|_{2,\infty} \leq \varepsilon$ 的停止准则下, BOMP 算法能准确恢复信号, 最小值为

$$\min\|x[i]\|_2 > \frac{\sqrt{2}((\sqrt{K}-1)\delta_{K+1}+1)\varepsilon}{(1-\delta_{K+1})(1-\sqrt{K+1}\delta_{K+1})},$$

信号恢复误差同式(8).

通过下述引理和定理1, 提出 BOMP 算法恢复 α 强衰减块稀疏信号时的块 RIP 和 α 值这两个重要条件, 可在 l_∞ 有界噪声环境中通过迭代实现 α 强衰减块稀疏信号的稳定恢复.

引理4^[6] 对于任意 $0 < i \leq K$, 若函数

$$\Phi_i(t) = \frac{(t+1)(t^i-1)}{(t-1)(t^i+1)}, \quad t > 1,$$

易知 $\Phi_i(t)$ 在 t 上是严格递减的, 并有 $1 = \Phi_1(t) < \Phi_i(t) < i \leq K$.

对于常数 $1 \leq \mu \leq \eta$, 若函数

$$\bar{\Phi}_i(t_1, \dots, t_i, \mu, \eta) = \frac{\left(\sum_{s=1}^{i-1} t_s^2 + \eta t_i\right)^2}{\sum_{s=1}^{i-1} t_s^2 + \mu t_i^2}, \quad 1 \leq i \leq K,$$

其中 $t_1 \geq \alpha t_2 \geq \dots \geq \alpha^{K-1} t_K > 0$, $\sum_{s=1}^0 \cdot = 0$, 得 $\bar{\Phi}_i$ 在 t_i 上是递增函数, 有 $\bar{\Phi}_i(t_1, \dots, t_i, 1, 1) \leq \bar{\Phi}_i(\alpha)$.

定理2 在 $\|A^*v\|_\infty \leq \varepsilon$ 的噪声干扰下, 若 α 强衰减块稀疏信号 x 有 $\alpha > \Phi_K^{-1}(\delta_{K+1}^{-2} - 1)$, 感知矩阵 A 的 $K+1$ 阶约束等距常数满足

$$\delta_{K+1} < \sqrt{2}/2, \quad (28)$$

那么 BOMP 算法在 $\|A^*r^k\|_{2,\infty} \leq \varepsilon$ 的停止准则下能从测量值中准确恢复信号, 最小值为

$$\begin{aligned}
& \min\|x[i]\|_2 > \\
& \frac{\sqrt{2}((\sqrt{K}-1)\delta_{K+1}+1)\varepsilon}{(1-\delta_{K+1})\left(1-\sqrt{\min\{\alpha^{-2}-1, K\}+1}\delta_{K+1}\right)}, \quad (29)
\end{aligned}$$

其中 $\delta_{K+1} < \alpha < \sqrt{2}/2$.

证明 当 $\alpha^{-2}-1 \geq K$ 时, 可知 $\alpha \leq 1/\sqrt{K+1}$. 由 $\delta_{K+1} < \sqrt{2}/2$, 可转化为 $\delta_{K+1} < 1/\sqrt{K+1}$, 通过推论1可证明定理2成立.

当 $\alpha^{-2}-1 \leq K$ 时, 通过引理3可知 $\Phi_K(t) = b$ 有唯一解 t_b , 故其反函数定义为

表 1 BOMP 算法恢复信号的信噪比和误差

块数	稀疏度	长度	无噪声误差/ 10^{-16}	块稀疏信号		强衰减块稀疏信号		
				信噪比	误差	值	信噪比	误差/ 10^{-4}
4	4	400	2.920 3	58.326 4	0.001 2	1.314 7	77.185 3	1.375 9
8	4	800	2.814 0	53.472 5	0.002 1	1.239 8	78.758 2	1.150 8
8	4	1 200	3.114 5	62.225 8	0.000 8	1.452 7	73.391 0	2.135 2
15	12	1 800	4.807 8	49.309 8	0.003 4	1.479 5	96.533 2	1.488 2
30	12	1 800	4.374 5	51.633 1	0.002 6	1.467 3	63.907 1	6.366 0
40	12	2 000	6.297 5	58.476 2	0.001 6	1.022 3	73.839 6	2.026 4

$$\Phi_K^{-1}(b) = \begin{cases} t_b, & 1 < b < K, \\ 1, & b \geq K. \end{cases}$$

由于 $\delta_{K+1} < \alpha < \sqrt{2}/2$, 可知 $\Phi_K^{-1}(\delta_{K+1}^{-2} - 1) < \Phi_K^{-1}(b^{-2} - 1) \leq \alpha$.

根据强衰减的定义得

$$\begin{aligned} \frac{\|\mathbf{x}[\Omega \setminus T]\|_{2,1}^2}{\|\mathbf{x}[\Omega \setminus T]\|_2^2} &= \bar{\Phi}_{|\Omega \setminus T|} \left(\|\mathbf{x}[\Omega \setminus T][1]\|_2 \right), \\ \|\mathbf{x}[\Omega \setminus T][\lceil |\Omega \setminus T| \rceil]\|_{2,1} &\leq \bar{\Phi}_{|\Omega \setminus T|}(\alpha) < \\ \bar{\Phi}_{|\Omega \setminus T|}(\Phi_K^{-1}(b^{-2} - 1)) &< \bar{\Phi}_K(\Phi_K^{-1}(b^{-2} - 1)) = \\ b^{-2} - 1. \end{aligned} \quad (30)$$

利用柯西不等式和范数性质有 $\|\mathbf{x}[\Omega \setminus T]\|_{2,1}^2 \leq |\Omega \setminus T| \|\mathbf{x}[\Omega \setminus T]\|_2^2$, 将其与式(30)结合得

$$\|\mathbf{x}[\Omega \setminus T]\|_{2,1}^2 \leq \min\{\alpha^{-2} - 1, t\} \|\mathbf{x}[\Omega \setminus T]\|_2^2,$$

令 $f(t) = \min\{\alpha^{-2} - 1, t\}$, 因此定理 2 可从定理 1 演绎证明.

3 数值模拟

本文从误差和信噪比的角度分别建立在无噪声和 l_∞ 有界噪声条件下的数值仿真实验. 为了保证算法的有效性, 模拟实验对块稀疏信号采用均匀分块. 实验采用高斯随机矩阵作为感知矩阵 $\mathbf{A}$, 由于测试信号的稀疏度 K 不需要全部模拟, 将感知矩阵 m 维度作为稀疏度 K 的总长度, 每 2 个单位测试一次. 为了保证实验结果的准确性, 将重复 500 次的平均值作为数值模拟结果. 视 $\mathbf{r}^0 = \mathbf{y}$ 为初始条件,

$$\frac{\|\hat{\mathbf{x}}[T] - \mathbf{x}[T]\|_2}{\|\mathbf{x}[T]\|_2} \leq 10^{-6}$$

为无噪声实验中成功恢复的停止条件. 在 l_∞ 有界噪声干扰情况下, 设置 10^{-2} 作为成功恢复的停止条件. 若算法在最大迭代次数中不能满足停止条件,

则实验视为失败.

从表 1 模拟中观察到: (1)信号的随机性会使得每次具体数值结果发生变化, 但始终在特定范围内; (2)块数、稀疏度、长度、信号种类以及有无噪声干扰都会产生一定影响, 在没有噪声干扰情形下的误差远远小于 l_∞ 有界噪声的是合理现象; (3)信噪比越大代表信号受噪声影响强度越小, 表明在实际操作中 BOMP 算法恢复强衰减块稀疏信号比恢复普通信号时所受噪声干扰影响更小; (4)稀疏信号的块数对恢复信号效果产生的影响较大, 实验结果说明不是分块越多恢复效果就越完美, 不同的信号最合适的块数也不同, 例如实验在 l_∞ 有界噪声下恢复信号时, 将普通稀疏信号分成 8 块是恰到好处的, 而强衰减块稀疏信号分成 15 块时信噪比最高而误差也小, 因此在恢复信号时要寻找到最合适的块, 这进一步说明在 BOMP 运行中选择合适块数的重要性, 在日后工作中将研究如何选择最恰当块数以保证算法恢复效率达到最佳水平.

参考文献:

- [1] CANDÈS E J, ROMBERG J, TAO T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(2):489-509.
- [2] CANDÈS E J, WAKIN M B. An introduction to compressive sampling[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2):21-30.
- [3] DONOHO D L. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4):1289-1306.
- [4] SHEN Y, LI S. Sparse signals recovery from noisy measurements by orthogonal matching pursuit[J]. Inverse Problems and Imaging, 2015, 9:231-238.

- [5] CAI T T, WANG L. Orthogonal matching pursuit for sparse signal recovery with noise[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2011, 57(7):4680-4688.
- [6] DONOHO D L, ELAD M, TEMLYAKOV V N. Stable recovery of sparse overcomplete representations in the presence of noise[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(1):6-18.
- [7] ELDAR Y C, KUPPINGER P, BÖLCSKEI H. Block-sparse signals: uncertainty relations and efficient recovery [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010, 58(6): 3042-3054.
- [8] 张迪. 块稀疏信号的相位恢复方法研究[D]. 成都: 电子科技大学, 2022.
- [9] WEN J M, ZHOU Z C, LIU Z L, et al. Sharp sufficient conditions for stable recovery of block sparse signals by block orthogonal matching pursuit[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2019, 47(3):948-974.
- [10] ZHANG X B, XU W B, CUI Y P, et al. On recovery of block sparse signals via block compressive sampling matching pursuit[J]. IEEE Access, 2019, 7:175554-175563.
- [11] ELDAR Y C, MISHALI M. Robust recovery of signals from a structured union of subspaces[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2009, 55(11):5302-5316.
- [12] 徐燕, 邱晓晖. 采用正交多项匹配的块稀疏信号重构算法[J]. 信号处理, 2014, 30(6):706-711.
- [13] LI Y L, CHEN W G. The high order block RIP condition for signal recovery[J]. Journal of Computational Mathematics, 2019, 37(1):61-75.
- [14] Nigam H K, Yadav S. Block-sparse recovery and rank minimization using a weighted l_p-l_q model[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2023, 2023(1):1-17.
- [15] DAI W, MILENKOVIC O. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2009, 55(5):2230-2249.
- [16] SHEN Y, LI B, PAN W L, et al. Analysis of generalised orthogonal matching pursuit using restricted isometry constant[J]. Electronics Letters, 2014, 50(14):1020-1022.
- [17] LIU C, FANG Y, LIU J Z. Some new results about sufficient conditions for exact support recovery of sparse signals via orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017, 65(17):4511-4524.

Sufficient conditions for recovering block sparse noisy signals

SHAN Xi, WANG Jinping

(School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: Compressed sensing uses the compressibility of signals to entirely recover signals by sampling techniques and nonlinear algorithms, hence regarded as an effective signal acquisition technology. Based on the theory of compressed sensing, taking the l_∞ bounded noise as the example, we study the RIP properties in recovering block sparse signals and the strongly-decaying block sparse signals by the BOMP algorithm, and we provide necessary sufficient conditions to ensure recovering the signals. Finally, we analyze and compare the factors which affect the performance of sparse signals by means of numerical experiments

Key words: BOMP algorithm; l_∞ bounded noise; block sparse signal; strongly-decaying block sparse signal

(责任编辑 韩 超)