

DOI: 10.20098/j.cnki.1001-5132.2024.1013

经典和量子可积系统若干前沿问题

楼森岳

(宁波大学 物理科学与技术学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 对经典和量子可积性的前沿研究方面提出一些有意义的探索问题: (1)玻色(对易)可积系统、费米(反对易)可积系统、任意子(q 对易)可积系统及其混合系统的相关问题; (2)量子可积性的算子变换理论; (3)线性量子薛定谔方程的无限自由度引起的有限自由度不可积性; (4)与潘勒韦类型的非解析种子解对应的达布变换和反散射理论; (5)非局域对称和局域对称的一般对偶理论; (6)从互反变换推广理论引入的高维可积系统的求解; (7)如何从达布变换、反散射方法、黎曼-希尔伯特方法等传统可积系统理论中获得多线性分离变量解; (8)如何用传统方法推导超可积、超对称可积、任可积和任对称可积系统的玻色化方法的严格解; (9)对称性可求解可积系统多波解的猜想; (10)对称性求解完全可积和部分可积系统的一般猜想; (11)从 1+1 维双线性可积系统推广到高维可积系统、离散可积系统、超对称可积系统和任对称可积系统的猜想.

关键词: 经典和量子可积性; 任对称和超对称可积性; 对称性猜想; 高维可积形变猜想

中图分类号: O4; O1

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2025) 01-0001-13

0 引论

自人类开启灵智以来, 数的发展起着非常奇妙的作用. 自然数 $\rightarrow$ 正分数 $\rightarrow$ 负数 $\rightarrow$ 有理数 $\rightarrow$ 无理数 $\rightarrow$ 实数 $\rightarrow$ 虚数($i^2 = -1$) $\rightarrow$ 复数 $\rightarrow$ G 数(Grassmann 数, $a^2 = 0, a \neq 0$) $\rightarrow$ 算子……数的每一步发展都会导致自然科学的新发展, 导致人类对认识自然、改造自然的不断深入. G 数的引入不仅解决了不少数学中的难题, 更是导致了如超对称物理学之类新科学领域的诞生^[1], 也有望使所有四种相互作用得到完美的统一^[2-3]. 超对称物理学的诞生也使得一些复杂的量子物理问题^[4]和数学问题得以轻松解决. G 数的引入还使一些表面上不可开方的算式得以完成, 如微分算子的开方 $\rightarrow$ 超对称导数

$$\sqrt{\partial_x} = \partial_\theta + \theta \partial_x = D \quad (1)$$

的诞生以及超可积和超对称可积系统新领域的诞生^[5-7]; 又如 3+1 维达朗贝尔算子(或相对论性能量)

开方结合 G 代数的矩阵实现导致了 Dirac 方程的发现, 进而导致了相对论量子力学^[8]的诞生及反物质(正电子等)的预言和发现^[9].

G 数的存在对应于费米子的存在, C 数对应于玻色子, 费米子对应于费米-狄拉克统计, 玻色子对应于玻色-爱因斯坦统计. 最近, 物理学特别是凝聚态物理学的发展使人们发现在 2+1 维系统中存在多种类型的拓扑态^[8-12]需要用任意子^[13-14]来进行描述, 并且任意子满足完全不同的统计规律. 类似于 G 数和 C 数, 我们可引入一种新的数——R 数(任数或任意子数), 为区别于国际上已经存在的一个任意子代数^[15], 对应的代数称为 R 代数(任代数), 对应的微积分可以称为 R 微积分(任微积分). 对应于超对称物理学, 我们可以建立任对称物理学; 对应于超可积系统和超对称可积系统, 我们可以引入任可积系统和任对称可积系统. 有意义的是对于自然数 α 来说, R 数可以有多种引入方式. 最简单、最直接的方法可由条件

收稿日期: 2024-10-28.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journalg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(12235007).

第一作者: 楼森岳, 教授, 主要研究方向: 非线性物理、应用数学、粒子物理和量子场论、非线性大气和海洋动力学. E-mail: lousenyue@nbu.edu.cn

$$\theta^\alpha = 0, \theta^{\alpha-1} \neq 0 \quad (2)$$

来导出各种代数运算条件. 有意义的是利用这样引入的 R 数可以成功地对偏微分算子开 α 次方, 结果可定义为任对称导数, 从而能成功建立任微积分及任可积系统和任对称可积系统^[16], 而通常的 G 数、 G 代数、超对称理论、超可积和超对称可积系统正是对应于 $\alpha = 2$ 的特殊情况.

从经典力学到量子力学是将非线性的有限自由度系统映射到了具有无限自由度的线性系统^[17], 数学观点上是将非线性常微分系统变换到线性的偏微分系统. 类似地, 从经典场论到量子场论则是将非线性偏微分方程变换到了线性的泛函微分方程^[18-20]. 要从量子理论回到经典理论, 普遍观点是经典力学(场论)的可观察量在相应量子态下的平均值取普朗克常数趋于 0 时的极限. 但此观点只在个别情况下有严格的证明, 而在一般情况下, 特别是在量子场论情况下没有得到严格的证明. 在牵涉到可积和不可积(混沌)问题上, 此问题变得尤为突出. 经典可积系统对应到量子系统时, 其可积性(可解性)往往是不明确的, 从而使得现在已知的量子可积系统远远少于经典可积系统, 而在经典混沌对应到量子混沌时更是存在大量的问题. 甚至有人认为线性系统没有混沌问题, 从而使量子系统被认为是没有混沌的. 而现在认为有量子混沌的专家在处理量子混沌时, 本质上也是先把量子问题做半经典近似, 将线性问题用近似方法转换为非线性问题来处理. 一方面, 量子混沌和量子纠缠是当前物理科学中非常重要的前沿课题^[21]; 另一方面, 这个问题也存在着非常大的意见分歧.

实际上此问题的探索要回到从经典力学到量子力学的转化上, 关键点是我们将有限自由度问题转换到了无限自由度! 所以无限自由度线性问题没有无限自由度的混沌, 但是对应的经典问题只是有限自由度的混沌. 因此, 无限自由度的线性系统可以存在有限自由度的混沌, 并且此有限自由度既可以体现在初值, 又可以体现在边值, 同样可以体现在无限自由度到有限自由度的缩并求和过程中. 实际上, 在纯经典问题上也有类似情况. 对于非线性问题, 由于问题本身的高度非线性, 人们通常会采用各种各样的近似方法, 最常用方法是微扰论方法. 微扰论方法的零级近似一定是一

个可积系统(人们经常选择零级近似是线性系统), 然后各级微扰一定是线性系统, 这样不管算到多少级, 都是用一个线性系统去近似一个非线性系统(如同伦近似方法^[22-23]), 不可能得到本质的非线性效应(如混沌). 要得到完全等价的非线性效应, 人们必须算到变系数的无穷级线性系统. 一般情况下, 人们不可能完成无穷级的演算, 因而会退而求其次, 结合其他方法(如变分法)使得部分类型的无限级结果隐含到线性近似结果中, 由此可以得到一些本质的非线性效应^[18,24].

对称性在自然界中起着至关重要的作用, 最一般的原理性理论甚至可以由对称性来建立, 如粒子物理和宇宙学中的标准模型^[25]. 因此, 对称性也往往是解决问题的关键. 在量子物理问题中, 研究体系处于何种状态, 必须通过测量才能知道, 所以量子状态与测量手段相关. 本质上来说, 量子系统的演化乃至测量都可以看成一种变换, 是从初态到末态的系列变换. 因此我们完全可以从变换理论出发来研究量子态、量子可积和量子混沌等问题. 如平移变换可导致相干态, 标度变换可导出压缩态^[26-27], 多粒子间的广义转动变换可导致纠缠态, 因此可进一步利用一般的变换理论来研究量子可积性、可积量子纠缠和不可积量子纠缠及其对应的量子混沌.

在非线性系统的求解问题中, 达布变换和反散射方法具有至关重要的地位. 然而现在对这两种方法能真正求解的势函数还很少, 只有如多孤子解和周期解类的解析解. 对于一般非解析解(如潘勒韦解)作为种子解时, 这类问题还无从着手. 而最近非局域对称和局域对称的联合研究^[28-30]为此类困难问题的求解提供了可行的思路.

在可积系统中存在无穷多的局域系统, 也存在无穷多的非局域对称. 人们对局域对称已有深入的研究, 而对非局域对称的研究还非常少. 最近研究表明, 当对可积系统进行适当的变换后, 使可积梯队中其中一个系统具有相对论不变性时, 局域对称和非局域对称具有一个非常简单的一一对应关系^[31]. 但局域对称和非局域对称是相对的, 在一种特殊时空中, 非局域对称可变成局域, 而局域对称也可成为非局域. 这些均表明一般可积系统的非局域对称和局域对称也具有对偶关系.

如果可积系统可以纳入拉格朗日框架, 则诺特定理表明任一对称性具有相应的守恒律. 在 1+1 维情况下, 任一守恒律都可以引入一个互反变换, 还可以引入一个额外的维度, 从而将低维可积系统推广到任意维的高维可积系统^[32-34], 然而这样引入的高维可积系统目前还没有办法求解.

线性科学中由于线性叠加原理的成立, 从而可以有统一的求解方法, 如傅里叶变换方法和分离变量法. 在非线形情况下, 这两种方法都不再直接适用, 而是需要做适当的推广. 对于可积系统, 反散射方法是傅里叶变换的非线性版本; 但是分离变量没有合适及统一的非线性版本. 非线性化方法被看成是一种形式的分离变量, 实际上变量没有真正分离. 对于某些类型的 2+1 维可积系统, 我们建立了变量真正分离的方法——多线性分离变量法^[35-38]. 利用多线性分离变量法可以得到很多非常一般的包含一些任意函数的严格解, 然而这些具有相当普适性的严格解如何从达布变换、反散射方法、黎曼-希尔伯特方法等传统可积系统理论中得到该重要问题还一直没有得到满意的解决.

由于费米场的非对易性, 求解超可积系统和超对称可积系统非常困难. 为此, 我们提出了玻色化方法^[39-41], 使得经典可积系统的任何解都可方便地推广到相应的超可积系统、超对称可积系统、任可积系统和任对称可积系统^[42-44]. 但是自玻色化方法提出以来, 采用玻色化方法得到的结果还没有用其他方法得到过. 因此一旦可用传统方法时, 必将对超对称可积系统理论产生重大影响.

众所周知, 可积系统具有无穷多对称和无穷多守恒律, 然而只有有限个对称和有限个守恒律具有相应的物理意义. 最近, 我们将对称性应用于具体的严格多波解, 幸运地发现了无穷多对称的物理意义^[43]. 由此我们提出了一个可积系统的对称猜想: 无穷多对称性的存在对应多波解的存在, 已知的无穷多 K 对称和 τ 对称仅是多波解中每个波的波中心平移不变性、波数平移不变性和其他波参数平移不变性的线性组合. 因此, 对称性猜想意味着可积系统多波解可以利用对称性来得到.

对于对称性求解完全可积系统和部分可积系统的一般猜想来说, 对称性猜想可积系统的多波解可以利用一般对称得到^[43]; 利用非局域对称性,

达布可积系统的达布变换可以由对称性导出^[45-47]; 潘勒韦可积系统所有解的任意函数取任意无穷小函数后, 即可证明潘勒韦可积系统的所有解都可由无穷多对称性得到; 任意维度的任意一阶自治系统的所有解也被证明可以由对称性得到^[48]. 由此我们可以提出一个猜想: 任意非线性系统的严格解都可以用对称性方法得到.

根据最近超对称性的双线性方法研究结果, 人们发现了很多有意义的规律, 并且从这些规律出发能很方便地从 1+1 维双线性可积系统中得到一些新的高维可积系统、离散可积系统、超对称可积系统和任对称可积系统等. 这些一般规律可总结为一些有意义的可积系统猜想^[49-50].

1 任可积系统和任对称可积系统

1.1 任数、任代数和任对称导数

根据任数的定义式(2), 如果 a 和 b 为任数, 若要求 $a+b$ 也是任数, 我们即可导出任代数、 q 对易代数^[42],

$$ab = q_j ba, q_j^\alpha = 1, q_j = q^j, q = \exp\left\{\frac{2\pi i}{\alpha}\right\}, i = \sqrt{-1},$$

$$j = J_\alpha = \{1, 2, \dots, \alpha-1\} / \{n_m p_m < \alpha\}, \quad (3)$$

其中, p_m 为 α 的所有质因数, $\{n_m p_m < \alpha\}$ 为所有满足条件 $n_m p_m < \alpha$ 的整数集合. 如对于小的 α , 则有 $J_3 = \{1, 2\}, J_4 = \{1, 3\}, J_5 = \{1, 2, 3, 4\}, J_6 = \{1, 5\}, J_7 = \{1, 2, \dots, 6\}, J_8 = \{1, 3, 5, 7\}$. 从式(3)可知, G 代数对应于 $\alpha = 2$, 玻色对易代数对应于 $\alpha = \infty$.

对于任数 γ 的度 β , $\text{mod}(\alpha)$ 定义为

$$\gamma\theta = q^\theta \theta\gamma, \quad (4)$$

其中, θ 的度总是定义为 1. 如果任数 γ_1 和 γ_2 的度分别为 β_1 和 β_2 , 则其对易关系为

$$\gamma_1 \gamma_2 = q^{\beta_1 \beta_2} \gamma_2 \gamma_1.$$

任意导数 $d/d\theta$ 定义为

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} = \frac{f(\theta_1) - f(\theta)}{\theta_1 - \theta} \Big|_{\theta_1 \rightarrow \theta} = \frac{f(\theta) - f(q\theta)}{(1-q)\theta}. \quad (5)$$

由于任数的定义式(2), 只需要计算 $d\theta^i/d\theta$, 当 $i=1, 2, \dots, \alpha-1$ 时即可, 结果为

$$\frac{d\theta^i}{d\theta} = \frac{1-q^i}{1-q} \theta^{i-1} = i_q \theta^{i-1},$$

$$i_q = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{i-1}.$$

任对称导数 $\Re$ 定义为

$$\Re^\alpha = \partial_x, \Re_\alpha = \Re = \sqrt[q]{\partial_x} =$$

$$\partial_\theta + \frac{1}{[(\alpha-1)!]_q} \theta^{\alpha-1} \partial_x, \quad (6)$$

其中, $[n!]_q = 1_q 2_q \cdots (n-1)_q$ 为 q 阶乘. $q=1$ 时, q 阶乘退化为正常的阶乘. $\alpha=2$ 时, 任对称导数即为超导数式(1), $\alpha=3$ 时, 超对称导数为

$$\Re_3 = \partial_\theta - q\theta^2 \partial_x, q = \frac{1}{2}(\sqrt{3}i-1).$$

任对称导数 $\Re$ 具有下述任对称性:

$$\theta \rightarrow \theta + \eta, x \rightarrow x - f(\theta, \eta),$$

$$f(\theta, \eta) = \sum_{k=1}^{\alpha-1} \frac{1}{[k!]_q [(\alpha-k)!]_q} \theta^k \eta^{\alpha-k}.$$

当 $\alpha=2$ 时, 任对称即为通常的超对称 $f = \theta\eta$.

当 $\alpha=3$ 时,

$$f = \frac{1}{[2!]_q} (\theta^2 \eta + \theta \eta^2).$$

1.2 任可积系统

众所周知, 著名的 KdV 方程

$$u_t = (-u_{xx} + 3u^2)_x, \quad (7)$$

具有 Lax 对

$$\psi_{xx} - (u + \lambda)\psi = L\psi = 0,$$

$$\psi_t - 3u_x \psi - 6u\psi_x - 4\psi_{xxx} = S\psi = 0, \quad (8)$$

因此, $[L, S] = LS - SL = 0$ 即为 KdV 方程式(7).

在传统理论中, Lax 方程式(8)中的谱函数 ψ 被理所当然地看成是玻色的. 在玻色谱函数的情况下, 平方本征函数 $(\psi^2)_x$ 是 KdV 方程的一个非局域对称, 由此人们可以得到含源可积系统^[39]. 然而由于 Lax 对对于谱函数是线性的, 因此, 它既可以是玻色, 也可以是费米, 甚至可以是更一般的向量玻色、向量费米和向量任意子的谱函数. 在费米情况下, 相应的含源方程成为了超可积系统^[42]. 更进一步, 我们可以统一得到包含玻色、费米和任意子场的任可积系统.

以著名的 KdV 方程为例, 可以推广为下述一般的任可积 KdV 方程:

$$\begin{aligned} u_t + u_{xxx} - 6uu_x + 12\zeta_1 \zeta_{2xx} - 12\zeta_{1xx} \zeta_2 &= 0, \\ (\partial_t + 4\partial_x^3 - 6u\partial_x - 3u_x)\zeta_1 &= 0, \\ (\partial_t + 4\partial_x^3 - 6u\partial_x - 3u_x)\zeta_2 &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

其中, ζ_1 和 ζ_2 分别为 β 和 $\alpha - \beta$ 阶的任意子场. 上

述任可积系统是 Lax 可积的, 即具有 Lax 对. 当 $\alpha=2$ 和 $\alpha=\infty$ 时, 任场成为费米场和玻色场. 式(9)是在多种传统意义下的可积系统, 如当它是 Lax 可积时, 其 Lax 对为

$$\begin{aligned} \psi_{xx} - (u + \lambda)\psi + \zeta_2 \left(\int \zeta_1 \psi dx \right) - \zeta_1 \left(\int \zeta_2 \psi dx \right) &= 0, \\ \psi_t - 3u_x \psi - 6u\psi_x - 4\psi_{xxx} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

1.3 任对称可积系统

β 阶的任对称 KdV 系统具有下述一般形式:

$$\begin{aligned} \Phi_t + \Phi_{xxx} + \sum_{i=0}^{(\beta+\alpha)/2} a_i (\Re^i \Phi) (\Re^{\beta+n-i} \Phi) &= 0, \\ \beta &= 1, 2, \dots, \alpha-1. \end{aligned} \quad (11)$$

对于上式完整的任对称可积分类还是一个未决问题, 但对于某些特殊的 a_i 来说, 可以证明其可积性. 如对于 $\alpha=3$,

$$\Phi_t = -\Phi_{1xxx} + (\Re^2 \Phi)^2 + (\Re \Phi) \Phi_{1x} \quad (12)$$

和

$$\Phi_{2t} = -\Phi_{2xxx} + 3\Phi_{2x} \Re^2 \Phi_2 \quad (13)$$

是一阶和二阶任对称可积系统, 其中, Φ_1 和 Φ_2 是任空间 $\{x, t, \theta\}$ 的一阶和二阶任场. 在 $\alpha=2$ 情况下, 任可积系统式(11)已成为标准的超对称可积系统, 而且其完整的可积分类已经在多个方向(如潘勒韦可积分类和高阶对称分类)上得以完成.

任可积系统和任对称可积系统都可以用类似于超可积系统和超对称可积系统的玻色化方法进行研究^[39-40].

1.4 问题

- (1)任可积系统和任对称可积系统的分类问题.
- (2)任对称可积系统、超对称可积系统及传统可积系统的统一处理问题. 其中, C 可积系统的问题已经得到解决.
- (3)任可积和任对称可积系统的应用问题.

2 量子可积性的对称变换理论

2.1 经典变换和量子态的联系

众所周知, 相干态和经典的空间平移相联系, 压缩态和标度变换相联系. 研究这种联系的最简单方法是范洪义提出的正规乘积编序算符内的算子积分方法. 经典变换群研究的基本方法是研究其无穷小形式——李代数^[51]. 在有限变换到无穷小的变换中自然引入了算子, 并将算子对应到量子力学的算子, 由此自然地由经典变换对应到了量

子问题. 再结合范洪义的有序算符内的积分理论(Integration Within an Ordered Product, IWOP)^[52], 人们可以从经典变换得到各种各样的量子态, 进而研究和解决相关量子物理问题.

2.2 经典变换和量子纠缠

量子纠缠是当前量子物理中的前沿热门问题, 与量子信息、量子计算、量子测量、量子密码、量子通信等未来先进科技密切相关. 与纠缠态相关的经典变换是多粒子空间之间的变换, 且目前物理学界用到的纠缠态主要跟经典线性变换相关, 而非线性经典变换对应的纠缠态问题是非常值得研究的重要课题.

2.3 经典变换和量子不可积性探索

一般的经典变换群是非线性群, 并且一般非线性变换群与其对应的李代数生成元之间的联系是非线性动力系统. 非线性动力系统如果是可积的, 则对应的量子态算子将满足量子的可积系统问题(量子 Yang-Baxter 方程). 如果非线性动力系统是不可积的, 对应的量子算子虽然有确定性的形式, 但其对应的量子态期望值是不确定的, 从而使经典变换系统的混沌对应到具有混沌行为的量子态. 因此, 从变换群角度来研究本质的量子可积和量子混沌是值得探索的一条新途径. 通过进一步的研究, 人们可以发现多粒子体系间的非线性变换对应的纠缠如果可分解成两两纠缠的组合, 则可对应于量子可积; 如果不能分解成两两纠缠, 则对应于量子混沌.

2.4 问题

- (1)一般多粒子体系初、末态量子变换算子的可积性判据是什么?
- (2)如何实现由变换理论导出量子可积态和量子混沌态?

3 高阶无穷维可积系统的低阶无穷维不可积性

3.1 与经典可积哈密顿系统对应的量子可积和不可积问题探索

如果经典系统是一个有限维自由度的哈密顿系统, 具有哈密顿量 $H(\mathbf{p}, \mathbf{x})$, 则对应的量子系统成为一个具有无穷维自由度的线性偏微分系统

$$i\hbar\psi_t = H(-i\hbar\nabla, \mathbf{x})\psi. \quad (14)$$

无限自由度的线性系统在同阶无限自由度上

没有混沌, 但在各种各样的近似条件下, 当无限自由度的阶数降低或降低到有限自由度时, 低阶无穷自由度或有限自由度的混沌是可以存在的. 导致混沌可能有多种原因, 可以来自于初始条件、边界条件以及减自由度导致的非线性. 虽然对应的有限维经典系统是可积的, 但是在量子情况下, 由于无限自由度的引入会导致本质的不可积因素, 这也是为何量子可积系统比经典可积系统少得多的主要原因.

3.2 与经典不可积哈密顿系统对应的量子可积和量子不可积性探索

对于有限自由度经典不可积哈密顿体系对应的量子系统, 除了上述从有限自由度到无限自由度对应引起的不可积性之外, 还存在着本质的经典对应混沌. 对应于此类量子系统, 除了研究其经典的对应混沌、无对应的量子混沌之外, 我们也将探索其可能抵消经典混沌的量子效应, 如果能找到此类效应, 则对混沌控制的研究无疑是非常有意义的.

3.3 问题

- (1)不可积边条件引起的线性量子薛定谔方程的混沌问题.
- (2)不可积初条件引起的线性量子薛定谔方程的混沌问题.
- (3)无穷多自由度引起的线性和非线性可积系统的混沌问题.

4 一般奇异势的达布变换和反散射变换问题

4.1 非局域对称及其局域化和不同非线性波的相互作用

严格解一直是非线性科学中的重要课题. 对非局域对称研究的深入使严格解的研究打开了一个全新的局面, 并且使得各种不同非线性波的相互作用研究揭开了序幕. 在过去, 对 Painlevé 波与孤立波、椭圆函数描述的周期波与孤立波、Airy 波、Bessel 波、任意 Boussinesq 波、任意 KdV 波等与孤立波相互作用的研究几乎无从着手. 现在利用非局域对称的局域化手段可以研究大量非线性系统中不同类型非线性波的严格解析的相互作用解, 并发现了一些非常有意义的共性. 如在椭圆周期波和孤立波相互作用解的研究中, 我们发现

椭圆周期波和孤立波均可统一采用李政道模型(Phi3+Phi4 模型)解来描述,以及描述周期波与孤立波相互作用后与模型无关的半波损失^[28-30,53-54].

4.2 问题

(1)以 Painlevé 波解为势的达布变换解和反散射变换解是什么?

(2)以一般 Boussinesq 波和 KdV 波为势的薛定谔方程的达布变换是什么?

5 局域对称和非局域对称的对偶问题

5.1 可积系统的正梯队和负梯队的对偶

在现代物理各个领域,对偶性研究也是一个重要的前沿热门课题,如量子物理学中波粒二象性(波和粒子的对偶性),电场和磁场之间的电磁对偶性,AdS/CFT 对偶性(反德西特引力与协变场论之间的对偶性),凝聚态物理中的粒子-涡旋对偶性^[55-59],粒子物理学中玻色子/费米子对偶性^[39-41]和量子与经典可积场之间的量子/经典对偶性等^[60].文献[31]中,利用相对性不变的场,如 sine-Gordon 场、Tzitzeica 场、Toda 场,等等,发现了一些可积系统局域对称/非局域对称的对偶性、可积系统正梯队/负梯队的对偶性.

5.2 问题

(1)非局域对称/局域对称对偶、正可积梯队/负可积梯队对偶的普适性问题.

(2)如何利用对偶性求解非线性系统?

6 高维形变系统的求解问题

6.1 得到高维可积系统的若干方法

孤子理论在场论、凝聚态物理、流体物理、等离子体物理及光学等物理学各分支的广泛应用,使可积系统的研究引起了许多数学家和物理学家的极大兴趣.由于高维可积模型稀少,因此寻找高维可积系统一直是非线性科学领域的重要课题.我们在以下几个方面已经取得了一些有意义的进展,主要包括:(1)基于所有已知 2+1 维可积模型都具有一个广义无中心的 Virasoro 型对称代数,而所有已知的 2+1 维不可积模型都不具有这样一个对称代数的事实,同时提出了具有广义 Virasoro 对称代数意义下的可积性,并建立了寻求在此意义下可积模型的一般方法.(2)利用任意一个 1+1 维可积

模型的递推算子,可以得到许多任意维度下的高维可积模型(高维破裂孤子方程).(3)利用内部参数相关的对称约束也可能得到一些特殊类型的高维可积模型.(4)由于任何低维可积模型都具有一个共形不变的 Schwarz 形式,因此提出了采用高维共形不变量构造高维可积模型的想法,并证明了一些相当一般的高维共形不变模型的 Painlevé 可积性.在文献[61]中,以 Kadomtsev-Petviashvili 方程为种子,利用推广的 Painlevé 分析方法,我们得到了许多高维的 Painlevé 可积的可积模型.(5)文献[62]中,我们利用不可逆形变,从 0+1 维的黎卡提方程出发,得到了 1+1 维和 2+1 维的可积的 sinh-Gordon 方程和 Tzitzeica 方程.

6.2 利用可积系统的守恒律将低维可积系统形变到高维可积系统

高维可积系统是存在的,而且非常丰富,可以利用低维可积系统的不同守恒律得到很多不同类型的高维可积系统.此类可积系统和形变前可积系统的可积性除 Painlevé 难以保持外,在其他可积性方面,如 Lax 可积性和对称可积性都得到了很好的保持.形变系统的 Lax 对可以直接应用形变术得到形变前的 Lax 对.形变系统的高阶对称不能从原系统中直接形变得到,但可以从原系统的高阶流方程中形变得到.虽然传统可积系统已经有了很多的有效研究方法来得到严格解,然而新系统是一种全新的可积系统,传统的求解方法已经不能再使用,原来所有的研究方法都需要重新研究发展,过去对于原方程的互反方程的研究要利用互反变换变回到原方程来研究,然后再互反回来.但是对于现有新模型,该有效方法不再适用,因为原模型和互反模型被结合在同一个模型中,大大增加了此类模型的研究难度,但也同时提供了新的研究机遇.虽然形变定理可适用于所有可积系统,但每个可积系统各有特色,仍然需要分别深入研究,我们期望在某个合适的模型中首先得到对此类模型研究的突破.

这里以 KdV 方程式(7)为例,利用其守恒律

$$\rho_t = J_x, \rho = u, J = 3u^2 - u_{xx}, \quad (15)$$

引入势函数 y ,

$$y_x = u, y_t = 3u^2 - u_{xx}, \quad (16)$$

将 y 作为新变量引入到 KdV 方程的解,

$$u \rightarrow u(x, y, t). \quad (17)$$

将式(17)代入式(7)即得一个(2+1)维 KdV-HD 方程,

$$u_t = \left(3u^2 - u_{xx} - 3uu_{xy} - \frac{3}{2}u^2u_{yy} \right)_x + \left(u^3 - u^3u_{yy} - \frac{3}{2}u^2u_{xy} \right)_y. \quad (18)$$

KdV-HD 方程(18)和文献[32]用形变方法得到的结果完全相同. 利用 KdV 方程(7)的更多守恒律可以得到更高维的可积 KdV 系统. KdV-HD 类型的单孤子解具有丰富的结构, 可以更好地描述实际物理问题. 虽然 KdV-HD 方程是 Lax 可积的, 且具有无穷多对称^[32], 但目前其多孤子解还不知道如何求解, 并且其他类型由守恒律形变推广的高维可积系统^[32-35]的多孤子求解问题也同样未得到解决.

6.3 问题

(1)如何求解由守恒律形变推广得到高维可积系统的多波解?

(2)如何在实际物理问题中导出 KdV-HD 系统式(18)?

(3)KdV-HD 系统式(18)有何独特的新的数学物理性质?

7 多线性分离变量解的传统方法研究问题

7.1 多线性分离变量法和孤子工厂

在线性科学研究中, 傅里叶变换方法和分离变量法是两种最重要的研究方法. 反散射变换方法可以看成是傅里叶变换在非线性可积系统中的成功推广. 然而, 分离变量法的推广要困难得多. 目前常见的有三种方法. 第一种方法在研究中被称为非线性化方法(Lax 对)^[63], 或者是对称约束方法^[64-65]、分离变量法. 这种分离变量法只是形式上的, 实际上变量没有分离, 因此可称其为形式分离变量法^[66]. 第二种方法是基于一般条件对称的泛函分离变量法及其推广的导数相关泛函分离变量法^[67]. 这种方法适用的范围很小, 得到的解也很少. 21 世纪初, 我们建立了第三种分离变量法, 称其为多线性分离变量法^[35-38].

对于 2+1 维的 KdV 方程(NNV 方程)^[35]:

$$u_t - a(u_{xx} - 3uv)_x - b(u_{yy} - 3uw)_y,$$

$$u_x = v_y, u_y = w_x, \quad (19)$$

其多线性分离变量解为

$$u = \frac{-2\Delta q_y p_x}{(a_0 + a_1 p + a_2 q + a_3 pq)^2}, \quad \Delta = a_0 a_3 - a_1 a_2, \quad (20)$$

其中, $p = p(x, t)$, $q = q(y, t)$, 分别为所示变量的任意函数, a_0 、 a_1 、 a_2 和 a_3 是任意常数. 有意义的是大量重要的 2+1 维非线性数学物理方程, 如 Davey-Stewartson (DS) 方程、非对称 NNV 方程、非对称 DS 方程、色散长波方程、Broer-Kaup-Kupershmidt 方程、长短波相互作用系统、Maccari 方程、一般 $(N + M)$ 分量的 Ablowitz-Kaup-Newell-Segur 系统等都有一个物理量具有普适表达式(20). 由于任意函数 p 、 q 都可进入普适表达式, 故式(20)可被称作是孤子工厂, 因此, 大量的局域激发模式如多线孤子解、多呼吸子解、多 dromion 解、多 lump 解、多网格孤子解、多瞬子解、多怪波解、多尖峰子 (peakon) 解、多紧子(compacton)解、多折叠子(foldon)解及上述类型之间的相互作用解等都可以从孤子工厂式(20)中产出.

7.2 问题

(1)如何从传统的著名方法如反散射方法、黎曼-希尔伯特(RH)方法中得到普适解式(20)?

(2)如何将多线性分离变量法的适用范围扩展? 如何将多线性分离变量法扩展到 1+1 维可积系统? 如何将方法应用到 KP 型方程?

8 玻色化解的传统方法研究问题

8.1 超对称 KdV 方程的玻色化方法

由于反对易的 Grassmann 变量和非对易的变量的引入, 使得超可积系统、任可积系统、超对称可积系统和任对称可积系统的研究和求解非常困难. 文献[39-41]提出的玻色化为求解此类系统提出了强有力的方法, 使得非线性系统的任何解可以很方便地推广到此类系统. 对于超对称 KdV 方程,

$$\Phi_t + 3\Phi \mathfrak{D} \Phi_x + 3\Phi_x \mathfrak{D} \Phi + \Phi_{xxx} = 0, \quad \mathfrak{D} = \partial_\theta + \theta \partial_x, \Phi = \xi + \theta u, \quad (21)$$

引入 2-Grassmann 参数解, 假设

$$u = u_0 + u_1 \zeta_1 \zeta_2, \xi = v_1 \zeta_1 + v_2 \zeta_2, \quad (22)$$

其中, ζ_1 、 ζ_2 为 Grassmann 参数, u_0 、 u_1 、 v_1 、 v_2

为玻色场,且满足下述暗方程:

$$u_{0t} + 6u_0 u_{0x} + u_{0xxx} = 0, \quad (23.1)$$

$$v_{1t} + (v_{1xx} + 3u_0 v_1)_x = 0, \quad (23.2)$$

$$v_{2t} + (v_{2xx} + 3u_0 v_2)_x = 0, \quad (23.3)$$

$$u_{1t} + (u_{1xx} + 6u_0 u_1)_x = 3(v_1 v_{2xx} - v_2 v_{1xx}). \quad (23.4)$$

从上述暗方程可以看出, u_0 满足的方程正是经典 KdV 方程,而其他暗场 v_1 、 v_2 、 u_1 在 u_0 确定的情况下,只需要求解阶梯线性化的方程.对于任意 Grassmann 参数解对应的暗方程,可以得到完全相同的结论.对于超可积系统、任可积系统和任对称可积系统,也有类似的玻色化结论.但是如何用传统方法得到玻色化方法得到的结果,目前仍莫衷一是.

8.2 问题

(1)如何用传统比如反散射方法和 RH 方法等得到玻色化方法结果?

(2)如何用玻色化方法得到传统方法才能得到的结果?

9 多波解的对称性猜想

9.1 KdV 方程无穷多对称的物理意义及其相关进展

自可积系统和孤子理论诞生之日起,人们便知道无穷多对称和无穷多守恒律没有任何的物理意义,只有极个别的对称和守恒律才有明显的物理意义.最近,我们从一个全新的角度去研究此问题^[43],即从特殊的已知解出发去研究可积系统的对称等一般性质.我们意外地发现了无穷多对称的物理意义:无穷多对称的存在隐含了任意 n 波的存在.每一个波具有一些特征参数,如波的位置(波中心)、波数(与波高、波宽和波速有关)和周期等.对于确定的解,这些波参数具有平移不变性,而无穷多已知对称正是这些波参数平移不变性的线性组合.如对于 KdV 方程来说,无穷多 K 对称($K_n = \Phi^n u_x$)是 n 个波中心平移不变性的线性组合;无穷多 τ 对称($\tau_n = \Phi^n(3tu_t + xu_x - 2u)$)是波数平移不变性和波中心平移不变性的线性组合.在研究无穷多对称物理意义的同时,我们意外地同时解决了一些有意义的问题,如无穷多已知对称是不完备的,还有无穷多未知的对称.对于 n 波解无穷多个已知对称退化为有限个对称,而且还存在无

穷多的未知对称.特别地对于单孤子解,对应的无穷多对称可以解析获得,但是无穷多 K 对称退化为单个零模对称,并且其他的无穷多对称都是未知的.

9.2 对称性-多波解猜想和多波解的求解

对于一般的 n 波解和对称性有下述猜想^[43]:

对于一个对称可积的非线性偏微分方程组来说,如果存在一个 n 波解,

$$u = u_{mw} = u(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \xi_i = k_i x + \omega_i t + c_i, \\ i = 1, 2, \dots, n, \quad (24)$$

其中, c_i 和 k_i 是任意常数, $\omega_i = \omega_i(k_j, m_j, j = 1, 2, \dots, n)$ 可能不仅取决于波数 k_j , 还可能依赖于其他类型的参数,如与代数几何解相关的黎曼不变量 m_j , 那么对于 n 波解式(24), 无穷多 K 对称($K_n = \Phi^n u_x$, 或 $K'_n = \Phi^n u_t$)和 τ 对称($\tau_n = \Phi^n(atu_t + bxu_x + cu)$)是 n 波参数平移对称性的线性组合,其中, Φ 是模型的递推算子, a 、 b 、 c 为合适的常数.

如果猜想正确,由此即可得到求解多波解的新方法.如对于多孤子解,将多波解式(24)代入模型并联合若干 K 对称约束条件

$$K_m = \sum_{j=1}^n a_{jm} \partial_{\xi_j} u_{mw}, m = 1, \dots, M \geq n, \\ \text{即可得到 } n \text{ 波解.}$$

9.3 问题

(1)如何证明一般的对称性-多波解猜想?

(2)如何利用猜想建立完善的多波解求解?

10 任意非线性系统严格解的对称性猜想

10.1 任意一阶自治系统的严格解

对称群理论在研究非线性系统的精确解时非常有用.群论最初是由阿贝尔和伽罗华建立,以证明五阶单变量多项式方程一般代数解的不存在性.李和克莱因引入李对称代数来研究偏微分方程^[68].在本节中,主要讨论任意维、任意阶自治单分量偏微分方程的主枝解^[48].

定义 1 对于 m 阶 n 维偏微分方程,如果解包含 m 个独立的 $n-1$ 维任意函数,则称其为主枝解;如果解中只包含 $m_1 < m$ 个独立的 $n-1$ 维任意函数,那么称其为副枝解;如果解包含一些低维($n_1 < n-1$ 维)的任意函数,那么称其为退化解.

所有潘勒韦可积系统都存在主枝解.奇点分析表明,如果一个偏微分系统是潘勒韦可积的,那

么存在一个主枝解,使得在关于任意奇点流形的形式级数解中有足够多的任意函数(与主枝解的定义相同).如果试图通过对称理论寻找一个偏微分系统的主枝解,那么需要找到具有足够多的任意函数的对称性.相反,如果能够找到具有足够任意函数的对称性,那么可能成功地找到相关偏微分系统的主枝解.

对于以下任意 $n+1$ 维的一阶自治偏微分方程

$$F(u, u_t, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = 0, \quad (25)$$

其中, F 是所示变量的任意函数,在文献[48]中,我们证明了式(25)具有下述对称

$$\sigma = G(\tau_1, \dots, \tau_n), \tau_i \equiv \frac{u_{x_i}}{u_r}, i = 1, \dots, n,$$

其中, G 为 n 维的任意函数,由此即可得到式(25)的主枝解,副枝解和退化解也可以类似地得到,因此式(25)的所有解可以用对称性办法得到.

10.2 非局域对称和达布变换

达布变换也是可积系统理论中最重要的求解理论之一.不少著名数学家认为对于可积系统,其他方法能得到的解达布变换方法也能得到.有意义的是对于一些重要的非线性系统,如 KdV 方程和 AKNS 系统,人们可以成功地利用非局域对称性将达布变换推导出来,这就隐含着对于可积系统来说,其他方法可以得到的结果对称性方法也同样可以得到.

对于 KdV 方程式(7),利用平方本征函数对称 $(\psi^2)_x$ 或留数对称 f_{xx} 可以导出其递推算子^[69],从而得到无穷多的局域对称(K 对称),然后利用 9.2 节的对称性-多波解猜想得到多波解.此外,利用 n 个具有不同本征值的平方本征函数对称(或留数对称) $(\psi_i^2)_x$ (或 f_{ixx}) 的局域化方法^[45,47],我们就能得到 KdV 方程的达布变换.

10.3 任意非线性系统严格解的对称性猜想

根据上两节的结果以及其他对称性求解问题的经验总结,我们可以将 9.2 节的对称性-多波解的猜想推广到最一般的情况.

(1)对称性-严格解猜想.任何完全可积和不完全可积系统的严格解都可以用对称性的方法得到.实际上将对称性-严格解猜想的对称性放宽到条件对称时,猜想是可以严格证明的,并且猜想可以限制到定理.

(2)条件对称性-严格解定理.任何完全可积和不完全可积系统的严格解都可以用对称/条件对称的方法得到.

10.4 问题

(1)如何一般地证明对称性-严格解猜想?如果猜想不成立,猜想成立的条件是什么?

(2)如何利用对称性-严格解猜想分类非线性系统的可积性?

11 双线性可积系统猜想

11.1 双线性可积系统猜想

为了描述变化万千的实际自然界,人们建立了大量的非线性数学物理模型.为了从这些模型中得到有用的信息,需要求解这些模型.由于求解非线性问题的困难性,人们通常做线性化近似来求解线性方程,然而普遍的线性化结果又不能正确地描述本质上非线性的物理问题.随着线性科学的日臻成熟和计算机科学的迅猛发展,人们在处理求解非线性问题上的能力越来越强.在非线性的求解过程中,如何把可积的、可解的模型从众多的非线性问题中分离出来,或者如何用可积的、可解的非线性模型来求解实际的非线性问题成为了非线性数学物理的最重要问题之一.

在低维时空(一维时间、一维或二维空间)的情况下,人们已经在不少评论文章或专著中列出了大量的可积模型(如文献[70]),而且这些模型应用到了几乎所有的自然科学领域,特别是物理学的所有分支.大量的自然现象和规律都可以用这些可积模型的基本非线性激发模式来描述.如可积系统的最基本激发模式是孤立子,孤立子或孤立波可以描述构成物质的各种基本粒子,可以描述宇宙、星系、天体,可以描述各类天体上发生的各种现象,还可以描述木星的大红斑旋涡,神经元轴突上传递的冲动电信号,大气中的台风、龙卷风,雪灾、洪涝和干旱相关的大气阻塞,激光在介质中的自聚焦,物种的相对稳定,财富和权力的相对稳定,文化习俗和政治制度的相对稳定,等等.

实际的物理世界是高维的,至少具有三维空间和一维时间.然而在寻求高维的可积模型中遇到了极大的困难,也使得寻找高维可积模型成为了非线性科学发展中的一大少有进展的难题.为

解决此难题,国内外同行也做出了不少努力.其中有一个重要的思想类似于“全息术”,从一个低维的可积系统得到高维的可积模型.如从低维完全可积梯队得到高维条件可积模型;将低维强对称作用到额外维平移对称,以得到更高维的破裂孤子方程;复化低维可积模型的原时空变量到额外维^[71];利用低维可积系统关于额外维相关的共形不变,展开得到同时具有共形不变性和潘勒韦性质的高维可积模型^[61]等.

根据一些已知的特殊现象,文献[49-50]提出下述从低维可积模型得到高维可积模型的猜想.

双线性可积形变猜想. 如果

$$\begin{aligned} P(D_x, D_t)F \cdot G &= 0, \\ Q(D_x)P(D_x, D_t)F \cdot G &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

是一个可积模型, 则

$$\begin{aligned} P(D_x, D_t)F \cdot G &= 0, \\ R(D_x)P(D_x, D_t)F \cdot G &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

可能是一个可积模型. 其中, P 和 Q 是所示变量的多项式, R 是 S 的待定函数. 对于很多连续情形, R 与 Q 有相同函数形式, D_x 、 D_t 是广田算子, 可定义为

$$\begin{aligned} P(D_x, D_t)F \cdot G &\equiv P(\partial_x - \partial_{x'}, \partial_t - \partial_{t'})F(x, t) \cdot \\ &G(x', t') \Big|_{x'=x, t'=t}, \end{aligned} \quad (29)$$

S 可以是额外维相应的双线性广田算子, 超对称的双线性广田算子, 离散的双线性广田算子, 甚至是 q 形变的(如任对称的)非对易的双线性广田算子. 在文献[49-50]中给出了许多猜想成功的重要例子, 在这些例子中, R 与 Q 都有相同的线性形式, S 为 D_t 、 D_y (通常的双线性广田算子), S_x 、 S_y (超对称的双线性广田算子), 等等. 这里我们给出一个猜想在 $F = G$ 时的特殊形式:

如果

$$Q(D_x)P(D_x, D_t)F \cdot F = 0 \quad (30)$$

是一个可积模型, 则

$$R(D_x)P(D_x, D_t)F \cdot F = 0 \quad (31)$$

可能是一个可积模型. 其中, P 和 Q 是所示变量的多项式, R 是 S 的待定函数. 著名的 KdV 方程的双线性形式为

$$D_x(D_t + D_x^3)F \cdot F = 0. \quad (32)$$

利用猜想已经得到的推广的 KdV 方程有非对称的 NNV(ANNV)方程

$$D_y(D_t + D_x^3)F \cdot F = 0, \quad (33)$$

超对称 KdV 方程

$$S_x(D_t + D_x^3)F \cdot F = 0, \quad (34)$$

超对称 ANNV 方程

$$S_y(D_t + D_x^3)F \cdot F = 0. \quad (35)$$

11.2 问题

(1) 双线性可积形变猜想的正确性如何证明?

$R(S)$ 如何确定?

(2) 当 S 是离散形式和任对称形式时, 猜想仍然成立吗? 如果猜想不成立, 应附加什么样的条件使得猜想成立?

12 展望

本文对于经典和量子可积系统的一些前沿问题, 就作者自己的经验和已有的研究积累, 在分析已有知识的基础上, 提出了 10 个方面的问题. 其中任何一个问题的解决都将进一步推动非线性数学物理的发展. 希望有能力有基础的同行、老师和研究者们能关心这些问题, 对这些问题感兴趣, 并做出自己的努力.

参考文献:

- [1] KANE G L. Perspectives on supersymmetry[M]. Singapore: World Scientific Publishing, 2008.
- [2] SEIBERG N, WITTEN E. String theory and noncommutative geometry[J]. Journal of High Energy Physics, 1999, 1999(9):32.
- [3] WESS J, BAGGER J. Supersymmetry and supergravity[M]. Singapore: World Scientific Publishing, 2009.
- [4] COOPER F, KHARE A, SUKHATME U. Supersymmetry and quantum mechanics[J]. Physics Reports, 1995, 251(5/6):267-385.
- [5] OĞUZ Ö, YAZICI D. Multiple local Lagrangians for n -component super-Korteweg-de Vries-type bi-Hamiltonian systems[J]. International Journal of Modern Physics A, 2010, 25(5):1069-1078.
- [6] MATHIEU P. Supersymmetric extension of the Korteweg-de Vries equation[J]. Journal of Mathematical Physics, 1988, 29(11):2499-2506.
- [7] MATHIEU P. Superconformal algebra and supersymmetric Korteweg-de Vries equation[J]. Physics Letters B, 1988, 203:287.
- [8] DIRAC P A M. 量子力学原理[M]. 4 版. 北京: 科学出版社, 2008.

- [9] ANDERSON C D. The apparent existence of easily deflectable positives[J]. *Science*, 1932, 76(1967):238-239.
- [10] HALDANE F D M. Model for a quantum Hall effect without Landau levels: condensed-matter realization of the “parity anomaly”[J]. *Physical Review Letters*, 1988, 61(18):2015-2018.
- [11] HASAN M Z, KANE C L. Colloquium: topological insulators[J]. *Reviews of Modern Physics*, 2010, 82(4): 3045-3067.
- [12] QI X L, ZHANG S C. Topological insulators and superconductors[J]. *Reviews of Modern Physics*, 2011, 83(4):1057-1110.
- [13] TIWARI A, LI M H, BERNEVIG B, et al. Unhinging the surfaces of higher-order topological insulators and superconductors[J]. *Physical Review Letters*, 2019, 124(4):046801.
- [14] KHAN M N, TEO J C Y, HUGHES T L. Anyonic symmetries and topological defects in Abelian topological phases: an application to the ADE classification[J]. *Physical Review B*, 2014, 90(23):235149.
- [15] MAJID S, RODRÍGUEZ-PLAZA M J. Random walk and the heat equation on superspace and anyspace[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1994, 35(7):3753-3760.
- [16] 楼森岳. 任代数和任对称可积系统[C]//第八届河姆渡可积系统论坛报告. 宁波, 2016.
- [17] 曾谨言. 量子力学教程[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [18] INGERMANSON R. The sine-Gordon and sinh-Gordon Gaussian effective potential in $D+1$ dimensions[J]. *Nuclear Physics B*, 1986, 266(3/4):620-632.
- [19] LOU S Y, NI G J. Gaussian-effective-potential method for $SU(2) \times U(1)$ gauge theory and bounds on the Higgs-boson mass[J]. *Physical Review D*, 1989, 40(9): 3040-3045.
- [20] NI G J, LOU S Y, CHEN S Q, et al. Two-dimensional Coulomb gas studied in the sine-Gordon formulation[J]. *Physical Review B*, 1990, 41(10):6947-6957.
- [21] LANDSMAN K A, FIGGATT C, SCHUSTER T, et al. Verified quantum information scrambling[J]. *Nature*, 2019, 567(7746):61-65.
- [22] LIAO S J. A uniformly valid analytic solution of two-dimensional viscous flow over a semi-infinite flat plate[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1999, 385:101-128.
- [23] JIAO X Y, GAO Y, LOU S Y. Approximate homotopy symmetry method: homotopy series solutions to the sixth-order Boussinesq equation[J]. *Science in China Series G: Physics, Mechanics and Astronomy*, 2009, 52(8):1169-1178.
- [24] OTSUKA H, OKABE Y, NEFEDEV K. Husimi-cactus approximation study on the diluted spin ice[J]. *Physical Review E*, 2018, 97(4):042132.
- [25] HOLLIK W. Quantum field theory and the standard model[EB/OL]. [2024-09-15]. <http://arxiv.org/abs/1012.3883>.
- [26] 范洪义, 袁洪春. 从相干态到压缩态[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2012.
- [27] JUNKER G, KLAUDER J R. Coherent-state quantization of constrained fermion systems[J]. *The European Physical Journal C*, 1998, 4(1):173.
- [28] LOU S Y, RUAN H Y. Similarity reductions and nonlocal symmetry of the KdV equation[J]. *Communications in Theoretical Physics*, 1996, 25(2):241-244.
- [29] LOU S Y, HU X R, CHEN Y. Nonlocal symmetries related to Bäcklund transformation and their applications [J]. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2012, 45(15):155209.
- [30] HU X R, LOU S Y, CHEN Y. Explicit solutions from eigenfunction symmetry of the Korteweg-de Vries equation[J]. *Physical Review E*, 2012, 85(5):056607.
- [31] LOU S Y, HU X B, LIU Q P. Duality of positive and negative integrable hierarchies via relativistically invariant fields[J]. *Journal of High Energy Physics*, 2021, 2021(7):58.
- [32] LOU S Y, HAO X Z, JIA M. Deformation conjecture: deforming lower dimensional integrable systems to higher dimensional ones by using conservation laws[J]. *Journal of High Energy Physics*, 2023, 2023(3):18.
- [33] 楼森岳, 郝夏芝, 贾曼. 互反型高维可积 Kaup-Newell 系统[J]. *物理学报*, 2023, 72(10):100204.
- [34] WANG F R, LOU S Y. Lax integrable higher dimensional Burgers systems via a deformation algorithm and conservation laws[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2023, 169:113253.
- [35] LOU S Y. On the coherent structures of the Nizhnik-Novikov-Veselov equation[J]. *Physics Letters A*, 2000, 277(2):94-100.
- [36] LOU S Y, RUAN H Y. Revisitation of the localized excitations of the 2+1 dimensional KdV equation[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2001, 34(2):305.
- [37] TANG X Y, LOU S Y, ZHANG Y. Localized excitations in (2+1)-dimensional systems[J]. *Physical Review E*, 2002, 66:046601.
- [38] TANG X Y, LOU S Y. Extended multilinear variable

- separation approach and multivalued localized excitations for some (2+1)-dimensional integrable systems[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 2003, 44(9):4000-4025.
- [39] GAO X N, LOU S Y. Bosonization of supersymmetric KdV equation[J]. *Physics Letters B*, 2012, 707(1): 209-215.
- [40] GAO X N, YANG X D, LOU S Y. Exact solutions of supersymmetric KdV: a system via bosonization approach [J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2012, 58(5): 617-622.
- [41] GAO X N, LOU S Y, TANG X Y. Bosonization, singularity analysis, nonlocal symmetry reductions and exact solutions of supersymmetric KdV equation[J]. *Journal of High Energy Physics*, 2013, 2013(5):29.
- [42] LOU S Y. Ren-integrable and ren-symmetric integrable systems[J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2024, 76(3):035006.
- [43] LOU S Y. Progresses on some open problems related to infinitely many symmetries[J]. *Mathematics*, 2024, 12(20):3224.
- [44] LOU S Y, FENG B F. Symmetries and integrable systems[J]. *Fundamental Research*, 2023. DOI: 10.1016/j.fmre.2023.11.008.
- [45] LI Y Q, CHEN J C, CHEN Y, et al. Darboux transformations via lie point symmetries: KdV equation[J]. *Chinese Physics Letters*, 2014, 31(1):010201.
- [46] HAO X Z, LIU Y P, TANG X Y, et al. Nonlocal symmetries and the nth finite symmetry transformation or AKNS system[J]. *Modern Physics Letters B*, 2018, 32(27):1850332.
- [47] LIU S J, TANG X Y, LOU S Y. Multiple Darboux-Bäcklund transformations via truncated Painlevé expansion and Lie point symmetry approach[J]. *Chinese Physics B*, 2018, 27(6):060201.
- [48] LOU S Y, YAO R X. Primary branch solutions of first order autonomous scalar partial differential equations via Lie symmetry approach[J]. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 2021, 24(3):379.
- [49] LI J H, LOU S Y. Kac-Moody-Virasoro symmetry algebra of a (2+1)-dimensional bilinear system[J]. *Chinese Physics B*, 2008, 17(3):747-753.
- [50] 楼森岳, 李金花. 关于得到高维可积模型的一个新猜想[M]// “10000个科学难题”物理编委会. 10000个科学难题(物理学卷). 北京: 科学出版社, 2009:350-351.
- [51] 马中骥. 物理学中的群论: 李代数篇[M]. 3版. 北京: 科学出版社, 2015.
- [52] 范洪义. 量子力学表象与变换论: 狄拉克符号法进展[M]. 2版. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2014.
- [53] CHENG X P, LOU S Y, CHEN C L, et al. Interactions between solitons and other nonlinear Schrödinger waves[J]. *Physical Review E*, 2014, 89(4):043202.
- [54] CHENG X P, CHEN C L, LOU S Y. Interactions among different types of nonlinear waves described by the Kadomtsev-Petviashvili equation[J]. *Wave Motion*, 2014, 51(8):1298-1308.
- [55] COLES P J, BERTA M, TOMAMICHEL M, et al. Entropic uncertainty relations and their applications[J]. *Reviews of Modern Physics*, 2017, 89:015002.
- [56] SLOBOZHANYUK A, MOUSAVI S H, NI X, et al. Three-dimensional all-dielectric photonic topological insulator[J]. *Nature Photonics*, 2017, 11(2):130-136.
- [57] DONG X, HARLOW D, WALL A C. Reconstruction of bulk operators within the entanglement wedge in gauge-gravity duality[J]. *Physical Review Letters*, 2016, 117(2):021601.
- [58] SEIBERG N, SENTHIL T, WANG C, et al. A duality web in 2+1 dimensions and condensed matter physics[J]. *Annals of Physics*, 2016, 374:395-433.
- [59] KARCH A, TONG D. Particle-vortex duality from 3D bosonization[J]. *Physical Review X*, 2016, 6(3):031043.
- [60] BAZHANOV V V, LUKYANOV S L, RUNOV B A. Bukhvostov-Lipatov model and quantum-classical duality[J]. *Nuclear Physics B*, 2018, 927:468-515.
- [61] LOU S Y. Searching for higher dimensional integrable models from lower ones via Painlevé analysis[J]. *Physical Review Letters*, 1998, 80(23):5027-5031.
- [62] LOU S Y. Deformations of the Riccati equation by using Miura-type transformations[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1997, 30(20):7259-7267.
- [63] CAO C W, GENG X G. C Neumann and Bargmann systems associated with the coupled KdV soliton hierarchy[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1990, 23(18): 4117-4125.
- [64] CHENG Y, LI Y S. The constraint of the Kadomtsev-Petviashvili equation and its special solutions[J]. *Physics Letters A*, 1991, 157(1):22-26.
- [65] KONOPELCHENKO B, SIDORENKO J, STRAMPP W. (1+1)-dimensional integrable systems as symmetry constraints of (2+1)-dimensional systems[J]. *Physics Letters A*, 1991, 157(1):17-21.
- [66] LOU S Y, CHEN L L. Formal variable separation approach for nonintegrable models[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1999, 40(12):6491-6500.
- [67] ZHANG S L, LOU S Y, QU C Z. New variable

- separation approach: application to nonlinear diffusion equations[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2003, 36(49):12223-12242.
- [68] OLVER P J. Applications of Lie groups to differential equations[M]. New York: Springer, 1993.
- [69] LOU S Y, JIA M. From one to infinity: symmetries of integrable systems[J]. *Journal of High Energy Physics*, 2014, 2014(2):172.
- [70] ABLOWITZ M J, CLARKSON P A. Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.
- [71] FOKAS A S. Integrable nonlinear evolution partial differential equations in 4+2 and 3+1 dimensions[J]. *Physical Review Letters*, 2006, 96(19):190201.

Several frontier problems in classical and quantum integrable systems

LOU Senyue

(School of Physical Science and Technology, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: This paper proposes some significant exploration problems in the frontier research on classical and quantum integrability, including: (1) Problems related to bosonic (commuting) integrable systems, fermionic (anti-commuting) integrable systems, anyonic (q -commuting) integrable systems, and their mixed systems; (2) The theory of operator transformations in quantum integrability; (3) The non-integrability of linear quantum Schrödinger equations due to infinite freedoms; (4) Darboux transformations and inverse scattering theory corresponding to non-analytic seed solutions like Painlevé type solutions; (5) General dual theory between nonlocal symmetries and local symmetries; (6) The solution of high-dimensional integrable systems from the theory of reciprocal transformation extension; (7) How to obtain multilinearly separated variable solutions from traditional theories such as the Darboux transformations, the inverse scattering methods, and the Riemann-Hilbert approaches; (8) How to derive exact solutions obtained from the bosonization approach for supersymmetric integrable systems, super-integrable systems, ren-integrable systems, and ren-symmetric integrable systems by using traditional methods; (9) Conjectures on multiwave solutions of integrable systems via symmetries; (10) General conjectures on all exact solutions via symmetry approach for completely and partially integrable systems; (11) Conjectures to extend 1+1-dimensional bilinear integrable systems to higher-dimensional integrable systems, discrete integrable systems, supersymmetric integrable systems, and ren-symmetric integrable systems.

Key words: classical and quantum integrability; ren-symmetric and supersymmetric integrability; symmetry conjecture; higher dimensional integrable conjecture

(责任编辑 章践立)