

DOI: 10.20098/j.cnki.1001-5132.2024.0412

一个圆环上全纯映射的 Nevanlinna 理论第二基本定理

高玉辉, 于光升*

(宁波大学 数学与统计学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 为了建立圆环上的全纯映射和处于强 ℓ -次一般位置的超曲面交的第二基本定理, 采用了 Nochka 权方法. 首先用 Nochka 权将关于所有超曲面的 Weil 函数用部分超曲面的 Weil 函数控制; 然后将超曲面嵌入到高维射影空间中变成超平面, 并构造线性非退化全纯映射; 进而利用圆环上关于超平面推广的 Cartan 第二基本定理, 给出圆环上代数非退化全纯映射和超曲面处于强 ℓ -次一般位置的第二基本定理.

关键词: Nevanlinna 理论; 强 ℓ -次一般位置; 第二基本定理; Nochka 权

中图分类号: O174

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2024) 05-0041-07

Nevanlinna 理论起源于对亚纯函数值分布的研究. Nevanlinna^[1]将经典的皮卡小定理进行推广, 证明了现在所谓的第一和第二基本定理. Cartan^[2]把 Nevanlinna 的结果推广到高维复射影空间, 建立了线性非退化全纯曲线和处于一般位置的超平面交的第二基本定理. Ahlfors^[3]用几何方法给出了类似结果. Carlson 等^[4]证明了高维等维情形全纯映射的第二基本定理. Ru^[5]给出了代数非退化全纯曲线和处于一般位置的超曲面交情形的第二基本定理.

定理 1^[5] 设 V 是 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 中维数为 $k(\geq 1)$ 的代数簇, $D_1, \dots, D_q$ 是 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 中的一簇超曲面, 记 D_j 的次数为 $d_j (1 \leq j \leq q)$. 设 $D_1, \dots, D_q$ 在 V 中处于一般位置(任意 $(k+1)$ 个超曲面与 V 相交为空集). 若 $f: \mathbb{C} \rightarrow V$ 是一个代数非退化全纯映射, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 有:

$$\left\| \sum_{j=1}^q d_j^{-1} m_f(r, D_j) \right\| \leq (k+1+\varepsilon) T_f(r),$$

这里(以及后续)“ $\|$ ”表示上述不等式对除掉一个 Lebesgue 测度有限的集合外的所有 r 成立.

圆环上亚纯函数 Nevanlinna 理论的发展起源于研究复微分方程解增长性质的应用. Bieberbach^[6]

系统定义了圆环上亚纯函数的 Nevanlinna 函数, 并证明了许多圆环上亚纯函数的 Nevanlinna 理论结果. 2015 年, Phuong 等^[7]建立了圆环上的线性非退化全纯映射和复射影空间中处于一般位置的超平面交情形的第二基本定理. 2022 年, Phuong 等^[8]把文献[7]中的结果推广到代数非退化全纯映射和复射影空间中处于一般位置的超曲面交情形.

设 $R_0 > 0$, 令

$$\Delta_{R_0} := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{R_0} < |z| < R_0 \right\},$$

以下简记 $\Delta := \Delta_{R_0}$.

定理 2(文献[8]中定理 1.2) 设 $D_1, \dots, D_q$ 是 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 中一簇超曲面, 记 D_j 的次数为 $d_j (1 \leq j \leq q)$. 设 $D_1, \dots, D_q$ 在 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 中处于一般位置. 若 $f: \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 是一个代数非退化全纯映射, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 有:

$$\left\| \sum_{j=1}^q d_j^{-1} m_f(r, D_j) \right\| \leq (n+1+\varepsilon) T_f(r).$$

Dethloff 等^[9]利用 Nochka 权方法, 建立了代数非退化全纯曲线和处于强 ℓ -次一般位置的超曲面交的第二基本定理.

收稿日期: 2024-04-08.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journalg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(12271275).

第一作者: 高玉辉, 硕士研究生, 主要研究方向: 多复变. E-mail: 2476435354@qq.com

*通信作者: 于光升, 博士/副教授, 主要研究方向: 多复变. E-mail: yuguangsheng@nbu.edu.cn

定义 1(文献[9]中定义 1.1) 设 V 是 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 中维数为 $k(\geq 1)$ 的代数子簇, $D_1, \dots, D_q$ 是 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 中一簇超曲面, 称 $D_1, \dots, D_q$ 是在 V 中处于强 ℓ -次一般位置 ($q > \ell \geq k \geq 1$), 如果下列条件成立:

(i) 对任意 $\{D_{i_1}, \dots, D_{i_\mu}\} \subset \{D_1, \dots, D_q\}$, $\bigcap_{k=1}^\mu D_{i_k} \cap V$ 的每个不可约分支的维数相同, $1 \leq \mu \leq \ell$.

(ii) 对任意 $\{D_{i_1}, \dots, D_{i_{\ell+1}}\} \subset \{D_1, \dots, D_q\}$, $\bigcap_{j=1}^{\ell+1} D_{i_j} \cap V = \emptyset$.

定理 3(文献[9]中定理 1.3) 设 V 是 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 中维数为 $k(\geq 1)$ 的代数子簇, $D_1, \dots, D_q$ 是 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 中的一簇超曲面, 记 D_j 的次数为 d_j ($1 \leq j \leq q$), $D_1, \dots, D_q$ 在 V 中处于强 ℓ -次一般位置. 若 $f: \mathbb{C} \rightarrow V$ 是一个代数非退化全纯映射, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 有:

$$\left\| \sum_{j=1}^q d_j^{-1} m_f(r, D_j) \right\| \leq (2\ell - k + 1 + \varepsilon) T_f(r).$$

本文采用了 Nochka 权方法, 将文献[9]中复平面上的结果推广到圆环上的情形.

定理 4 设 V 是 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 的维数为 $k(\geq 1)$ 的代数子簇, $D_1, \dots, D_q$ 是 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 中的一簇超曲面, 记 D_j 的次数为 d_j ($1 \leq j \leq q$), 设 $D_1, \dots, D_q$ 在 V 中处于强 ℓ -次一般位置. 若 $f: \Delta \rightarrow V$ 是一个代数非退化全纯映射, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 有:

$$\left\| \sum_{j=1}^q d_j^{-1} m_f(r, D_j) \right\| \leq (2\ell - k + 1 + \varepsilon) T_f(r).$$

1 预备知识

1.1 圆环上的 Nevanlinna 函数

下面给出圆环上 Nevanlinna 函数的定义. 设 $f = [f_0 : \dots : f_n] : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 是一个全纯映射, 令 $\mathbf{f} = (f_0 : \dots : f_n) : \Delta \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ 是 f 的一个既约表示, $f_0, \dots, f_n$ 是在 Δ 中无公共零点的全纯函数.

定义 2 对 $1 < r < R_0$, 定义 f 的特征函数:

$$T_f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|\mathbf{f}(re^{i\theta})\| d\theta +$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|\mathbf{f}(r^{-1}e^{i\theta})\| d\theta,$$

其中: $\|\mathbf{f}(z)\| = \max\{|f_0(z)|, \dots, |f_n(z)|\}$.

设 D 是 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 中 d 次超曲面, Q 是超曲面 D 的

定义 d 次齐次多项式.

定义 3 定义 f 关于 D 的 Weil 函数:

$$\lambda_D(f(re^{i\theta})) = \log \frac{\|\mathbf{f}(re^{i\theta})\|^d \|Q\|}{|Q(\mathbf{f})(re^{i\theta})|}.$$

定义 f 关于 D 的接近度函数:

$$m_f(r, D) = \int_0^{2\pi} \lambda_D(f(re^{i\theta})) \frac{d\theta}{2\pi} + \int_0^{2\pi} \lambda_D(f(r^{-1}e^{i\theta})) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

记

$$\Delta_{1,r} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{r} < |z| \leq 1 \right\},$$

$$\Delta_{2,r} = \{ z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < r \},$$

$n_{1,f}(r, D)$ 为 $Q(\mathbf{f})$ 在 $\Delta_{1,r}$ 内零点的个数, $n_{2,f}(r, D)$ 为 $Q(\mathbf{f})$ 在 $\Delta_{2,r}$ 内零点的个数. 定义 f 关于 D 的计数函数:

$$N_f(r, D) = \int_{r^{-1}}^1 \frac{n_{1,f}(t, D)}{t} dt + \int_1^r \frac{n_{2,f}(t, D)}{t} dt.$$

定理 5(文献[8]中定理 1.1) 设 D 是 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 中的 d 次超曲面, $f: \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 是全纯映射, $f(\Delta) \not\subset D$, 则对任意 $1 < r < R_0$,

$$m_f(r, D) + N_f(r, D) = dT_f(r) + O(1).$$

1.2 Chow 权和 Hilbert 权

设 V 是 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 的维数为 $k(\geq 1)$ 的代数子簇, 记 V 的次数 $\deg V = \tau$.

定义 4 关于 V 存在唯一一个多项式:

$$F_V(\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_k) = F_V(u_{00}, \dots, u_{0n}; \dots; u_{k0}, \dots, u_{kn}),$$

$$\mathbf{u}_i = (u_{i0}, \dots, u_{in}), i = 0, \dots, k,$$

称为 V 的 Chow 形式, 满足如下性质:

(i) F_V 是 $\mathbf{u}_i$ 的 τ 次齐次多项式.

(ii) F_V 在 $\mathbb{C}[u_{00}, \dots, u_{kn}]$ 中是不可约的.

(iii) $F_V(\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_k) = 0 \Leftrightarrow V \cap H_{\mathbf{u}_0} \cap \dots \cap H_{\mathbf{u}_k} \neq \emptyset$,

其中:

$$H_{\mathbf{u}_i} = \left\{ [x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \mid \sum_{j=0}^n u_{ij} x_j = 0 \right\}.$$

设 F_V 是 V 的 Chow 形式, t 是一个辅助变量, $\mathbf{c} = (c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. 考虑分解:

$$F_V(t^{c_0} u_{00}, \dots, t^{c_n} u_{0n}; \dots; t^{c_0} u_{k0}, \dots, t^{c_n} u_{kn}) =$$

$$t^{e_0} G_0(\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_k) + \dots + t^{e_r} G_r(\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_k),$$

其中: $G_0, \dots, G_r \in \mathbb{C}[\mu_{00}, \dots, \mu_{0n}; \dots; \mu_{k0}, \dots, \mu_{kn}]$, 且 $e_0 > e_1 > \dots > e_r$. 定义 V 关于 $\mathbf{c}$ 的 Chow 权:

$$e_V(\mathbf{c}) := e_0.$$

对 $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n+1}$, 令 $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} = x_0^{a_0} \cdots x_n^{a_n}$, $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_n)$. 令 I_V 为在 V 上为 0 的齐次多项式生成的素理想, $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_m$ 为关于 $x_0, \dots, x_n$ 的 m 次齐次多项式生成的向量空间, 记

$$(I_V)_m := \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_m \cap I_V.$$

定义 V 的 Hilbert 函数:

$$H_V(m) := \dim(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_m / (I_V)_m).$$

定义 V 关于 $\mathbf{c}$ 的第 m 个 Hilbert 权:

$$S_V(m, \mathbf{c}) := \max \sum_{i=1}^{H_V(m)} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{c},$$

其中: $\max$ 是对模 $(I_V)_m$ 剩余类构成 $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_m / (I_V)_m$ 的基的所有单项式 $\mathbf{x}^{\mathbf{a}_1}, \dots, \mathbf{x}^{\mathbf{a}_{H_V(m)}}$ 取最大.

引理 1(文献[10]中引理 5.1) 设 Y 是 $\mathbb{P}^{q-1}(\mathbb{C})$ 的一个 k 维代数子簇, $\deg Y = \delta$. 设 $y_1, \dots, y_q$ 表示 $\mathbb{P}^{q-1}(\mathbb{C})$ 中点坐标, $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_q) \in \mathbb{R}^q$. 若存在一个集合 $\{i_0, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, q\}$ 使得:

$$Y \cap \{y_{i_0} = 0, \dots, y_{i_k} = 0\} = \emptyset, \text{ 则}$$

$$e_Y(\mathbf{c}) \geq (c_{i_0} + \dots + c_{i_k})\delta.$$

引理 2(文献[11]中引理 4.5) 设 Y 是 $\mathbb{P}^{q-1}(\mathbb{C})$ 的一个 k 维子簇, $\deg Y = \delta$. 设 $m > \delta$ 是一个整数, $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_q) \in \mathbb{R}^q$, 则

$$\frac{S_Y(m, \mathbf{c})}{mH_Y(m)} \geq \frac{e_Y(\mathbf{c})}{(k+1)\delta} - \frac{(2k+1)\delta}{m} \max_{1 \leq i \leq q} c_i.$$

2 定理 4 的证明

设 $D_1, \dots, D_q$ 是在 V 中处于强 ℓ -次一般位置的超曲面, Q_j 是 D_j 的定义 d_j 次齐次多项式, $1 \leq j \leq q$. 令 d 为 $d_1, \dots, d_q$ 的最小公倍数, 因为

$$m_f\left(r, \frac{d}{d_j} D_j\right) = \frac{d}{d_j} m_f(r, D_j),$$

所以

$$\left\| \sum_{j=1}^q d_j^{-1} m_f(r, D_j) \right\| \leq (2\ell - k + 1 + \varepsilon) T_f(r),$$

等价于

$$\left\| \sum_{j=1}^q \frac{1}{d} m_f\left(r, \frac{d}{d_j} D_j\right) \right\| \leq (2\ell - k + 1 + \varepsilon) T_f(r), \quad (1)$$

因为 Q_j^{d/d_j} 为 d 次齐次多项式, $1 \leq j \leq q$. 于是仅

需考虑 Q_j 均为 d 次齐次的情形. 为了证明定理 4, 需要用到如下关于 Nochka 权的结果.

引理 3(文献[9]中命题 2.5) 设 D_j ($1 \leq j \leq q$), 是在 V 中处于强 ℓ -次一般位置的超曲面, 则存在一个函数 $\omega: \{1, \dots, q\} \rightarrow \mathbb{R}(0, 1]$ (称为 Nochka 权) 和一个常数 $\theta \geq 1$ (称为 Nochka 常数), 满足:

$$(i) 1 \leq \frac{\ell+1}{k+1} \leq \theta \leq \frac{2\ell-k+1}{k+1}.$$

$$(ii) 0 \leq \omega(j)\theta \leq 1, \quad j \in \{1, \dots, q\}.$$

$$(iii) q - 2\ell + k - 1 = \theta \left(\sum_{j=1}^q \omega(j) - k - 1 \right).$$

$$(iv) \forall B \subset \{D_j\}_{j=1}^q \text{ 且 } \#B \leq \ell+1, \text{ 有:}$$

$$\sum_{\{j|D_j \in B\}} \omega(j) \leq d(B),$$

$$\text{其中: } d(B) = \text{codim} \bigcap_{\{j|D_j \in B\}} (V \cap D_j).$$

利用 Nochka 权, 将接近度函数拆分成两部分分别估计.

$$\sum_{j=1}^q m_f(r, D_j) = \sum_{j=1}^q (1 - \theta\omega(j)) m_f(r, D_j) +$$

$$\sum_{j=1}^q \theta\omega(j) m_f(r, D_j) \leq$$

$$\sum_{j=1}^q (1 - \theta\omega(j)) dT_f(r) +$$

$$\sum_{j=1}^q \theta\omega(j) m_f(r, D_j) =$$

$$qdT_f(r) - \theta \sum_{j=1}^q \omega(j) T_f(r) +$$

$$\theta \sum_{j=1}^q \omega(j) m_f(r, D_j),$$

其中第一个不等号用到了定理 5.

考虑 $\sum_{j=1}^q \omega(j) m_f(r, D_j)$. 对任意 $z = re^{i\theta}$, $1 < r <$

R_0 , 存在 $\{1, \dots, q\}$ 的一个重排列 $\{i(z, 1), \dots, i(z, q)\}$, 使得:

$$\omega(i(z, q)) \lambda_{D_{i(z, q)}}(f(z)) \leq$$

$$\omega(i(z, q-1)) \lambda_{D_{i(z, q-1)}}(f(z)) \leq \dots \leq$$

$$\omega(i(z, 1)) \lambda_{D_{i(z, 1)}}(f(z)).$$

再由强 ℓ -次一般位置条件可得:

$$\sum_{j=1}^q \omega(j) \lambda_{D_j}(f(z)) \leq \sum_{j=1}^{\ell} \omega(i(z, j)) \lambda_{D_{i(z, j)}}(f(z)) + O(1),$$

所以

$$\sum_{j=1}^q \omega(j) \lambda_{D_j}(f(z)) \leq \sum_{j=1}^{\ell+1} \omega(i(z, j)) \lambda_{D_{i(z, j)}}(f(z)) + O(1). \quad (2)$$

为了进一步估计, 我们需要用到如下结果.

引理 4(文献[9]中定理 2.7) 设 V 是 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 中维数为 $k(k \geq 1)$ 的代数子簇, $D_1, \dots, D_q$ 是在 V 中处于强 ℓ -次一般位置的超曲面, $q > 2\ell - k + 1$, $E_1, \dots, E_q \in \mathbb{R}$ 且 $E_j \geq 1$, 则对任意集合 $B \subset \{D_1, \dots, D_q\}$, $\#B = \ell + 1$ 且 $d(B) = k + 1$, 都存在一个集合 $C \subset B$, $\#C = k + 1$, 使得:

$$\bigcap_{D_j \in C} (V \cap D_j) = \emptyset \text{ 且 } \prod_{D_j \in B} E_j^{\omega(j)} \leq \prod_{D_i \in C} E_i,$$

其中: $\omega(j)$ 是 D_j 的 Nochka 权.

令 $B = \{D_{i(z, 1)}, \dots, D_{i(z, \ell+1)}\}$, $\#B = \ell + 1$, 由 $D_1, \dots, D_q$ 处于强 ℓ -次一般位置条件, 有 $d(B) = k + 1$. 令

$$C = \{D_{i(z, j_0)}, \dots, D_{i(z, j_k)}\} \subset B,$$

满足 $V \cap D_{i(z, j_0)} \cap \dots \cap D_{i(z, j_k)} = \emptyset$. 由引理 4, 令

$$E_j = e^{\lambda_{D_{i(z, j)}}(f(z))}, \quad E_{\xi} = e^{\lambda_{D_{i(z, j_{\xi})}}(f(z))},$$

有:

$$\sum_{j=1}^{\ell+1} \omega(i(z, j)) \lambda_{D_{i(z, j)}}(f(z)) \leq \sum_{\xi=0}^k \lambda_{D_{i(z, j_{\xi})}}(f(z)), \quad (3)$$

所以, 由式(2)和式(3)得:

$$\sum_{j=1}^q \omega(j) \lambda_{D_j}(f(z)) \leq \sum_{\xi=0}^k \lambda_{D_{i(z, j_{\xi})}}(f(z)) + O(1) \leq \max_{\gamma \in \Gamma} \sum_{j=0}^k \lambda_{D_{\gamma(j)}}(f(z)) + O(1),$$

其中: $\Gamma = \{\gamma | \gamma: \{0, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, q\}\}$ 是所有使得 $V \cap D_{\gamma(0)} \cap \dots \cap D_{\gamma(k)} = \emptyset$ 的映射 γ 组成的集合.

这样对每个固定的 $z \in \Delta$, 就通过对 Weil 函数大小进行排序, 利用强 ℓ -次一般位置条件, 将关于全部 Weil 函数的和用部分和来控制.

下面将超曲面嵌入到高维射影空间中使其变成超平面, 利用超平面情形的 Cartan 第二基本定理得到所要的结果.

因为 $D_1, \dots, D_q$ 在 V 中是处于强 ℓ -次一般位置的, 所以 $Q_1, \dots, Q_q$ 在 V 中没有公共零点, 即

$$\bigcap_{j=1}^q D_j \cap V = \emptyset.$$

定义一个映射:

$$\phi: V \rightarrow \mathbb{P}^{q-1}(\mathbb{C}), \quad x \mapsto [Q_1(x): \dots: Q_q(x)],$$

则 ϕ 是一个有限态射.

令 $Y = \phi(V)$, 则 Y 是 $\mathbb{P}^{q-1}(\mathbb{C})$ 的一个复射影子簇且 $\dim Y = k$, $\deg Y := \delta \leq d^k \deg V$. 设 m 是一个正整数, $n_m = H_Y(m) - 1$, $q_m = C_{q+m-1}^m - 1$, 再考虑 Veronese 嵌入:

$$\phi_m: \mathbb{P}^{q-1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^{q_m}(\mathbb{C}), \quad \mathbf{y} \mapsto [\mathbf{y}^{\mathbf{a}_0}, \dots, \mathbf{y}^{\mathbf{a}_{q_m}}],$$

其中: $\mathbf{y}^{\mathbf{a}_0}, \dots, \mathbf{y}^{\mathbf{a}_{q_m}}$ 是 $y_1, \dots, y_q$ 的 m 次齐次单项式的全体, $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{iq}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^q$, 并记 $\mathbf{y}^{\mathbf{a}_i} = y_1^{a_{i1}} \dots y_q^{a_{iq}}$.

令

$$G = \phi_m \circ \phi \circ f: \Delta \rightarrow \mathbb{P}^{q_m}(\mathbb{C}),$$

$$G(z) = [Q_1^{a_{01}}(\mathbf{f})(z) \dots Q_q^{a_{0q}}(\mathbf{f})(z), \dots,$$

$$Q_1^{a_{q_m, 1}}(\mathbf{f})(z) \dots Q_q^{a_{q_m, q}}(\mathbf{f})(z)].$$

设 Y_m 是 $\mathbb{P}^{q_m}(\mathbb{C})$ 中包含 $G(\Delta)$ 的最小线性子簇,

显然, 线性形式 $\sum_{i=0}^{q_m} c_i z_i |_{Y_m} \equiv 0$, 当且仅当 m 次齐次

多项式

$$\sum_{i=0}^{q_m} c_i y^{\mathbf{a}_i} |_Y \equiv 0.$$

换言之, 存在一个同构:

$$\mathbb{C}[y_1, \dots, y_q]_m / (I_Y)_m \cong \mathbb{C}[z_0, \dots, z_{q_m}]_1 / (I_{Y_m})_1,$$

$$[\mathbf{y}^{\mathbf{a}_i}] \mapsto [z_i],$$

其中: I_Y 表示在 Y 上为 0 的齐次多项式生成的素理想; $(I_Y)_m$ 表示在 Y 上为 0 的 m 次齐次多项式组成的向量空间. 所以,

$$\dim \mathbb{C}[z_0, \dots, z_{q_m}] / (I_Y)_1 =$$

$$\dim \mathbb{C}[y_1, \dots, y_q] / (I_Y)_m = H_Y(m),$$

$$\dim Y_m = H_Y(m) - 1 = n_m.$$

因为 Y_m 是 $\mathbb{P}^{q_m}(\mathbb{C})$ 的 n_m -维线性子空间, 因此有 $(q_m + 1)$ 个线性形式 $L_0, \dots, L_{q_m} \in \mathbb{C}[w_0, \dots, w_{n_m}]$ 和一个线性同构:

$$\Psi_m: \mathbb{P}^{n_m}(\mathbb{C}) \rightarrow Y_m, \omega \mapsto [L_0(\omega), \dots, L_{q_m}(\omega)],$$

其中: $\omega \in \mathbb{P}^{n_m}(\mathbb{C})$ 且 $L_i(\omega) = y^{a_i}$, $i = 0, \dots, q_m$, 使得:

$$\Psi_m^{-1} \circ \phi_m: Y \rightarrow \mathbb{P}^{n_m}(\mathbb{C}), \quad \Psi_m^{-1} \circ \phi_m(y) = \omega,$$

$$y \in \mathbb{P}^{q-1}(\mathbb{C}).$$

$$\text{令 } F = \Psi_m^{-1} \circ \phi_m \circ \phi \circ f: \Delta \rightarrow \mathbb{P}^{n_m}(\mathbb{C}),$$

因为 f 是代数非退化全纯映射, 所以 F 是线性非退化全纯映射.

取 $\mathbf{c}_z = (c_{1,z}, \dots, c_{q,z})$, 其中

$$c_{j,z} = \lambda_{D_j}(f(z)). \quad (4)$$

由引理 1, 对任意 $\gamma \in \Gamma$, 因为

$$V \cap D_{\gamma(0)} \cap \dots \cap D_{\gamma(k)} = \emptyset,$$

所以,

$$\frac{e_Y(\mathbf{c}_z)}{\delta} \geq \sum_{j=0}^k c_{\gamma(j),z}. \quad (5)$$

取 $I_z \subset \{0, \dots, q_m\}$, $\#I_z = n_m + 1 = H_Y(m)$, 使得 $\{y^{a_i} \mid i \in I_z\}$ 是 $\mathbb{C}[y_1, \dots, y_q] / (I_Y)_m$ 的一组基, 且 $S_Y(m, \mathbf{c}_z) = \sum_{i \in I_z} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{c}_z$. 由引理 2, 对于 $m > \delta$,

$$\frac{e_Y(\mathbf{c}_z)}{\delta} \leq (k+1) \frac{S_Y(m, \mathbf{c}_z)}{mH_Y(m)} + \frac{(k+1)(2k+1)\delta}{m} \max_{1 \leq i \leq q} c_{i,z}, \quad (6)$$

所以, 由式(4)~(6)得:

$$\sum_{j=0}^k \lambda_{D_{\gamma(j)}}(f(z)) \leq \frac{k+1}{mH_Y(m)} S_Y(m, \mathbf{c}_z) + \frac{(k+1)(2k+1)\delta}{m} \max_{1 \leq i \leq q} c_{i,z}, \quad (7)$$

其中:

$$S_Y(m, \mathbf{c}_z) = \sum_{i \in I_z} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{c}_z = \sum_{i \in I_z} \sum_{j=1}^q a_{ij} \lambda_{D_j}(f(z)) =$$

$$\sum_{i \in I_z} \log \left(\frac{\|\mathbf{f}(z)\|^d \|Q_1\|}{|Q_1(\mathbf{f})(z)|} \right)^{a_{i1}} \dots$$

$$\left(\frac{\|\mathbf{f}(z)\|^d \|Q_q\|}{|Q_q(\mathbf{f})(z)|} \right)^{a_{iq}}.$$

$$\sum_{i \in I_z} \log \frac{1}{|L_i(\mathbf{F})(z)|} +$$

$$dmH_Y(m) \log \|\mathbf{f}(z)\| + O(1)m =$$

$$\sum_{i \in I_z} \log \frac{\|L_i\|}{|L_i(\mathbf{F})(z)|} +$$

$$dmH_Y(m) \log \|\mathbf{f}(z)\| + O(1)m,$$

所以,

$$S_Y(m, \mathbf{c}_z) \leq \max_J \sum_{j \in J} \log \frac{\|L_j\|}{|L_j(\mathbf{F})(z)|} +$$

$$dmH_Y(m) \log \|\mathbf{f}(z)\| + O(1)m =$$

$$\max_J \sum_{j \in J} \lambda_{L_j}(F(z)) - (n_m + 1) \log \|\mathbf{F}(z)\| +$$

$$dmH_Y(m) \log \|\mathbf{f}(z)\| + O(1)m, \quad (8)$$

其中: $J \subset \{0, \dots, q_m\}$, 使得 $\#J = n_m + 1$ 且 $L_j, j \in J$ 是线性无关的. 所以由式(7)和式(8)可得:

$$\max_{\gamma \in \Gamma} \sum_{j=0}^k \lambda_{D_{\gamma(j)}}(f(z)) \leq \frac{k+1}{mH_Y(m)}.$$

$$\left[\max_J \sum_{j \in J} \lambda_{L_j}(F(z)) - (n_m + 1) \log \|\mathbf{F}(z)\| \right] +$$

$$\frac{(k+1)(2k+1)\delta}{m} \max_{1 \leq i \leq q} c_{i,z} + O(1) \leq \frac{k+1}{mH_Y(m)}.$$

$$\left[\max_J \sum_{j \in J} \lambda_{L_j}(F(z)) - (n_m + 1) \log \|\mathbf{F}(z)\| \right] +$$

$$d(k+1) \log \|\mathbf{f}(z)\| +$$

$$\frac{(k+1)(2k+1)\delta}{m} \sum_{i=1}^q c_{i,z} + O(1),$$

所以,

$$\int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^q \omega(j) \lambda_{D_j}(f(re^{i\theta})) \frac{d\theta}{2\pi} \leq \frac{k+1}{mH_Y(m)}.$$

$$\left[\int_0^{2\pi} \left(\max_J \sum_{j \in J} \lambda_{L_j}(F(re^{i\theta})) - \right. \right.$$

$$\left. (n_m + 1) \log \|\mathbf{F}(re^{i\theta})\| \frac{d\theta}{2\pi} \right) \right] +$$

$$\begin{aligned} & d(k+1) \int_0^{2\pi} \log \|\mathbf{f}(re^{i\theta})\| \frac{d\theta}{2\pi} + \\ & \frac{(k+1)(2k+1)\delta}{m} \int_0^{2\pi} \lambda_D(f(re^{i\theta})) \frac{d\theta}{2\pi} + \\ & O(1), \end{aligned} \quad (9)$$

同理, $\forall z = r^{-1}e^{i\theta}$, $1 < r < R_0$,

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^q \omega(j) \lambda_{D_j}(f(r^{-1}e^{i\theta})) \frac{d\theta}{2\pi} \leq \frac{k+1}{mH_Y(m)} \cdot \\ & \left[\int_0^{2\pi} \max_j \sum_{j \in J} \lambda_{L_j}(F(r^{-1}e^{i\theta})) - \right. \\ & (n_m+1) \log \|\mathbf{F}(r^{-1}e^{i\theta})\| \frac{d\theta}{2\pi} \Big] + \\ & d(k+1) \int_0^{2\pi} \log \|\mathbf{f}(r^{-1}e^{i\theta})\| \frac{d\theta}{2\pi} + \\ & \frac{(k+1)(2k+1)\delta}{m} \int_0^{2\pi} \lambda_D(f(r^{-1}e^{i\theta})) \frac{d\theta}{2\pi} + \\ & O(1), \end{aligned} \quad (10)$$

式(9)和式(10)相加得:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^q \omega(j) m_f(r, D_j) \leq \frac{k+1}{mH_Y(m)} \cdot \\ & \left(\int_0^{2\pi} \max_j \sum_{j \in J} \lambda_{L_j}(F(re^{i\theta})) \frac{d\theta}{2\pi} + \right. \\ & \left. \int_0^{2\pi} \max_j \sum_{j \in J} \lambda_{L_j}(F(r^{-1}e^{i\theta})) \frac{d\theta}{2\pi} \right) - \\ & \frac{(k+1)(n_m+1)}{mH_Y(m)} T_F(r) + d(k+1)T_f(r) + \\ & \frac{(k+1)(2k+1)\delta}{m} \sum_{j=1}^q m_f(r, D_j) + O(1) \leq \\ & \frac{k+1}{mH_Y(m)} \left(\int_0^{2\pi} \max_j \sum_{j \in J} \lambda_{L_j}(F(re^{i\theta})) \frac{d\theta}{2\pi} + \right. \\ & \left. \int_0^{2\pi} \max_j \sum_{j \in J} \lambda_{L_j}(F(r^{-1}e^{i\theta})) \frac{d\theta}{2\pi} \right) - \\ & \frac{(k+1)(2k+1)q\delta}{m} dT_f(r) + O(1). \end{aligned}$$

最后, 需要用到圆环上的 Cartan 超平面第二基本定理.

引理 5(文献[8]中引理 2.2) 设 $f = [f_0 : \cdots : f_n] : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 是线性非退化全纯映射, $\mathbf{f} = (f_0 : \cdots : f_n)$ 是 f 的一个既约表示, $f_0, \dots, f_n$ 是在 Δ 中无公共零点的全纯函数. $H_1, \dots, H_q$ 是 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 中的任意超平面. 设 $L_j, 1 \leq j \leq q$, 是 $H_1, \dots, H_q$ 的线性形式,

则对任意 $\varepsilon > 0$, 有:

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^{2\pi} \max_K \sum_{j \in K} \log \frac{\|\mathbf{f}(re^{i\theta})\| \|L_j\|}{|L_j \circ \mathbf{f}(re^{i\theta})|} \frac{d\theta}{2\pi} + \right. \\ & \left. \int_0^{2\pi} \max_K \sum_{j \in K} \log \frac{\|\mathbf{f}(r^{-1}e^{i\theta})\| \|L_j\|}{|L_j \circ \mathbf{f}(r^{-1}e^{i\theta})|} \frac{d\theta}{2\pi} \leq \right. \\ & (n+1+\varepsilon)T_f(r), \end{aligned}$$

其中: $\max$ 表示对所有使得 $L_j (j \in K)$ 线性无关的集合 $K \subset \{1, \dots, q\}, \#K = n+1$ 取最大.

对全纯映射 $F: \Delta \rightarrow \mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ 和线性形式 L_j , $0 \leq j \leq q_m$, 运用引理 5, 令 $\varepsilon = 1$ 有:

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^{2\pi} \max_j \sum_{j \in J} \lambda_{L_j}(F(re^{i\theta})) \frac{d\theta}{2\pi} + \right. \\ & \left. \int_0^{2\pi} \max_j \sum_{j \in J} \lambda_{L_j}(F(r^{-1}e^{i\theta})) \frac{d\theta}{2\pi} \leq \right. \\ & (n_m+2)T_F(r), \end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^q \omega(j) m_f(r, D_j) \leq \\ & \frac{(k+1)}{mH_Y(m)} T_F(r) + d(k+1)T_f(r) + \\ & \frac{(k+1)(2k+1)q\delta}{m} dT_f(r) + O(1), \end{aligned}$$

对 $\forall \varepsilon > 0$, 令 m 足够大, 使得:

$$\frac{k+1}{H_Y(m)} < \frac{\varepsilon}{3\theta}, \frac{(k+1)(2k+1)q\delta}{m} < \frac{\varepsilon}{3\theta},$$

其中: $\theta \geq 1$ 为 Nochka 常数, 则

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^q \omega(j) m_f(r, D_j) \leq \\ & \frac{\varepsilon}{3\theta m} T_F(r) + d(k+1)T_f(r) + \frac{d\varepsilon}{3\theta} dT_f(r) + C. \end{aligned}$$

又因为 $T_F(r) \leq dmT_f(r)$, 所以令 r 足够大, 使

得 $C < \left(\frac{d\varepsilon}{3\theta}\right)T_f(r)$, 得到:

$$\sum_{j=1}^q \omega(j) m_f(r, D_j) \leq d(k+1+\varepsilon/\theta)T_f(r). \quad (11)$$

由定理 5 及式(1)和式(11)得:

$$\sum_{j=1}^q m_f(r, D_j) \leq qdT_f(r) - \theta \sum_{j=1}^q \omega(j) dT_f(r) +$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^q \theta \omega(j) m_f(r, D_j) &\leq \\ q d T_f(r) - \theta \sum_{j=1}^q \omega(j) d T_f(r) + \\ \theta(k+1) d T_f(r) + \varepsilon d T_f(r) &= \\ \left(q - \theta \left(\sum_{j=1}^q \omega(j) - k - 1 \right) + \varepsilon \right) d T_f(r) &= \\ (2\ell - k + 1 + \varepsilon) d T_f(r), \end{aligned}$$

即

$$\left\| \sum_{j=1}^q \frac{1}{d} m_f(r, D_j) \right\| \leq (2\ell - k + 1 + \varepsilon) T_f(r).$$

参考文献:

- [1] NEVANLINNA R. Zur theorie der meromorphen funktionen[J]. Acta Mathematica, 1925, 46(1/2):1-99.
- [2] CARTAN H. Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires et leurs applications[J]. Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 1928, 45(3):255-346.
- [3] AHLFORS L. The theory of meromorphic curves[J]. Acta Societatis Scientiarum Fennicae: Nova Series A, 1941, 3(4):171-183.
- [4] CARLSON J, GRIFFITHS P. A defect relation for equidimensional holomorphic mappings between algebraic varieties[J]. The Annals of Mathematics, 1972, 95(3):577-584.
- [5] RU M. Holomorphic curves into algebraic varieties[J]. Annals of Mathematics, 2009, 169(1):255-267.
- [6] BIEBERBACH L. Theorie der gewöhnlichen differentialgleichungen[M]. Berlin: Springer, 1965.
- [7] PHUONG H T, THIN N V. On fundamental theorems for holomorphic curves on the annuli[J]. Ukrainian Mathematical Journal, 2015, 67(7):1111-1125.
- [8] PHUONG H T, VILASAVANH L. On fundamental theorems for holomorphic curves on an annulus intersecting hypersurfaces[J]. Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 2022, 48(1):151-163.
- [9] DETHLOFF G, VAN TAN T, THAI D D. An extension of the cartan-nochka second main theorem for hypersurfaces [J]. International Journal of Mathematics, 2011, 22(6): 863-885.
- [10] EVERTSE J H, FERRETTI R G. A generalization of the subspace theorem with polynomials of higher degree [C]//SCHLICKWEI H P, SCHMIDT K, TICHY R F. Diophantine approximation. Vienna: Springer, 2008:175-198.
- [11] EVERTSE J H, FERRETTI R G. Diophantine inequalities on projective varieties[J]. International Mathematics Research Notices, 2002, 2002(25):1295-1330.

A second main theorem of Nevanlinna theory for holomorphic mappings on annuli

GAO Yuhui, YU Guangsheng

(School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: To establish a second main theorem for holomorphic mappings on annuli intersecting hypersurfaces in strong ℓ -subgeneral position, the Nochka weight is employed. First, the sum of Weil functions of all hypersurfaces are controlled by the sum of partial hypersurfaces with Nochka weights. Then, the hypersurfaces are embedded into a high-dimensional projective space to be hyperplanes, and a linearly non-degenerate holomorphic mapping is constructed. Finally, a second main theorem is established for algebraically non-degenerate holomorphic mappings on the annuli intersecting hypersurfaces in strong ℓ -subgeneral position by the generalized form of Cartan's second main theorem.

Key words: Nevanlinna theory; strong ℓ -subgeneral position; second main theorem; Nochka weight

(责任编辑 史小丽)