

DOI: 10.20098/j.cnki.1001-5132.2023.0911

关于非线性热力学形式大偏差的一些结果

高银辉, 季泳*

(宁波大学 数学与统计学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 拓扑压在遍历理论、动力系统、维数理论和平衡态理论中作用重大. 经典的热力学形式, 即势函数是可加的, 无论在确定性系统还是在随机系统中都已有许多重要的理论结果和广泛应用. Buzzi、Kloekner 和 Leplaideur 定义了动力系统的非线性热力学形式, 并采用了凸分析方法对其展开研究. 本文研究了关于非线性热力学形式大偏差的一些结果.

关键词: 非线性热力学形式; 大偏差; 碎轨性质; 动力系统

中图分类号: O192

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2024) 05-0048-06

20 世纪 70 年代, Sinai^[1]、Ruelle^[2]和 Bowen^[3]在栅格系统统计力学的启发下发展了一种热力学方法来研究动力系统. 2019 年, Leplaideur 等^[4]将该方法应用于 Curie-Weiss Mean-field 理论, 对全位移引入了一种新的热力学形式. 受此启发, 最近 Buzzi 等^[5]定义了非线性热力学形式. 设 (X, T, d) 是拓扑动力系统(其中 (X, d) 是紧致度量空间, T 是 X 上连续自映射). 分别记 $\mathcal{M}(X)$ 、 $\mathcal{M}_T(X)$ 和 $\mathcal{M}_T^c(X)$ 为 X 上所有 Borel 测度的集合、所有 T 不变的 Borel 测度的集合和所有 T 不变遍历的 Borel 测度的集合. 记 $C(X) = \{f|f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ 为连续函数}\}$. $\mathcal{M}(X)$ 上的弱* 拓扑是指使所有映射

$$\mathcal{M}(X) \rightarrow \mathbb{R}: \mu \mapsto \int f d\mu, \forall f \in C(X)$$

都是连续的最弱拓扑. 称一连续函数 $\varepsilon: \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ 为能量. 定义测度 $\mu \in \mathcal{M}(X)$ 的非线性拓扑压为其熵和能量的总和, 即

$$\Pi^\varepsilon(T, \mu) = h_\mu(T) + \varepsilon(\mu).$$

记 $C(X, [0, 1]) = \{f|f: X \rightarrow [0, 1] \text{ 为连续函数}\}$, 对 $\mu, \nu \in \mathcal{M}(X)$, 定义 $\mathcal{M}(X)$ 上的一个度量 ρ .

$$\rho(\mu, \nu) = \sum_{k \geq 1} \frac{\left| \int f_k d\mu - \int f_k d\nu \right|}{2^k},$$

其中 $\{f_k\}_{k \geq 1}$ 是 $C(X, [0, 1])$ 的一个可数稠密子集, 则该度量与 $\mathcal{M}(X)$ 上弱* 拓扑兼容. 为简便起见, 在 X 上使用与原度量等价的一个度量并仍记为 d .

$$d(x, y) = \rho(\delta_x, \delta_y),$$

其中 δ_x 和 δ_y 为点测度.

一个集合 $F \subset X$ 被称为 (X, T) 的 (n, ε) 分离集, 如果对不同的 $x, y \in F$, 都有 $d_n(x, y) > \varepsilon$, 其中

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(T^i(x), T^i(y))$$

称 X 上 Bowen 度量. 一个集合 $E \subset X$ 被称为 (X, T) 的 (n, ε) 生成集, 如果对 $\forall x \in X$, 存在 $y \in E$ 使得 $d_n(x, y) < \varepsilon$. 给定 $x \in X$ 和 $n \in \mathbb{N}$, 定义经验测度为:

$$e_x^n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{T^i x}.$$

Buzzi 等^[5]定义非线性剖分函数为:

$$\zeta(n, \varepsilon) = \sup_F \sum_{x \in F} \exp(n\varepsilon(e_x^n)),$$

其中上确界取遍所有的 (n, ε) 分离集.

非线性拓扑压定义为:

$$\Pi_{\text{top}}^\varepsilon(T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} (1/n) \log \zeta(n, \varepsilon).$$

基于针对遍历测度适当的假设, 建立下述变分原理:

收稿日期: 2023-09-12.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journalg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(12101340).

第一作者: 高银辉, 硕士研究生, 主要研究方向: 动力系统及遍历理论. E-mail: g15037457500@163.com

*通信作者: 季泳, 讲师, 主要研究方向: 动力系统及遍历理论. E-mail: imjiyong@126.com

$$\Pi_{\text{top}}^\varepsilon(T) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_T(X)} \Pi^\varepsilon(T, \mu). \quad (1)$$

动力系统中的一个重要概念是物理测度. 在考虑 X 上自映射 T 生成的离散时间动力系统时, 设 m 是 X 上的参照测度, 设 $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ 可测. 假设 $(1/n) \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \varphi \circ T^i \cdot m$ -几乎处处收敛到某个常数 $\bar{\varphi}$ (其中 $\varphi \circ T^i(x)$ 表示 $\varphi(T^i(x))$). Young^[6]研究了该时间均值的收敛速度, 准确地说, 设 $\delta > 0$ 表示可接受的误差范围, 令

$$B_n = \left\{ x \in X : \left| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ T^i x - \bar{\varphi} \right| > \delta \right\},$$

则当 $m \rightarrow \infty$ 时 $mB_n \rightarrow 0$. 文献[6]的目的在于确定是否存在 α , 使得 $mB_n \approx e^{\alpha n}$. 大偏差理论旨在为经验均值远离 $\bar{\varphi}$ 的概率提供指数界. 早前, 对于各种随机过程 Ellis^[7]、Stroock^[8]和 Varadhan^[9]已经成功地处理了大偏差问题, 在动力系统, 一般不期望得到合适的显式速率函数, 特别是当轨道没有良好的统计性质时. 然而, 可以考虑指数是如何与系统的动力学特性相关, 以及何时期望指数收敛. Young^[6]证明了紧度量空间上连续映射的一些大偏差估计, 并将其应用于微分动力学以 Lebesgue 测度为参考测度的吸引子、微分动力系统中逃逸速率问题、符号空间等. 之后大偏差理论得到充分发展^[10-14]. 2023 年, Peletier 等^[15]研究了一维布朗硬棒系统的大偏差理论, 解释了多物种相互作用的粒子系统的连续体模型的选择问题. Franco 等^[16]研究了一维对称简单排斥过程中经验测度的一个大偏差原理. 本文给出了非线性热力学形式大偏差的一些结果.

1 主要结果

设 (X, d) 是紧致度量空间, T 是 X 上连续自映射. 对一连续函数 $\varepsilon: \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathbb{R}$, 集合 $E \subset \mathbb{R}$ 和 $m \in \mathcal{M}(X)$ (不要求必须是 T 不变的), 记

$$\bar{R}(\varepsilon, E) = \limsup_{n \rightarrow \infty} (1/n) \log m \cdot$$

$$\left(\left\{ x \in X : \varepsilon(e_x^n) \in E \right\} \right),$$

$$\underline{R}(\varepsilon, E) = \liminf_{n \rightarrow \infty} (1/n) \log m \cdot$$

$$\left(\left\{ x \in X : \varepsilon(e_x^n) \in E \right\} \right),$$

对 $\nu \in \mathcal{M}_T(X)$, 定义关于 ν 的 Brin 等^[17]的点态测

度熵为:

$$h_m(T, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log m(B_n(x, \varepsilon)),$$

$$h_m(T; \nu) = \nu - \text{esssup } h_m(f, x).$$

特别地, 若 m 为 T 不变测度, 由文献[17]知:

$$\int h_m(T, x) dm = h_m(T).$$

记 $C(\mathcal{M}(X))$ 为 $\mathcal{M}(X)$ 上所有实值连续函数构成的空间, 定义

$$\mathcal{V}^+ = \left\{ \mathcal{F} \in C(\mathcal{M}(X)) : \exists C > 0, \varepsilon > 0, \right.$$

$$\text{使对 } \forall x \in X, \forall n \geq 0,$$

$$m(B_n(x, \varepsilon)) \leq C \exp(-n\mathcal{F}(e_x^n)) \Big\},$$

$$\mathcal{V}^- = \left\{ \mathcal{F} \in C(\mathcal{M}(X)) : \exists \varepsilon > 0 \text{ 和 } C = C(\varepsilon), \right.$$

$$\text{使对 } \forall x \in X, \forall n \geq 0,$$

$$m(B_n(x, \varepsilon)) \geq C \exp(-n\mathcal{F}(e_x^n)) \Big\},$$

称动力系统 (X, T) 具有碎轨性质, 如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在一个正整数 $g(\varepsilon)$ 使得对任意的 $k \geq 1$, 任意的点 $x_1, \dots, x_k \in X$, 任意的正整数序列 $n_1, \dots, n_k$ 以及 $p_1, \dots, p_k \geq g(\varepsilon)$, 存在点 $y \in X$ 使得:

$$d(T^{m_{j-1}+i} y, f^i x_j) < \varepsilon, 0 \leq i < n_j, 1 \leq j \leq k,$$

其中 $m_l = \sum_{i=1}^l (n_i + p_i)$, $l = 1, \dots, k$, 且 $m_0 = 0$. 此时称点 y 以时间间隔 $p_1, \dots, p_k \varepsilon$ -跟踪了轨道段 $[x_1, Tx_1, \dots, T^{n_1-1} x_1], [x_2, Tx_2, \dots, T^{n_2-1} x_2], \dots, [x_k, Tx_k, \dots, T^{n_k-1} x_k]$.

定理 1 假设 $h_{\text{top}}(T) < \infty$, 则对任意的 $\varepsilon \in C(\mathcal{M}(X))$, $c \in \mathbb{R}$, 以下结论成立:

$$\underline{R}(\varepsilon, (c, +\infty)) \geq$$

$$\sup \{ h_\nu(T) - h_m(T; \nu) : \nu \in \mathcal{M}_T^\varepsilon(X), \varepsilon(\nu) > c \}.$$

对 $\mathcal{F} \in \mathcal{V}^+$, 有:

$$\bar{R}(\varepsilon, [c, +\infty)) \leq$$

$$\sup \{ h_\nu(T) - \mathcal{F}(\nu) : \nu \in \mathcal{M}_T(X), \varepsilon(\nu) \geq c \}.$$

假设 f 满足碎轨性质, 则对任意的 $\mathcal{F} \in \mathcal{V}^-$,

$$\underline{R}(\varepsilon, (c, +\infty)) \geq$$

$$\sup \{ h_\nu(T) - \mathcal{F}(\nu) : \nu \in \mathcal{M}_T(X), \varepsilon(\nu) > c \}.$$

2 预备知识

首先介绍一些动力系统的基础知识及需要用到到的相关定理.

定义 1 设 $(X, \mathcal{B}, m)$ 为概率空间, $T: X \rightarrow X$ 为映射(变换).

(1) 称 T 是可测的, 如果 $T^{-1}\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$;

(2) 称 T 是保测的, 如果 T 可测, 且

$$m(T^{-1}B) = m(B), \forall B \in \mathcal{B}.$$

定义 2 设 $(X, \mathcal{B}, m)$ 为概率空间, 称保测变换 $T: X \rightarrow X$ 是遍历的, 如果满足 $T^{-1}B = B$ 的可测集 $B \in \mathcal{B}$ 的测度只能取 0 或 1, 此时称 m 为 T 的遍历测度.

下面介绍引理, 该引理由 Birkhoff 证明(详见文献[18]), 是遍历理论的基本定理.

引理 1 设 $T: X \rightarrow X$ 为概率空间 $(X, \mathcal{B}, m)$ 的一个保测映射, $f \in L^1(m)$, 则

(1) 序列 $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x)$ 几乎处处收敛于一个函数 $f^*(x) \in L^1(m)$, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) = f^*(x), m\text{-a.e. } x \in X.$$

(2) $f^* \circ T(x) = f^*(x)$, $m\text{-a.e. } x \in X$, 且

$$\int f^* dm = \int f dm.$$

设 $T: X \rightarrow X$ 为概率空间 $(X, \mathcal{B}, m)$ 一个保测的且遍历的映射, $f \in L^1(m)$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) = \int f dm, m\text{-a.e. } x \in X.$$

引理 2(遍历分解定理)^[18] 对 $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$, 在紧度量空间 $\mathcal{M}_T(X)$ 的 Borel 子集中存在一个唯一的测度 τ , 使 $\tau(\mathcal{M}_T^e(X)) = 1$, 且对 $\forall f \in C(X)$ 有:

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_{\mathcal{M}_T^e(X)} \left(\int_X f(x) dm(x) \right) d\tau(x),$$

和

$$h_\mu(T) = \int_{\mathcal{M}_T^e(X)} h_m(T) d\tau(m).$$

此外, 需要用到以下引理, 即 Katok 熵公式.

引理 3(Katok 熵公式)^[19] 对 $\nu \in \mathcal{M}_T^e(X)$ 以及任意的 $\delta > 0$,

$$h_\nu(T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N_\nu(n, \varepsilon, \delta)}{n} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \frac{\ln N_\nu(n, \varepsilon, \delta)}{n},$$

其中 $N_\nu(n, \varepsilon, \delta)$ 表示覆盖一个 ν 测度大于 $1 - \delta$ 的

Borel 可测集的 (n, ε) 球的最小个数.

3 定理 1 的证明

(1) 选取 $\nu \in \mathcal{M}_T^e(X)$ 满足 $\varepsilon(\nu) > c$, 并记

$$E_n = \{x \in X : \varepsilon(e_x^n) > c\}.$$

假设 $h_m(f; \nu) < \infty$, 反之则无需证明, 因为 $h_\nu(T) \leq h_{\text{top}}(T) < \infty$. 只需证明

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log m(E_n) \geq h_\nu(T) - h_m(T; \nu). \quad (2)$$

令 $\delta = (1/2)(\varepsilon(\nu) - c)$, 并选取 $\varepsilon_0 > 0$, 使得:

$$\rho(\mu_1, \mu_2) < \varepsilon_0 \Rightarrow |\varepsilon(\mu_1) - \varepsilon(\mu_2)| < \delta,$$

若存在 $x \in X$, 有 $\varepsilon(e_x^n) > c + \delta$, 则 $B_n(x, \varepsilon_0) \subset E_n$.

设 $\gamma > 0$ 是任意小的数. 记 $N_\nu(n, \varepsilon, b)$ 为生成一个 ν 测度大于等于 b 集合的 (n, ε) 生成集的最小个数. 利用 Katok 熵公式, 选取 $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$, 使得对任意的 $\varepsilon < \varepsilon_1$, 有:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N_\nu \left(n, 4\varepsilon, \frac{1}{2} \right) \geq h_\nu(T) - \gamma.$$

由 $h_m(T; \nu)$ 的定义, 可选取 $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1)$, 使得:

$$\nu \left\{ x \in X : \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log m(B_n(x, \varepsilon_2)) \leq h_m(T; \nu) + \gamma \right\} > \frac{2}{3}. \quad (3)$$

根据 Birkhoff 遍历定理, 当 $n \rightarrow \infty$ 时对 ν 几乎处处 $x \in X$, $e_x^n \rightarrow \nu$, 则由式(3)和 Egoroff 定理, 可选取一个集合 $\Gamma \subset X$ 满足 $\nu(\Gamma) \geq 1/2$ 和 $N_0 \in \mathbb{N}$, 使得对任意的 $x \in \Gamma$ 和任意的 $n > N_0$, 有:

$$\varepsilon(e_x^n) > c + \delta, m(B_n(x, \varepsilon_2)) \geq \exp(-(h_m(T; \nu) + 2\gamma)n).$$

对每个 $n > N_0$, 设 $F_n \subset \Gamma$ 是一个极大 $(n, 2\varepsilon_2)$ 分离集, 则 $\Gamma \subset \bigcup_{x \in F_n} B_n(x, 4\varepsilon_2)$, 所以 $\#F_n \geq N_\nu(n, 4\varepsilon_2, 1/2)$, 其中 $\#F_n$ 为 F_n 的基数, 且对不同的 $x_1, x_2 \in F_n$ 有 $B_n(x_1, \varepsilon_2) \cap B_n(x_2, \varepsilon_2) = \emptyset$. 因此

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log m(E_n) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \\ &\log \sum_{x \in F_n} m(B_n(x, \varepsilon_2)) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \\ &\log [\#F_n \exp(-(h_m(T; \nu) + 2\gamma)n)] \geq \end{aligned}$$

$$h_v(T) - h_m(T; v) - 3\gamma.$$

由 γ 的任意性可得式(2).

(2) 证明思想来源于文献[5]中变分原理, 即式(1)的证明. 令 $E_n = \{x \in X : \varepsilon(e_x^n) \geq c\}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{V}^+$, 将构造 $\tilde{v} \in \mathcal{M}_T(X)$ 满足 $\varepsilon(v) \geq c$ 和

$$h_v(T) - \mathcal{F}(\tilde{v}) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log m(E_n). \quad (4)$$

由 $\mathcal{F} \in \mathcal{V}^+$ 可知, 存在 $C > 0$ 和 $\varepsilon > 0$, 使得对任意 $x \in X$ 和任意 $n \geq 0$,

$$m(B_n(x, \varepsilon)) \leq C \exp(-n\mathcal{F}(e_x^n)). \quad (5)$$

对每个 n , 设 $F_n \subset E_n$ 是具有最大基数的 (n, ε) 分离集.

令 $\gamma \in (0, 1)$, 由 ε 一致连续性知, 存在 $\delta > 0$, 使得:

$$\rho(\mu, \nu) < \delta \Rightarrow |\varepsilon(\mu) - \varepsilon(\nu)| < \gamma.$$

选取 $\mu_1, \dots, \mu_N \in \mathcal{M}(X)$, 使得:

$$\mathcal{M}(X) \subset \bigcup_{i=1}^N B(\mu_i, \delta),$$

其中 $B(\mu, \delta) = \{\nu \in \mathcal{M}(X) : \rho(\mu, \nu) < \delta\}$. 令 $V_1 = B(\mu_1, \delta)$, 对每个 $1 < i \leq N$, 令

$$V_i = B(\mu_i, \delta) \setminus \bigcup_{j < i} B(\mu_j, \delta),$$

则 $\{V_1, V_2, \dots, V_N\}$ 是 $\mathcal{M}(X)$ 的一个剖分, 其中 δ 和 N 都只和 γ 有关.

令 $F_{n,i} = \{x \in F_n : e_x^n \in V_i\}$, 则 $F_n = \bigcup_{1 \leq i \leq N} F_{n,i}$.

注意到 $\varepsilon(e_x^n) \geq c$ 对所有的 $x \in F_n$ 都成立, 因此可以假设 $\varepsilon(\mu_i) > c$, $1 \leq i \leq N$. 根据文献[5]中的引理 2.7 和 2.8, 存在 i 使得如果定义

$$v_n = \frac{1}{\sum_{x \in F_n} \exp[-n\mathcal{F}(e_x^n)]} \sum_{x \in F_{n,i}} \exp[-n\mathcal{F}(e_x^n)] e_x^n,$$

且假设当 $n \rightarrow \infty$ 时 $v_n \rightarrow \tilde{v} \in \mathcal{M}_T(X)$, 则

$$h_v(T) - \mathcal{F}(\tilde{v}) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \sum_{x \in F_n} \exp[-n\mathcal{F}(e_x^n)]}{n} - 5\gamma.$$

进一步, 因为 v_n 是测度 $\{e_x^n : x \in F_{n,i}\}$ 的凸组合, 易得:

$$\varepsilon(v_n) > \varepsilon(\mu_i) - \gamma > c - \gamma.$$

由 ε 的连续性和 γ 的任意性可得:

$$h_v(T) - \mathcal{F}(\tilde{v}) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \sum_{x \in F_n} \exp[-n\mathcal{F}(e_x^n)]}{n} - 5\gamma, \varepsilon(\tilde{v}) \geq c. \quad (6)$$

由式(5)可得:

$$\frac{\log m(E_n)}{n} \leq \frac{\log \sum_{x \in F_n} m(B_n(x, \varepsilon))}{n} \leq \frac{\log C + \log \sum_{x \in F_n} \exp[-n\mathcal{F}(e_x^n)]}{n},$$

令 $n \rightarrow \infty$, 结合式(6)并注意到 $E_n = \bigcup_{x \in F_n} B_n(x, \varepsilon)$, 即可得到式(4).

(3) 固定 $\mathcal{F} \in \mathcal{V}^-$ 和 $v \in \mathcal{M}_T(X)$ 满足 $\varepsilon(v) > c$.

设 $E_n = \{x \in X : \varepsilon(e_x^n) > c\}$. 只需证明对任意给定的 $\gamma > 0$, 有:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log m(E_n)}{n} \geq h_v(T) - \mathcal{F}(v) - 3\gamma.$$

对固定的 $\gamma > 0$ 和 $\delta \in (0, (\varepsilon(v) - c)/4)$, 由 ε 和 $\mathcal{F}$ 的连续性可选取 $\varepsilon_0 > 0$, 使得:

$$\rho(m_1, m_2) < \varepsilon_0 \Rightarrow |\varepsilon(m_1) - \varepsilon(m_2)| < \delta,$$

$$|\mathcal{F}(m_1) - \mathcal{F}(m_2)| < \gamma.$$

根据遍历分解定理, 存在

$$\mu = \sum_{i=1}^k a_i \mu_i \in \mathcal{M}_T(X), \text{ 满足:}$$

$$h_\mu(T) > h_v(T) - \gamma,$$

其中 $\sum_{i=1}^k a_i = 1$, $a_i > 0$ 且 $\mu_i \in \mathcal{M}_T^e(X)$.

记 $[x]$ 为 x 的整数部分, 利用 ε 的一致连续性、Katok 熵公式、Birkhoff 遍历定理和 Egoroff 定理, 可选取足够小的 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0/16)$ 和足够大的 N , 使得以下性质成立:

(i) 对每个 $n \geq N$ 和 $1 \leq i \leq k$,

$$\left| \frac{[a_i n]}{[a_1 n] + [a_2 n] + \dots + [a_k n]} - a_i \right| \text{ 足够小, 使得:}$$

$$\rho \left(\sum_{i=1}^k \frac{[a_i n]}{[a_1 n] + [a_2 n] + \dots + [a_k n]} \mu_i, \sum_{i=1}^k a_i \mu_i \right) < \varepsilon. \quad (7)$$

(ii) 对每个 $n \geq N$, $(2(k-1)g(\varepsilon))/\hat{n} < \varepsilon_0/4$, 其

中 $\hat{n} = (k-1)g(\varepsilon) + \sum_{i=1}^k [a_i n]$, g 是碎轨性质定义

中的函数.

(iii)对每个 $n \geq N$ 和 $1 \leq i \leq k$, 存在至少

$\exp(a_i n(h_{\mu_i}(T) - \gamma))$ 个点 $x_{i,1}, \dots, x_{i,n_i}$,

$(n_i \geq \exp(a_i n(h_{\mu_i}(T) - \gamma)))$

是 $([a_i n], 4\varepsilon)$ 分离的, 且

$$\rho(e_{x_{i,j}}^{[a_i n]}, \mu_i) < \varepsilon, \quad \forall 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n_i. \quad (8)$$

因为 (X, T) 有碎轨性质, 对任意的 $1 \leq j_i \leq n_i$, $1 \leq i \leq k$, k 元组 $(j_1, \dots, j_k)$, 存在 $y = y_{j_1 \dots j_k} \in X$, 使得 y 以时间间隔 $g(\varepsilon)$ ε -跟踪轨道段 $[x_{1,j_1}, \dots, T^{[a_1 n]-1} x_{1,j_1}], [x_{2,j_2}, \dots, T^{[a_2 n]-1} x_{2,j_2}], \dots, [x_{k,j_k}, \dots, T^{[a_k n]-1} x_{k,j_k}]$.

定理 2 集合 F 是 $(\hat{n}, 2\varepsilon)$ 分离的, 因此对不同的 $y, y' \in F$ 有 $B_{\hat{n}}(y, \varepsilon) \cap B_{\hat{n}}(y', \varepsilon) = \emptyset$, 进而 $\#F \geq \exp(\hat{n}(h_{\mu}(T) - \gamma))$.

证明 对任意不同的 $y = y_{j_1 \dots j_k}, y' = y_{j'_1 \dots j'_k} \in F$, 可假设 $j_1 \neq j'_1$, 则 $d_{[a_1 n]}(y, x_{1,j_1}) < \varepsilon$, $d_{[a_1 n]}(y', x_{1,j'_1}) < \varepsilon$, 而 $d_{[a_1 n]}(x_{1,j_1}, x_{1,j'_1}) > 4\varepsilon$, 因此 $d_{[a_1 n]}(y, y') > 2\varepsilon$, 进而 $d_{\hat{n}}(y, y') > 2\varepsilon$.

对每个 $y = y_{j_1 \dots j_k} \in F$ 估计 $\rho(e_y^{\hat{n}}, \nu)$. 记 $y_1 = y$, 且对 $2 \leq i \leq k$, 记 $y_i = T^{[a_1 n] + \dots + [a_{i-1} n] + (i-1)g(\varepsilon)}(y)$, 对任意的 $\phi \in (X, [0, 1])$,

$$\begin{aligned} & \left| \int \phi d e_y^{\hat{n}} - \int \phi d \left(\sum_{i=1}^k \frac{[a_i n] e_{y_i}^{[a_i n]}}{[a_1 n] + [a_2 n] + \dots + [a_k n]} \right) \right| \leq \\ & \left| \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{l=0}^{[a_i n]} \phi(T^l y_i)}{\hat{n}} - \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{l=0}^{[a_i n]} \phi(T^l y_i)}{[a_1 n] + [a_2 n] + \dots + [a_k n]} \right| + \\ & \left| \frac{(k-1)g(\varepsilon)\|\phi\|}{\hat{n}} \right| \leq 1 - \frac{[a_1 n] + [a_2 n] + \dots + [a_k n]}{\hat{n}} + \\ & \frac{(k-1)g(\varepsilon)}{\hat{n}} = \frac{2(k-1)g(\varepsilon)}{\hat{n}}, \end{aligned}$$

其中 $\|\phi\| = \sup_{x \in X} |\phi(x)|$. 由此可得:

$$\rho\left(e_y^{\hat{n}}, \sum_{i=1}^k \frac{[a_i n] e_{y_i}^{[a_i n]}}{[a_1 n] + [a_2 n] + \dots + [a_k n]}\right) < \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

因为 $y\varepsilon$ -跟踪 $x_{j_1}, \dots, x_{j_k}$ 的轨道段, 易得:

$$\rho\left(\sum_{i=1}^k \frac{[a_i n] e_{y_i}^{[a_i n]}}{[a_1 n] + [a_2 n] + \dots + [a_k n]}, \nu\right) < \varepsilon.$$

$$\sum_{i=1}^k \frac{[a_i n] e_{x_{i,j_i}}^{[a_i n]}}{[a_1 n] + [a_2 n] + \dots + [a_k n]} < \varepsilon.$$

由式(8),

$$\rho\left(\sum_{i=1}^k \frac{[a_i n] e_{x_{i,j_i}}^{[a_i n]}}{[a_1 n] + [a_2 n] + \dots + [a_k n]}, \sum_{i=1}^k \frac{[a_i n] \mu_i}{[a_1 n] + [a_2 n] + \dots + [a_k n]}\right) < \varepsilon.$$

由式(7),

$$\rho\left(\sum_{i=1}^k \frac{[a_i n] \mu_i}{[a_1 n] + [a_2 n] + \dots + [a_k n]}, \sum_{i=1}^k a_i \mu_i\right) < \varepsilon.$$

最后, 注意到 $\rho(\sum_{i=1}^k a_i \mu_i, \nu) < \varepsilon_0 / 2$, 结合之前的估计可得:

$$\rho(e_y^{\hat{n}}, \nu) < \frac{\varepsilon_0}{4} + 3\varepsilon + \frac{\varepsilon_0}{2} < \varepsilon_0.$$

根据 ε_0 的选取, 可得如下结论: 对任意 $y \in F$,

(i) $|\mathcal{F}(e_y^{\hat{n}}) - \mathcal{F}(\nu)| < \gamma$.

(ii) 对任意的 $z \in B_{\hat{n}}(y, \varepsilon)$, 易证

$$\rho(e_z^{\hat{n}}, \nu) < \rho(e_z^{\hat{n}}, e_y^{\hat{n}}) < \frac{\varepsilon_0}{4} + 4\varepsilon + \frac{\varepsilon_0}{2} < \varepsilon_0,$$

因此, $|\mathcal{F}(e_z^{\hat{n}}) - \mathcal{F}(\nu)| < \delta$, 且 $B_{\hat{n}}(y, \varepsilon) \subset E_{\hat{n}}$.

现在可以完成证明, 注意到 $\mathcal{F} \in \mathcal{V}^-$, 对任意 $x \in X$, $n \geq 1$ 和足够小的 ε 都有 $m(B_n(x, \varepsilon)) \geq C(\varepsilon) \exp(-n\mathcal{F}(e_x^n))$ 成立, 因此可得:

$$\begin{aligned} & \liminf_{\hat{n} \rightarrow \infty} \frac{1}{\hat{n}} \log m(E_{\hat{n}}) \geq \\ & \liminf_{\hat{n} \rightarrow \infty} \frac{1}{\hat{n}} \log \left[\sum_{y \in F} m(B_{\hat{n}}(y, \varepsilon)) \right] \geq \\ & \liminf_{\hat{n} \rightarrow \infty} \frac{1}{\hat{n}} \log \left[\#F \cdot C(\varepsilon) \exp(-\hat{n}\mathcal{F}(e_y^{\hat{n}})) \right] \geq \\ & h_{\mu}(T) - \gamma - \mathcal{F}(e_y^{\hat{n}}) \geq h_{\mu}(T) - \mathcal{F}(\nu) - 2\gamma \geq \\ & h_{\nu}(T) - \mathcal{F}(\nu) - 3\gamma. \end{aligned}$$

参考文献:

- [1] SINAI Y. Gibbs measures in ergodic theory[J]. Russian Mathematical Surveys, 1972, 27:21-69.
- [2] RUELLE D. Thermodynamic formalism: the mathematical structures of equilibrium statistical mechanics[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [3] BOWEN R. Equilibrium states and the ergodic theory of

- anosov diffeomorphisms[M]. Berlin: Springer, 1975.
- [4] LEPLAIDEUR R, WATBLED F. Generalized curie-weiss model and quadratic pressure in ergodic theory[J]. Bulletin de la Société Mathématique de France, 2019, 147(2):197-219.
- [5] BUZZI J, KLOECKNER B, LEPLAIDEUR R. Nonlinear thermodynamical formalism[J]. Annales Henri Lebesgue, 2024, 6:1429-1477.
- [6] YOUNG L S. Large deviations in dynamical systems[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1990, 318(2):525-543.
- [7] ELLIS R S. Entropy, large deviations, and statistical mechanics[M]. New York: Springer, 1985.
- [8] STROOCK D W. An introduction to the theory of large deviations[M]. New York: Springer, 1984.
- [9] VARADHAN S R S. Large deviations and applications [M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1984.
- [10] CHUNG Y M, TAKAHASI H. Large deviation principle for benedicks-carleson quadratic maps[J]. Communications in Mathematical Physics, 2012, 315(3):803-826.
- [11] CHUNG Y M, TAKAHASI H. Multifractal formalism for Benedicks-Carleson quadratic maps[J]. Ergodic Theory and Dynamical Systems, 2014, 34(4):1116-1141.
- [12] COMMAN H, RIVERA-LETELIER J. Large deviation principles for non-uniformly hyperbolic rational maps[J]. Ergodic Theory and Dynamical Systems, 2011, 31(2): 321-349.
- [13] LI H B. Large deviation principles of one-dimensional maps for Hölder continuous potentials[J]. Ergodic Theory and Dynamical Systems, 2016, 36(1):127-141.
- [14] COLLET P, ECKMANN J P. Positive Liapunov exponents and absolute continuity for maps of the interval [J]. Ergodic Theory and Dynamical Systems, 1983, 3(1): 13-46.
- [15] PELETIER M, GAVISH N, NYQUIST P. Large deviations and gradient flows for the Brownian one-dimensional hard-rod system[J]. Potential Analysis, 2023, 58(1):71-121.
- [16] FRANCO T, GONÇALVES P, NEUMANN A. Large deviations for the SSEP with slow boundary: the non-critical case[J]. Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics, 2023, 20(1):359.
- [17] BRIN M, KATOK A. On local entropy[M]. Berlin: Springer, 1983.
- [18] WALTERS P. An introduction to ergodic theory[M]. New York: Springer, 1982.
- [19] KATOK A. Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms[J]. Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques, 1980, 51(1):137-173.

Some results on large deviation for nonlinear thermodynamic formalism

GAO Yinhui, JI Yong

(School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: Topological pressure plays an important role in ergodic theory, dynamical system, dimensional theory and equilibrium states theory. The classical thermodynamical formalism, i.e. the case where the potential function is additive, has many important theoretical results and wide applications, both in deterministic systems and random systems. Buzzi, Kloeckner and Leplaideur defined nonlinear thermodynamical formalism of dynamical systems, and analyzed this nonlinear thermodynamics using suitable convex analysis. In this paper, we give some results concerning large deviation for nonlinear thermodynamical formalism.

Key words: nonlinear thermodynamic formalism; large deviation; specification property; dynamical system

(责任编辑 史小丽)