

DOI: 10.20098/j.cnki.1001-5132.2023.0705

(1+1)维的具有时间与空间色散的五阶方程

杨林燕, 季泳*

(宁波大学 数学与统计学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 研究了一个新的(1+1)维的具有时空色散可积五阶方程, 推广了方程的形式, 并探讨了色散关系及其各自的系数情况. 利用简化 Hirota 方法推导了方程的可积条件, 导出了多孤子解. 此外, 利用指数型初始解构造方程的变换, 得出双线性方程, 继而利用 Hirota 双线性导数法导出单孤子解、双孤子解及 N 孤子解. 结合双线性方程给出了不同双线性交换算子的双线性 Bäcklund 变换, 继而导出不同条件下的双曲行波解、周期行波解等行波解.

关键词: Hirota 方法; 孤子解; 双线性 Bäcklund 变换; 行波解; 简化 Hirota 方法

中图分类号: O175.29

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2024) 03-0050-07

近年来, 对非线性偏微分方程(NLNPDE)及其解析行波解的研究不断深入, 在反散射变换、Hirota 双线性方法、简化 Hirota 方法、Bäcklund 变换、达布变换、Lax 对、黎曼-希尔伯特法、正弦余弦法、KP 层次约简法、规范变换法、李对称法等开发方面取得了重大进展^[1-6].

Hirota 双线性方法^[3]和简化 Hirota 方法^[4]在处理常系数方程方面有一定的启发性和独特性, 因此在多个局部非线性波解中被广泛使用.

有学者对具有不同时间和空间的各种可积系统进行了研究. 如 Korteweg-de Vries(KdV)和修正 KdV 类型, 这是由一阶时间演化组成的 u_t 的非线性模型, 一般用来描述单向波传播; 再如 Boussinesq 方程, 这是包含二阶时间演化的 u_{tt} 的可积孤子模型, 一般用来阐述双方向传播的波.

从文献[7-9]可知, 广义五阶 KdV 方程为:

$$u_t + \alpha u^2 u_x + \beta u_x u_{xx} + \gamma u u_{3x} + u_{5x} = 0,$$

式中: α 、 β 和 γ 是任意参数; u_{3x} 表示 u 的 3 阶偏导, u_{5x} 表示 u 的 5 阶偏导, 下文同.

广义五阶 KdV 方程有以下 4 种形式:

(1)Lax 方程:

$$u_t + 30u^2 u_x + 20u_x u_{xx} + 10u u_{3x} + u_{5x} = 0.$$

(2)Sawada-Kotera(SK)方程:

$$u_t + 5u^2 u_x + 5u_x u_{xx} + 5u u_{3x} + u_{5x} = 0.$$

(3)Kaup-Kupershmidt 方程:

$$u_t + 20u^2 u_x + 25u_x u_{xx} + 10u u_{3x} + u_{5x} = 0.$$

(4)Ito 方程:

$$u_t + 2u^2 u_x + 6u_x u_{xx} + 3u u_{3x} + u_{5x} = 0.$$

文献[9]提出了 Boussinesq 方程:

$$u_{tt} + p u_{xx} + q(u^2)_{xx} + r u_{4x} = 0,$$

式中: p 、 q 和 r 是常数, 下标表示微分.

然而, 目前对具有三阶时间演化 u_{ttt} 的非线性模型研究很少, 因此有必要对这种非线性模型中的可积性质和非线性波结构进行探讨. Schelte 等^[10]探讨了没有二阶扩散的三阶色散时滞系统; Ashmead^[11]主张时间色散与空间色散出现的基础相同. 关于空间色散已有大量的研究成果, 但有关时间色散的研究相对较少. Wazwaz^[12]开发了一种新的具有三阶时间色散的五阶非线性可积方程:

$$u_{ttt} - u_{xxxxx} - 4(u_x u_t)_{xx} - 4(u_x u_{xt})_x = 0, \quad (1)$$

并利用简化 Hirota 方法推导了多个孤子解, 从而确定了该方程的可积性.

收稿日期: 2023-07-10.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journal.g.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(12101340).

第一作者: 杨林燕, 硕士研究生, 主要研究方向: 可积系统. E-mail: 2641708691@qq.com

*通信作者: 季泳, 讲师, 主要研究方向: 动力系统及遍历理论. E-mail: imjiyong@126.com

Wazwaz^[13]研究了一个新的广义五阶非线性可积方程, 利用简化 Hirota 方法推导了方程完全可积的条件, 并推导出多孤子解.

$$u_{ttt} - u_{txxxx} - \alpha(u_x u_t)_{xx} - \beta(u_x u_{xt})_x = 0,$$

或

$$u_{ttt} - u_{txxxx} - \alpha(u_x u_t)_{xx} - \beta(u_x u_{xx})_t = 0,$$

式中: α 和 β 是参数.

对于不同情况下 α 和 β 的广义方程, 分析其可积性与孤子解.

Wazwaz^[14]提出了一个新的(3+1)维具有三阶时空色散可积五阶方程, 并通过 Painlevé 分析证明其可积. 同样地, 采用简化 Hirota 方法, 得到了多孤子解.

$$u_{ttt} - u_{txxxx} - 4(u_x u_t)_{xx} - 4(u_x u_{xt})_x + (\alpha u_x + \beta u_y + \gamma u_z)_{xx} = 0. \quad (2)$$

在式(1)中加入了 u_{xxx} 、 u_{xyy} 和 u_{xzz} 三个空间色散项, 参数 α 、 β 和 γ 是这些项的系数.

Adeyemo 等^[15]对式(2)进行了李群分析, 并利用 Ibragimov 定理得到其守恒律. Singh 等^[16]讨论了式(2)在一定空间变化背景下的块状和孤子解. 目前, 恒定背景下的非线性波研究已较为深入, 但可变背景的研究较少. 近年来, 可变背景下局域非线性波是从光学到流体动力学系统研究的重要工作之一. 在非线性光学背景下, 不断变化的空间和时间背景对孤子、呼吸子、怪波有一定影响^[17]. 因此, 关于式(2)在可变背景下的工作值得探讨.

本文在 Singh 等^[16]研究基础上, 对可控空间背景影响下(1+1)维具有三阶时间色散的五阶可积孤子模型进行了研究.

1 一种新的广义五阶非线性方程

(3+1)维的五阶方程(式(2))是描述具有高阶时间色散的水波演化的非线性模型, 表征了不同空间变化背景下的块状波和孤立波的动力学. 式(2)适用于海洋物理学等非线性科学, 在海洋物理学中具有重要应用. 作变换 $u = u(x - \beta y - \gamma z, y, z, t)$ 可消除变量 y 和 z , 因此(3+1)维的五阶方程(2)可视为(1+1)维的方程. 故本文考虑一种新的(1+1)维具有时间和空间广义五阶的非线性方程:

$$u_{ttt} - u_{txxxx} - A_1(u_x u_t)_{xx} - A_2(u_x u_{xt})_x +$$

$$\alpha u_{xxx} = 0, \quad (3)$$

式中: A_1 和 A_2 是任意常数; 参数 α 是色散项系数.

为推导式(3)的多孤子解, 利用简化的 Hirota 方法. 假设

$$u(x, t) = e^{\eta_i}, \eta_i = k_i x - w_i t, \quad (4)$$

将式(4)代入式(3), 得到如下色散关系:

$$w_i(w_i^2 - k_i^4) = \alpha k_i^3, i = 1, 2, \dots, N.$$

假设单孤子解^[6]为:

$$u(x, t) = R(\ln f(x, t))_x, \quad (5)$$

将式(5)代入式(3), 其中单孤子解的辅助函数 $f(x, t)$ 为:

$$f(x, t) = 1 + e^{k_1 x - w_1 t}. \quad (6)$$

为确定 R , 需要把式(6)代入式(3), 得到:

$$R = \frac{12}{2A_1 + A_2}.$$

针对不同情况 A_1 和 A_2 , 会有以下几种类型:

类型 I 对于 $A_1 = A_2$, 有:

$$u(x, t) = \frac{4}{A_1} (\ln f(x, t))_x, \quad (7)$$

反过来, 能够得到单孤子解:

$$u(x, t) = \frac{4k_1 e^{k_1 x - w_1 t}}{A_1 (1 + e^{k_1 x - w_1 t})}. \quad (8)$$

单孤子奇异解为:

$$u(x, t) = -\frac{4k_1 e^{k_1 x - w_1 t}}{A_1 (1 - e^{k_1 x - w_1 t})}.$$

对于双孤子解, 利用辅助函数:

$$f(x, t) = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}}, \quad (9)$$

将式(9)代入式(7), 继而代入式(3), 得到相位差为:

$$e^{A_{12}} = \frac{k_1^2 k_2^2 (k_1 - k_2)^2 + (w_1 k_2 - w_2 k_1)^2}{k_1^2 k_2^2 (k_1 + k_2)^2 + (w_1 k_2 - w_2 k_1)^2},$$

可得双孤子解为:

$$u(x, t) = \frac{4}{A_1} \left[k_1 e^{\eta_1} + k_2 e^{\eta_2} + (k_1 + k_2) e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}} \right] / (1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}}).$$

同样操作, 可得三孤子解. 利用

$$f(x, t) = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_3} + e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}} + e^{\eta_1 + \eta_3 + A_{13}} + e^{\eta_2 + \eta_3 + A_{23}} + e^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + A_{123}}, \quad (10)$$

将式(10)代入式(3), 得到:

$$e^{A_{123}} = e^{A_{12}} e^{A_{13}} e^{A_{23}}.$$

利用式(10)和式(7)能够得到三孤子,表明式(3)是可积的,且其有 N 孤子解. 有趣的是, Wazwaz^[14]研究的 $A_1 = A_2 = 4$ 是一种特殊情况.

类型 II 对于 $A_1 = 0, A_2 \neq 0$, 式(3)可约化为:

$$u_{ttt} - u_{txxxx} - A_2(u_x u_{xt})_x + \alpha u_{xxx} = 0, \quad (11)$$

在这种情况下,能够得到:

$$u(x, t) = \frac{12}{A_2} (\ln f(x, t))_x. \quad (12)$$

反过来,可以给出单孤子解:

$$u(x, t) = \frac{12k_1 e^{k_1 x - w_1 t}}{A_2 (1 + e^{k_1 x - w_1 t})},$$

然而,单孤子奇异解为:

$$u(x, t) = -\frac{12k_1 e^{k_1 x - w_1 t}}{A_2 (1 - e^{k_1 x - w_1 t})}.$$

对于双孤子解,利用辅助函数:

$$f(x, t) = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}}, \quad (13)$$

将式(13)代入式(12),再代入式(11),发现得不到双孤子解. 同样也得不到三孤子解及多孤子解. 因此,在 $A_1 = 0, A_2 \neq 0$ 情况下,式(11)是不可积的.

类型 III 如果 $A_1 \neq 0, A_2 = 0$, 式(3)可约化为:

$$u_{ttt} - u_{txxxx} - A_1(u_x u_t)_{xx} + \alpha u_{xxx} = 0,$$

在这种情况下,能够得到:

$$u(x, t) = \frac{6}{A_1} (\ln f(x, t))_x,$$

单孤子解为:

$$u(x, t) = \frac{6k_1 e^{k_1 x - w_1 t}}{A_1 (1 + e^{k_1 x - w_1 t})},$$

能够得到单孤子奇异解:

$$u(x, t) = -\frac{6k_1 e^{k_1 x - w_1 t}}{A_1 (1 - e^{k_1 x - w_1 t})}.$$

值得注意的是,不能得到双孤子解、三孤子解及多孤子解,这意味着在 $A_1 \neq 0, A_2 = 0$ 的情况下也是不可积的.

类型 IV 如果 $A_1 \neq A_2, A_1, A_2 \neq 0$, 方程如式(3)所示. 在这种情况下得到:

$$u(x, t) = \frac{12}{2A_1 + A_2} (\ln f(x, t))_x,$$

这也给出了单孤子解:

$$u(x, t) = \frac{12k_1 e^{k_1 x - w_1 t}}{(2A_1 + A_2)(1 + e^{k_1 x - w_1 t})},$$

单孤子奇异解也容易得到:

$$u(x, t) = -\frac{12k_1 e^{k_1 x - w_1 t}}{(2A_1 + A_2)(1 - e^{k_1 x - w_1 t})}.$$

同样,这也不能得到双孤子解、三孤子解和多孤子解,意味着在 $A_1 \neq A_2, A_1 \neq 0, A_2 \neq 0$ 情况下也是不可积的.

2 孤子解

本文利用 Hirota 双线性方法研究孤子解,主要包括单孤子解、双孤子解和三孤子解,最后给出 N 孤子解的形式. 考虑式(3)在 $A_1 = A_2 = 4$ 情况下的形式为:

$$u_{ttt} - u_{txxxx} - 4(u_x u_t)_{xx} - 4(u_x u_{xt})_x + \alpha u_{xxx} = 0. \quad (14)$$

为了能够得到双线性形式,作如下变换:

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = x + ct.$$

假设式(14)的变换形式为:

$$u(\xi) = u_0 + [\ln f(\xi)]_\xi, \quad (15)$$

则式(14)的双线性形式为:

$$[c(ff_{\xi\xi\xi\xi} - 4f_\xi f_{3\xi} + 3f_{\xi\xi}^2) - v(ff_{\xi\xi} - f_\xi^2)]_{\xi\xi} = 0.$$

利用双线性导数相关性:

$$D_x^4 f \cdot f = 2(ff_{xxxx} - 4f_x f_{xxx} + 3f_{xx}^2),$$

$$D_x^2 f \cdot f = 2(ff_{xx} - f_x^2),$$

$$D_x D_y f \cdot f = 2(ff_{xy} - f_x f_y),$$

则式(14)可写成双线性导数方程:

$$(cD_\xi^4 - vD_\xi^2) f \cdot f = 0, \quad (16)$$

式中: $v = \alpha + c^3$; D 是 Hirota 双线性算子^[3], 定义:

$$D_x^m D_t^n P(x, t) Q(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^m.$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right)^n P(x, t) Q(x', t') \Big|_{x=x', t=t'}.$$

为了创建多孤子解,用由 Hirota^[3]设计的 N 孤子解的封闭表达式,对于 Cole-Hopf 变换式(15)函数 f 为:

$$f = \sum_{\mu=0,1} e^{\sum_{j=1}^n \mu_j \eta_j + \sum_{1 \leq j < l \leq n} \mu_j \mu_l A_{jl}},$$

其中 μ 的求和应取 $\mu_j = 0, 1, j = 1, 2, \dots$ 的所有可能的组合.

当 $N=1$ 时, $\mu_1=0, 1$ 有 2 种可能, 因此 $f = 1 + e^{\eta_1}$.

当 $N=2$ 时, $\mu_1, \mu_2 = 0, 1$, 因此有 4 种可能, 即 $(0, 0)$ 、 $(0, 1)$ 、 $(1, 0)$ 和 $(1, 1)$. 故:

$$f = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}}.$$

当 $N=3$ 时, $\mu_1, \mu_2, \mu_3 = 0, 1$, 因此有 8 种可能, 即 $(0, 0, 0)$ 、 $(0, 0, 1)$ 、 $(0, 1, 0)$ 、 $(1, 0, 0)$ 、 $(1, 1, 0)$ 、 $(1, 0, 1)$ 、 $(0, 1, 1)$ 和 $(1, 1, 1)$. 故:

$$f = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_3} + e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}} + e^{\eta_1 + \eta_3 + A_{13}} + e^{\eta_2 + \eta_3 + A_{23}}.$$

设 f 可以按照参数 ε 展开成级数

$$f = 1 + f^{(1)}\varepsilon + f^{(2)}\varepsilon^2 + \dots + f^{(j)}\varepsilon^j + \dots \quad (17)$$

将式(17)代入式(16), 并比较 ε 的同次幂系数给出:

$$\begin{aligned} cf_{\xi\xi\xi\xi}^{(1)} - \nu f_{\xi\xi}^{(1)} &= 0, \\ 2(cf_{\xi\xi\xi\xi}^{(2)} - \nu f_{\xi\xi}^{(2)}) &= -(cD_{\xi}^4 - \nu D_{\xi}^2)f^{(1)} \cdot f^{(1)}, \\ (cf_{\xi\xi\xi\xi}^{(3)} - \nu f_{\xi\xi}^{(3)}) &= -(cD_{\xi}^4 - \nu D_{\xi}^2)f^{(1)} \cdot f^{(2)}, \\ 2(cf_{\xi\xi\xi\xi}^{(4)} - \nu f_{\xi\xi}^{(4)}) &= -(cD_{\xi}^4 - \nu D_{\xi}^2) \cdot \\ &\quad (2f^{(1)} \cdot f^{(3)} + f^{(2)} \cdot f^{(2)}), \dots \end{aligned} \quad (18)$$

2.1 单孤子解

从式(18)第一个式子的形式, 可设 $f^{(1)}$ 为线性指数函数解:

$$f^{(1)} = e^{\eta_1}, \eta_1 = \theta_1 \xi + \delta_1,$$

利用得到的 $f^{(1)}$ 代入式(18)第二个式子, 再结合双线性导数性质得:

$$cf_{\xi\xi\xi\xi}^{(2)} - \nu f_{\xi\xi}^{(2)} = 0.$$

如果此时取 $f^{(2)} = 0$, 那么利用式(18)第三个式子, 得到:

$$cf_{\xi\xi\xi\xi}^{(3)} - \nu f_{\xi\xi}^{(3)} = 0.$$

同样可得 $f^{(3)} = 0$. 类似操作可以得出 $f^{(4)} = f^{(5)} = \dots = 0$, 则当 $\varepsilon = 1$ 时, 式(17)可约化为:

$$f = 1 + f^{(1)} = 1 + e^{\eta_1},$$

则单孤子解为:

$$u = u_0 + \frac{\theta_1 e^{\eta_1}}{1 + e^{\eta_1}}, \eta_1 = \theta_1 \xi + \delta_1.$$

2.2 双孤子解

因式(18)第一个式子是线性微分方程, 所以其有迭加形式解, 即

$$f^{(1)} = e^{\eta_1} + e^{\eta_2}, \eta_j = \theta_j \xi + \delta_j, j = 1, 2, \quad (19)$$

将式(19)代入式(18)第二个式子, 可得:

$$2(cf_{\xi\xi\xi\xi}^{(2)} - \nu f_{\xi\xi}^{(2)}) = -6c\theta_1\theta_2(\theta_1 - \theta_2)^2 e^{\eta_1 + \eta_2},$$

解得:

$$f^{(2)} = e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}}, e^{A_{12}} = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2.$$

从式(18)第三个式子和 $f^{(1)}$ 、 $f^{(2)}$ 可知:

$$cf_{\xi\xi\xi\xi}^{(3)} - \nu f_{\xi\xi}^{(3)} = 0,$$

则双孤子解为:

$$u = u_0 + \left[\ln(1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}}) \right]_{\xi},$$

式中:

$$\eta_j = \theta_j \xi + \delta_j, j = 1, 2, e^{A_{12}} = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2.$$

2.3 三孤子解

同样利用 Hirota 方法, 计算出三孤子解为:

$$u = u_0 + \left[\ln(1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_3} + e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}} + e^{\eta_1 + \eta_3 + A_{13}} + e^{\eta_2 + \eta_3 + A_{23}} + e^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + A_{12} + A_{13} + A_{23}}) \right]_{\xi},$$

式中:

$$\begin{aligned} \eta_j &= \theta_j \xi + \delta_j, \\ e^{A_{j,l}} &= \left(\frac{k_j - k_l}{k_j + k_l} \right)^2, j < l, \text{ 且 } j, l = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

2.4 N 孤子解

$$u = u_0 + \left[\ln \left(\sum_{\mu=0,1} e^{\sum_{j=1}^n \mu_j \eta_j + \sum_{1 \leq j < l \leq n} \mu_j \mu_l A_{j,l}} \right) \right]_{\xi},$$

式中: $\sum_{\mu=0,1}$ 表示对于 $\mu_j = 0, 1$ 的所有可能的组合求和.

3 双线性 Bäcklund 变换

首先考虑一般方程的一个解 f :

$$F(D_t, D_x, D_y) f \cdot f = 0$$

和相同的双线性方程的另一个解 g :

$$F(D_t, D_x, D_y)g \bullet g = 0.$$

如果

$$Q = [F(D_t, D_x, D_y)g \bullet g]f^2 -$$

$$g^2[F(D_t, D_x, D_y)f \bullet f] = 0,$$

则 f 是第一个双线性方程的一个解, 当且仅当 g 是第二个双线性方程的一个解. 如果能从 $Q = 0$ 中得到一对双线性方程:

$$F_1(D_t, D_x, D_y)g \bullet f = 0,$$

$$F_2(D_t, D_x, D_y)g \bullet f = 0,$$

其中对双线性中 f 与 g 交换位置, 即为 Bäcklund 变换.

为寻找式(14)的双线性形式(式(16))的解 f 和 g 之间的某些双线性 Bäcklund 变换, 利用 Hirota^[3]的 D 算子的恒等交换, 获得双线性 Bäcklund 变换. 考虑以下形式:

$$Q = [(cD_\xi^4 - vD_\xi^2)g \bullet g]f^2 - [(cD_\xi^4 - vD_\xi^2)f \bullet f]g^2. \quad (20)$$

利用双线性算子的交换公式:

$$(D_\xi^2 g \bullet g)f^2 - g^2(D_\xi^2 f \bullet f) =$$

$$2D_\xi(D_\xi g \bullet f) \bullet (fg),$$

$$(D_\xi D_y g \bullet g)f^2 - g^2(D_\xi D_y f \bullet f) =$$

$$2D_\xi(D_y g \bullet f) \bullet (fg),$$

$$(D_\xi^4 g \bullet g)f^2 - g^2(D_\xi^4 f \bullet f) =$$

$$2D_\xi(D_\xi^3 g \bullet f) \bullet (fg) -$$

$$6D_\xi(D_\xi^2 g \bullet f) \bullet (D_\xi g \bullet f). \quad (21)$$

选择不同的双线性算子交换公式, 可以得到不同双线性 Bäcklund 变换和孤子解, 分别为:

情形 I 将式(21)代入式(20)可得:

$$Q = [(cD_\xi^4 - vD_\xi^2)g \bullet g]f^2 - [(cD_\xi^4 - vD_\xi^2)f \bullet f]g^2 =$$

$$c[(D_\xi^4 g \bullet g)f^2 - g^2(D_\xi^4 f \bullet f)] -$$

$$v[(D_\xi^2 g \bullet g)f^2 - g^2(D_\xi^2 f \bullet f)] =$$

$$c[2D_\xi(D_\xi^3 g \bullet f) \bullet (fg) -$$

$$6D_\xi(D_\xi^2 g \bullet f) \bullet (D_\xi g \bullet f)] -$$

$$2vD_\xi(D_\xi g \bullet f) \bullet (fg) =$$

$$2D_\xi[(cD_\xi^3 - (v + 3c\lambda)D_\xi)g \bullet f] \bullet$$

$$(fg) + 6cD_\xi[(D_\xi^2 - \mu D_\xi - \lambda)g \bullet f] \bullet$$

$$(D_\xi g \bullet f),$$

则取 $D_\xi[(D_\xi^2 - \mu D_\xi - \lambda)g \bullet f] \bullet (D_\xi g \bullet f) = 0$, 可以得到式(14)的双线性 Bäcklund 变换为:

$$u = u_0 + [\ln f]_\xi,$$

$$v = v_0 + [\ln g]_\xi,$$

$$(cD_\xi^3 - (v + 3c\lambda)D_\xi)g \bullet f = 0,$$

$$(D_\xi^2 - \mu D_\xi - \lambda)g \bullet f = 0, \quad (22)$$

式中: v 是式(14)的另一个解.

事实上, 双线性 Bäcklund 变换本质上被定义为一个方程组, 它连接了方程的两个解. 对于解 u 和 v 的双线性 Bäcklund 变换是一致的, 故在原则上可以逐步构造出越来越复杂的方程式解.

因此利用双线性 Bäcklund 变换, 能构造出在具有初始函数 f 和 g 的任意空间背景下的解.

行波解. 首先选取 $f = 1$ 作为式(14)的解, 假设 $g = 1 + \varepsilon e^{k\xi}$, 然后去解式(22), 能够得到:

$$ck^2 = v + 3c\lambda,$$

$$\mu = (k^2 - \lambda) / k,$$

式中: p 和 q 是实常数.

因此, 式(22)的解为:

$$f = 1, g = 1 + \varepsilon e^{k\xi},$$

并且得出式(14)的行波解为:

$$u = u_0 + \frac{\varepsilon k e^{k\xi}}{1 + \varepsilon e^{k\xi}}. \quad (23)$$

情形 II 将式(21)代入式(20), 并且假设

$$D_\xi^2 g \bullet f = \delta_1 fg,$$

可推导出

$$Q = [(cD_\xi^4 - vD_\xi^2)g \bullet g]f^2 -$$

$$[(cD_\xi^4 - vD_\xi^2)f \bullet f]g^2 =$$

$$c[(D_\xi^4 g \bullet g)f^2 - g^2(D_\xi^4 f \bullet f)] -$$

$$v[(D_\xi^2 g \bullet g)f^2 - g^2(D_\xi^2 f \bullet f)] =$$

$$c[2D_\xi(D_\xi^3 g \bullet f) \bullet (fg) -$$

$$6D_{\xi}(D_{\xi}^2 g \bullet f) \bullet (D_{\xi} g \bullet f) - \\ 2\nu D_{\xi}(D_{\xi} g \bullet f) \bullet (fg) = \\ 2D_{\xi}[(cD_{\xi}^3 + 3\delta_1 cD_{\xi} - \nu D_{\xi})g \bullet f] \bullet (fg),$$

得到式(14)的双线性 Bäcklund 变换为:

$$u = u_0 + [\ln f]_{\xi}, \\ v = v_0 + [\ln g]_{\xi}, \\ (cD_{\xi}^3 + 3\delta_1 cD_{\xi} - \nu D_{\xi})g \bullet f = 0, \\ (D_{\xi}^2 - \delta_1)f \bullet g = 0. \quad (24)$$

利用以上双线性 Bäcklund 变换方程, 可以得到双曲行波解和周期行波解.

双曲行波解. 首先选取 $f=1$ 作为式(14)的解, 假设 $g = \cosh(k_1\xi + r_1)$, 然后解式(24), 得到:

$$f=1, g = \cosh(k_1\xi + r_1),$$

因此, 能够得到式(14)的双曲行波解为:

$$u(x, t) = u_0 + [\ln g]_{\xi} = u_0 + g_{\xi} / g = \\ u_0 + \frac{k_1 \sinh(k_1\xi + r_1)}{\cosh(k_1\xi + r_1)} = \\ u_0 + k_1 \tanh(k_1(x + ct) + r_1). \quad (25)$$

另外, 若选取 $f=1$ 作为式(14)的解, 假设 $g = \sinh(k_1\xi + r_1)$, 然后去解式(24), 能够得到式(14)的双曲行波解为:

$$u(x, t) = u_0 + k_1 \coth(k_1(x + ct) + r_1). \quad (26)$$

周期行波解. 首先, 选取 $f=1$ 作为式(14)的解, 假设 $g = \cos(k_1\xi + r_1)$, 然后去解式(24), 得到:

$$f=1, g = \cos(k_1\xi + r_1),$$

因此式(14)的周期行波解为:

$$u(x, t) = u_0 - k_1 \tan(k_1(x + ct) + r_1). \quad (27)$$

另外, 若选取 $f=1$ 作为式(14)的解, 假设 $g = \sin(k_1\xi + r_1)$, 然后去解式(24), 得到:

$$f=1, g = \sin(k_1\xi + r_1),$$

因此, 能够得到式(14)的周期行波解为:

$$u(x, t) = u_0 + k_1 \cot(k_1(x + ct) + r_1). \quad (28)$$

事实上, 通过使用不同的初始种子解, 上述双线性 Bäcklund 变换可以得到不同的行波解. 值得注意的是, 上述内容的周期解、双曲解和行波解表现出任意的背景 u_0 , 这也为潜在的波提供了富有

成效的动力结构.

4 结论

研究了一个新的(1+1)维的具有时空色散可积五阶方程. 首先推广了方程的形式, 并探讨了式(3)在不同 A_1 和 A_2 情况下的可积性, 发现只有在 $A_1 = A_2$ 时方程可积, 利用简化 Hirota 方法给出了单孤子解、双孤子解和三孤子解. 其次在可积情况下, 利用 Hirota 双线性导数法推导了双线性方程(式(16)), 并给出了单孤子解、双孤子解和 N 孤子解. 再次利用双线性算子的不同交换公式, 得到了式(14)的2个双线性 Bäcklund 变换, 基于上述变换分别导出行波解(式(23))、双曲行波解(式(25)和式(26))、周期行波解(式(27)和式(28)).

参考文献:

- [1] YANG J K. Nonlinear waves in integrable and nonintegrable systems[M]. Philadelphia, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2010.
- [2] 张翼. 基于双线性方法的孤子可积系统[D]. 上海: 上海大学, 2005.
- [3] HIROTA R. The direct method in soliton theory[M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004.
- [4] HEREMAN W, NUSEIR A. Symbolic methods to construct exact solutions of nonlinear partial differential equations[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 1997, 43(1):13-27.
- [5] 张增辉, 董焕河. 双线性简化方法求解两种孤子方程的新解[J]. 山东理工大学学报(自然科学版), 2011, 25(3):14-16.
- [6] HEREMAN W. Exact solitary wave solutions of coupled nonlinear evolution equations using MACSYMA[J]. Computer Physics Communications, 1991, 65(1/2/3):143-150.
- [7] LEE C T. Some remarks on the fifth-order KdV equations[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2015, 425(1):281-294.
- [8] WAZWAZ A M. Abundant solitons solutions for several forms of the fifth-order KdV equation by using the tanh method[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 182(1):283-300.
- [9] BOUSSINESQ J. Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des

- vitesse sensiblement pareilles de la surface au fond[J]. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 1872, 17: 55-108.
- [10] SCHELTE C, CAMELIN P, MARCONI M, et al. Third order dispersion in time-delayed systems[J]. Physical Review Letters, 2019, 123(4):043902.
- [11] ASHMEAD J. Time dispersion in quantum mechanics [EB/OL]. [2023-07-10]. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1239/1/012015>.
- [12] WAZWAZ A M. A new fifth-order nonlinear integrable equation: multiple soliton solutions[J]. Physica Scripta, 2011, 83(1):015012.
- [13] WAZWAZ A M. A new generalized fifth-order nonlinear integrable equation[J]. Physica Scripta, 2011, 83(3):035003.
- [14] WAZWAZ A M. New (3+1)-dimensional Painlevé integrable fifth-order equation with third-order temporal dispersion[J]. Nonlinear Dynamics, 2021, 106(1):891-897.
- [15] ADEYEMO O D, KHALIQUE C M. Abundant invariant and classical solutions with the conservation laws of a new (3+1)-dimensional fifth-order nonlinear Wazwaz equation with the third-order dispersion terms in ocean physics[EB/OL]. [2023-07-10]. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0577907322002684>.
- [16] SINGH S, SAKKARAVARTHI K, MURUGESAN K. Lump and soliton on certain spatially-varying backgrounds for an integrable (3+1) dimensional fifth-order nonlinear oceanic wave model[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2023, 167:113058.
- [17] SAKKARAVARTHI K, KANNA T, MAREESWARAN R B. Higher-order optical rogue waves in spatially inhomogeneous multimode fiber[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 2022, 435:133285.

(1+1) dimensional fifth-order equations with temporal and spatial dispersion

YANG Linyan, JI Yong

(School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: In this paper, a new (1+1) dimensional equation with space-time dispersion integrable fifth-order equation is studied, the form of the equation is generalized, and the dispersion relationship and its respective coefficients are discussed. The integrable conditions of the equation are derived using the simplified Hirota method, and the multi-solution is also derived. In addition, the bilinear equation is obtained using the transformation of the exponential initial solution to construct the equation, and then the Hirota bilinear derivative method is used to derive the single solitary, double solitary and N solitary solution. The bilinear equation gives the bilinear Bäcklund transform of different bilinear exchange operators, and then the hyperbolic traveling wave solution and periodic traveling wave solution are derived under different conditions.

Key words: Hirota method; solitary solution; bilinear Bäcklund transform; traveling wave solution; simplified Hirota method

(责任编辑 史小丽)