

DOI: 10.20098/j.cnki.1001-5132.2024.0318

开口截面拉胀超结构动力失稳分析

吴梦景¹, 朱 珏¹, 黄栩浩^{1,2,3*}

(1. 宁波大学 压力容器与管道安全浙江省工程研究中心, 浙江 宁波 315211; 2. 中国矿业大学 力学与土木工程学院, 江苏 徐州 221116; 3. 华伟科技股份有限公司, 浙江 诸暨 311800)

摘要: 针对碳纳米管增强复合材料开口截面构件动力失稳行为展开分析. 基于一阶剪切板理论与有限条方法, 推导出构件动力失稳的运动方程, 并采用 Bolotin 方法获得 $2T$ 周期对应的特征方程, 进而得到结构的基础动力失稳区域; 随后基于该模型分析了不同碳纳米管含量、拉胀效应以及卷边是否加劲对构件动力失稳响应的影响. 结果显示, 三者皆可不同程度提升构件动力失稳频率, 但卷边加劲的强化效应会随其自身宽度增大而导致局部屈曲, 从而致使结构刚度弱化.

关键词: 板件相互作用; 动力失稳; 拉胀效应; 有限条方法; Bolotin 方法

中图分类号: O347.2

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2025) 02-0086-08

梁在静态轴向力作用下易出现失稳现象, 已有学者建立了不同类型的梁模型来研究此类失稳机制, 并给出了对应的临界载荷, 例如欧拉-伯努利梁模型、铁木辛柯梁模型与 Reddy 高阶剪切梁模型. 当结构承受面内周期性载荷, 以及扰动频率与构件固有频率处于一定比值时, 结构会发生横向振动, 该类现象称为动力失稳. 对于该类失稳的研究, Bolotin 等^[1]在著作《弹性系统的动力失稳》中详细阐述了不同结构单元的动力失稳问题, 并给出了求解含周期性载荷特征方程的方法. 该方法也同样被不同研究人员用于求解梁、板与壳体结构的动力失稳问题, 通过该方法可获得结构动力失稳区域(一般呈现 V 形)的解析解, 后续研究人员将该法称为 Bolotin 方法. Zhao 等^[2]基于 Bolotin 方法研究了不同类型复合材料功能梯度梁在不同温度下的动力失稳行为, 通过结合 Reddy 剪切梁模型分析了石墨烯增强复合材料梁的动力失稳响应. 沙风焕等^[3]将碳纳米管模拟为无限长的弹性连续圆柱壳, 并分析了冲击扭转载荷作用下动力屈曲行为. 钟子林等^[4]基于 Bolotin 方法对圆弧拱展开了研究. 此外, 结构在周期性载荷作用下极有可能

进入后屈曲状态. 因此, 对构件几何非线性的动力稳定性分析成为结构安全设计中不可避免的问题. 对于该类问题, Shen 等^[5]原创性基于二次摄动法求解了复合材料层合板在面内周期性载荷作用下的后屈曲平衡方程, 进而获得结构动力失稳区域, 该工作也体现出二次摄动法在结构动力失稳问题上的求解优势. 此外, Obara 等^[6]采用摄动法对欧拉-伯努利梁的动力失稳问题展开求解. 综上所述, 随着动力失稳问题研究的深入, 基础理论已从线性、低阶梁、板理论发展至几何非线性与构件截面横向剪切变形的高阶梁、板理论.

针对典型的梁、板结构单元, 上述理论可导出在不同工况下的动力失稳响应解析解. 除矩形梁、板以外^[7], 实际工程中被广泛使用的开口截面构件的动力稳定性问题也同样引起了研究人员的关注. 该类结构相较于矩形平板或梁结构动力失稳分析的主要不同之处在于需要考虑构件截面各板件间的相互约束作用^[8-9]. Zhu 等^[10-11]基于 Bolotin 方法构建解析模型, 对冷弯薄壁开口截面型钢在风载荷作用下的动力失稳行为展开分析, 并且利用有限条程序验证其模型正确性. Wu 等^[12]结合经典板理

收稿日期: 2024-03-24.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journal.lg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(12102214); 宁波市自然科学基金(2022J128, 2022J090).

第一作者: 吴梦景, 博士研究生, 主要研究方向: 薄壁结构、冲击动力学. E-mail: 2201090007@nbu.edu.cn

*通信作者: 黄栩浩, 副研究员, 主要研究方向: 新型结构体系、冲击动力学、板壳力学. E-mail: huangxuhao@nbu.edu.cn

论与有限条方法分析槽钢等开口截面钢构件的动力屈曲响应. 有限条方法自面世以来, 由于其计算的高效性使其在薄壁构件屈曲与振动分析方面有着显著的优势. 根据该理论开发的有限条程序(如CUFSM^[13], THIN-WALL-2-V2.0^[14])也在科学研究与工程中被广泛使用.

研究表明, 结构本身的材料属性、几何构型以及初始缺陷对于结构的静、动态失稳皆有显著影响. 目前, 3D 打印技术的发展与高性能复合材料的出现为改善结构自身材料属性进而提升整体屈曲特性提供了有效途径^[15]. 研究人员通过 3D 打印点阵结构^[16]与蜂窝结构^[17]设计具有拉胀效应的结构单元, 并分析其静、动态屈曲特性, 结果发现拉胀效应能够一定程度提升构件的稳定性. 此外, 设计具有拉胀效应的复合材料梁或板并对其开展热屈曲、热后屈曲研究, 结果表明拉胀效应可减少温度场引起的初始变形, 进而增强结构热稳定性^[18-19]. 对于开口截面复合材料层合结构, 板件本身具有各向异性, 这也导致截面各板件间相互约束效应明显与各向同性材料构件(如冷弯型钢等)不同. 此外, 板件具有拉胀效应对其相互约束关系、结构整体力学响应影响机制尚不明确, 目前也鲜有对具有拉胀效应开口截面构件动态稳定性展开分析研究.

本文将一阶剪切板理论与有限条方法相结合以获得复合材料结构运动方程, 接着利用 Bolotin

方法求解, 最终获得结构动力失稳区域, 详尽地展现了 Bolotin 方法与有限条方法相结合求解任意截面构件动力失稳响应的全过程. 同时讨论了不同碳纳米管增强含量、拉胀效应以及翼缘加劲对构件整体静、动态稳定行为的影响, 为开口截面拉胀超结构设计与分析提供新思路.

1 动力失稳模型

碳纳米管增强复合材料(Carbon Nanotube-Reinforced Composite, CNTRC)开口截面构件承受面内周期性载荷. 根据图 1 中坐标系, 位移场可定义如下: w 为中间层沿厚度方向(Z 轴方向)的位移, $\phi_i (i = x, y)$ 分别为绕 X 和 Y 轴的转角, u 和 v 分别为 X 和 Y 方向上的位移, X 、 Y 、 Z 方向上的坐标分别为 x 、 y 、 z .

鉴于 CNTRC 具有较强面内各向异性($E_{11} \gg E_{22}$), 因此其横截面的横向剪切变形不容忽视. 考虑到薄壁结构长细比较大, 因而采用一阶剪切板理论描述其应力-应变关系. 至此, 单元板条的位移场可表示如下:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + z\phi_x, \\ v &= v_0 + z\phi_y, \\ w &= w_0. \end{aligned} \quad (1)$$

假定板条两端边界条件为简支, 则可表示为:

$$w = 0,$$

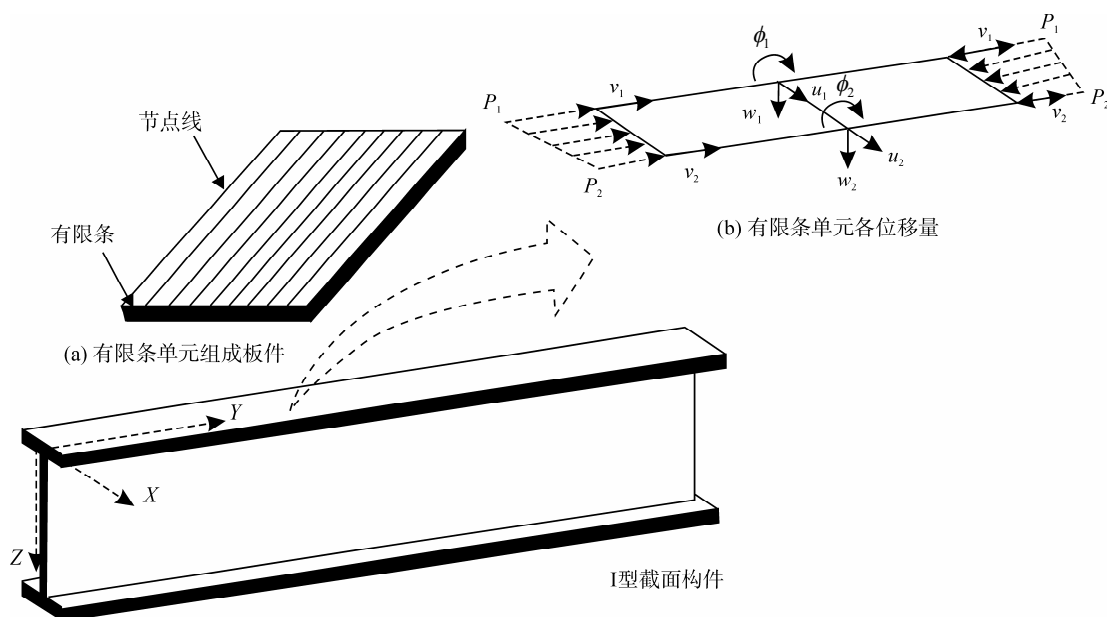


图1 复合材料开口截面离散及离散单元节点位移场

$$\begin{aligned}\phi_x &= 0, \\ M_y &= 0, \\ N_y &= 0, \\ N_{xy} &= 0,\end{aligned}\quad (2)$$

式中: M_y 为绕 Y 轴弯矩; N_y 、 N_{xy} 分别为 X — Y 平面内载荷与剪切载荷。

基于板条节点 $u_i, v_i (i=1, 2)$ 构建节点之间位移, 这里采用 Hermite 插值函数, 可表示如下:

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} &= \sum_{m=1}^k \begin{Bmatrix} \left(1 - \frac{x}{b}\right) \sin \frac{m\pi y}{l} u_{1m} + \frac{x}{b} \sin \frac{m\pi y}{l} u_{2m} \\ \left(1 - \frac{x}{b}\right) \cos \frac{m\pi y}{l} v_{1m} + \frac{x}{b} \cos \frac{m\pi y}{l} v_{2m} \end{Bmatrix} = \\ &\sum_{m=1}^k N \begin{Bmatrix} u_{1m} & v_{1m} & u_{2m} & v_{2m} \end{Bmatrix}^T, \quad (3.1)\end{aligned}$$

$$w = \sum_{m=1}^k \sum_{i=1,3} \left[N_i(x) w_{im} + F_i(x) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{im} \right] \sin \frac{m\pi y}{l}, \quad (3.2)$$

$$\begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^k N \begin{Bmatrix} \phi_{x1m} & \phi_{y1m} & \phi_{x2m} & \phi_{y2m} \end{Bmatrix}^T, \quad (3.3)$$

式中: m 为构建长度方向半波长数; l 与 b 分别为构件的长度与宽度; k 为层级数的取值个数; x 取值范围为 $0 \sim b$, y 的取值范围则为 $0 \sim l$ 。

插值项 $N_i(x)$ 与 $F_i(x) (i=1, 3)$ 表示为:

$$N_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{b^2} + \frac{2x^3}{b^3}, \quad (4.1)$$

$$N_3 = \frac{3x^2}{b^2} - \frac{2x^3}{b^3},$$

$$F_1 = x \left(1 - \frac{2x}{b} + \frac{x^2}{b^2} \right), \quad (4.2)$$

$$F_3 = x \left(\frac{x^2}{b^2} - \frac{x}{b} \right).$$

各向异性复合材料的应力(σ)与应变(ε)关系可表示为:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{ij} & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{i'j'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{ij} & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{i'j'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \end{Bmatrix}, \quad (5)$$

式中: τ 为剪切应力; γ 为剪切应变; $\bar{Q}_{ij}$ 与 $\bar{Q}_{i'j'}$ 为考虑铺设角度的转换弹性常数。

根据一阶剪切理论, 应变(ε)与剪切应变(γ)可表示为:

$$\begin{aligned}\{\varepsilon\} &= \{\varepsilon^{(0)}\} + z \{\varepsilon^{(1)}\} = \\ &\begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad (6.1) \\ \{\gamma\} &= \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix}. \quad (6.2)\end{aligned}$$

基于式(1)~(6), 可获得外载荷的表达式为:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz = \mathbf{A} \{\varepsilon^{(0)}\} + \mathbf{B} \{\varepsilon^{(1)}\}, \quad (7.1)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \mathbf{B} \{\varepsilon^{(0)}\} + \mathbf{D} \{\varepsilon^{(1)}\}, \quad (7.2)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz = \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \end{Bmatrix}, \quad (7.3)$$

式中: $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{D}$ 分别为拉伸矩阵、拉伸-弯曲矩阵与弯曲矩阵; t 为厚度; k 表示不同层级。

根据一阶剪切理论, 单元板条的应变能可表示为:

$$U_k = \frac{1}{2} \iiint \{\varepsilon\}_k^T [\bar{Q}_{ij}]_k \{\varepsilon\}_k dV, \quad (8)$$

式中: V 为体积. 将式(6)代入式(8), 可得到整个层合板条的应变能(U):

$$U = \sum_{k=1}^N U_k = \frac{1}{2} \iint \{[\varepsilon^{(0)}]^T [\mathbf{A}] [\varepsilon^{(0)}] + 2[\varepsilon^{(0)}]^T \times [\mathbf{B}] [\varepsilon^{(1)}] + [\varepsilon^{(1)}]^T [\mathbf{D}] [\varepsilon^{(1)}]\} dx dy, \quad (9)$$

当层合结构为对称铺设时, 则 $[\mathbf{B}] = 0$. 由于文中只考虑对称铺设构型, 因此应变能也可表示为:

$$U = \sum_{k=1}^N U_k = \frac{1}{2} \iint \{ [\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}]^T [\mathbf{A}] [\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}] + [\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}]^T [\mathbf{D}] [\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}] \} dx dy. \quad (10)$$

考虑外部初始应力, 可将整体应变能改写为:

$$U = \frac{1}{2} \iint \{ [\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}]^T [\mathbf{A}] [\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}] + [\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}]^T [\mathbf{D}] \times [\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}] \} dx dy + \frac{1}{2} \iint P_x \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy = U_s + U_p, \quad (11)$$

式中: U_s 与 U_p 分别代表单元板条的刚度及外载荷对刚度的影响. 考虑载荷 P_x 的分布形式可定义为 $P_x = P_1 - (P_1 - P_2)x/b$, 其中, P_1 与 P_2 为周期性载荷, 定义为 $P_i = P_{si} + P_{di} \cos \Omega T$, $i=1,2$, 其中, Ω 为角速度, P_{si} 与 P_{di} 分别表示静、动态载荷的幅值.

至此, 基于上述单元板条的应变能表达形式进行组装, 则可获得整体的刚度矩阵 $[\mathbf{K}_E]$ 及几何矩阵 $[\mathbf{K}_G]$. 随后基于最小势能原理对整体应变能求偏导数, 可获得静态屈曲对应的特征方程:

$$[\mathbf{F}] = [\mathbf{K}_E + P_x \mathbf{K}_G] [\boldsymbol{\delta}] \Rightarrow \text{Det}([\mathbf{K}_E] + P_x [\mathbf{K}_G]) = 0. \quad (12)$$

因为构件承受外部载荷作用, 因此在特征方程中引入对应的几何矩阵项, 并将式(12)转变为

$$([\mathbf{K}_E] + [\mathbf{K}_G] + \omega_i^2 [\mathbf{K}_M]) \{\boldsymbol{\delta}_i\} = 0, \quad (13)$$

式中: ω_i 为自然圆频率; $[\mathbf{K}_M]$ 则为结构整体的质量矩阵; 当不考虑外载荷作用时, 则 $[\mathbf{K}_G] = 0$, 此时对应结构的自由振动.

周期性载荷作用下结构的动力失稳方程:

$$[\mathbf{K}_M] \{\ddot{q}\} + [\mathbf{K}_E] \{q\} - P_x [\mathbf{K}_G] \{q\} = [0]. \quad (14)$$

式中: q 表示周期性载荷; $\ddot{q}$ 表示载荷对时间 T 进行两次求导.

上述方程为 Mathieu-Hill 方程. 根据 Bolotin 方法, 这里求解周期为 $2T = 4\pi / \Omega$ 的解, 假设 $\{q\}$ 具有 $2T$ 周期解, 展开如下:

$$\{q\} = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[\{a_k\} \sin \frac{k' \Omega T}{2} + \{b_k\} \cos \frac{k' \Omega T}{2} \right], \quad (15)$$

式中: k' 为动力失稳模态阶数, $\{a_k\}$ 和 $\{b_k\}$ 为与时间无关的系数. 将式(15)代入式(14), 并将 $\sin(\Omega T / 2)$ 与 $\cos(\Omega T / 2)$ 同类项目系数化简为 0, 可得

$$\left([\mathbf{K}_E] - \frac{k'^2 \theta^2}{4} [\mathbf{K}_M] - P_x [\mathbf{K}_G] \right) a_k = 0,$$

$$k' = 1, 3, 5, 7, \dots, \quad (16.1)$$

$$\left([\mathbf{K}_E] - \frac{k'^2 \theta^2}{4} [\mathbf{K}_M] - P_x [\mathbf{K}_G] \right) b_k = 0,$$

$$k' = 1, 3, 5, 7, \dots. \quad (16.2)$$

上述线性齐次代数方程组, 当其系数行列式为 0 时方有非零解, 因此可得:

$$\begin{vmatrix} \mu - \frac{\theta^2}{4} [\mathbf{K}_M] & 0 & 0 \\ 0 & \mu - \frac{9\theta^2}{4} [\mathbf{K}_M] & 0 \\ 0 & 0 & \mu - \frac{25\theta^2}{4} [\mathbf{K}_M] \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \\ 0 & \dots & \\ \leftarrow 0 & \dots & \\ \dots & \dots & \\ 0 & \mu - \frac{k^2 \theta^2}{4} [\mathbf{K}_M] \end{vmatrix} = 0, \quad (17)$$

$$k' = 1, 3, 5, 7, \dots, \mu = [\mathbf{K}_E] - P_x [\mathbf{K}_G]. \quad (17)$$

根据上式 k' 值可求得不同阶次动力失稳区域, 这里只考虑第一阶失稳区域, 代入 P_x 可得:

$$\left[[\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G] - \alpha P_{cr} [\mathbf{K}_G] \pm \beta P_{cr} [\mathbf{K}_G] - \frac{\Omega^2}{4} [\mathbf{K}_M] \right] \{q\} = \{0\}. \quad (18)$$

至此, 给定周期性载荷系数 α 、 β 以及载荷幅值 P_{cr} (一般选用结构静力失稳载荷), 则通过上式可获得结构位于 $\theta = 2\Omega$ 的动力失稳区域.

2 模型校验及结构讨论

在基于本文模型对开口截面结构展开分析前, 选取现有参考文献中的算例进行对比, 进而验证模型的准确性. 这里选取 Srivastava 等^[20]预测的 T 型截面动力失稳区域作为对比算例. 截面几何参数为 $a-b-h-b_s-d_s$ (600-600-6.33-12.7-22.2, 单位 mm), 相关参数对应的几何特征如图 2 中插图所示. 该算

例静态载荷因子 $\alpha = 0.2$ ，失稳频率采用无量纲频率 $\bar{\Omega} = \Omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ 表示，其中， ρ 与 D 分别表示板密度与弯曲刚度。如图 2 所示，模型计算结果与文献中算例的结果吻合较好，即验证了模型的准确性。接下来采用该模型对复合材料结构静态及动态行为展开分析。

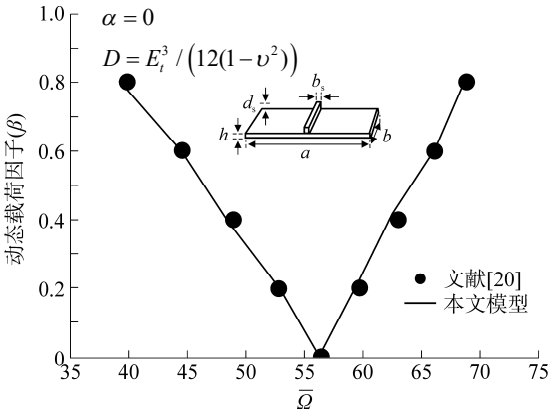


图 2 对比 T 型截面动力失稳区域

现有研究表明复合材料层合结构具有较强的面内各向异性及层间拉伸-剪切耦合效应，而碳纳米管增强复合材料(CNTRC)在特定的铺设构型及铺设角度下能呈现出拉胀^[21]或热收缩^[22]的效应。因此，本文以 CNTRC 为例，选定 I 型开口截面结构探究拉胀效应对板件间相互作用的影响，进而讨论该类结构的动力失稳特性。CNTRC 单层的基本材料参数可基于修正的细观模型获得，具体数值见表 1，多层的层合结构等效参数则可通过经典层合结构的本构关系推导所得。等效泊松比与其他等效工程常数计算公式分别源于作者之前工作

文献[23-24]。文中设计正、负两类层合结构(表 2)以对比拉胀效应对结构整体力学行为的影响，案例 A 与案例 B 分别代表负泊松比(Negative Poisson's Ratio, NPR)与正泊松比(Positive Poisson's Ratio, PPR)层合结构。以往负泊松比结构的力学响应分析常采用人为假设的泊松比值，但容易忽视其他材料参数对结构力学响应的影响。本文通过遗传算法优化设计使案例 A 与案例 B 除等效面内泊松比 ν_{12}^e 之外其他材料参数幅值尽可能接近，这可在后续分析中更好地突出负泊松比对结构力学响应的影响。然而表 2 中两个案例的某些等效参数仍存在数值差异，这是由于结构自身的材料参数之间需满足材料定律，这也限定了参数之间的相对关系，但是这些参数差异对结构力学影响远小于 ν_{12}^e 差异所引起的影响。

3 动力稳定性分析

本节将基于动力失稳模型对 CNTRC 开口截面构件的动力行为展开分析。这里选用 I 型截面作为例子，采用 $h-b_1-b_2-d_1-d_2-t$ 表示，其中， h 表示腹板高度， b_1 与 b_2 分别表示上翼缘与下翼缘宽度， d_1 与 d_2 分别表示三处卷边长度， t 为截面的厚度(假设等厚)。首先计算结构静态屈曲临界值(P_{cr})，该值作为动力失稳的载荷幅值。图 3(a)列举了不同碳纳米管含量(V_{CN})的构件随长度变化的临界载荷。这里构件尺寸假定为 $h-b_1-b_2-d_1-d_2-t$ (100-50-50-0-0-3，单位 mm)， $d_1 = d_2 = 0$ 表示无翼缘加劲。观察发现，构件的临界载荷与碳纳米管添加百分比成正比，与构件长

表 1 单层 CNTRC 的力学参数^[21]

V_{CN}	E_{11}/MPa	E_{22}/MPa	G_{12}/MPa	ν_{12}	$\alpha_{11}/\text{K}^{-1}$	$\alpha_{22}/\text{K}^{-1}$
0.11	94 416.77	2 203.74	822.28	0.321 9	$3.583\ 0\times 10^{-6}$	$5.318\ 2\times 10^{-5}$
0.14	120 384.60	2 297.68	857.33	0.316 9	$3.553\ 1\times 10^{-6}$	$5.158\ 2\times 10^{-5}$
0.17	144 771.38	3 493.88	1 303.66	0.312 0	$3.533\ 7\times 10^{-6}$	$4.997\ 9\times 10^{-5}$

注： V_{CN} 为碳纳米管添加比例， E_{11} 、 E_{22} 为弹性模量， G_{12} 为剪切模量， ν_{12} 为泊松比； α_{11} 、 α_{22} 为长度方向与宽度方向上的热膨胀系数。

表 2 CNTRC 层合结构 $[0/\theta_1/75/\theta_1]_S$ 等效工程常数

等效工程常数	E_{11}^e/MPa	E_{22}^e/MPa	E_{33}^e/MPa	G_{12}^e/MPa	G_{13}^e/MPa	G_{23}^e/MPa	ν_{12}^e	ν_{13}^e	ν_{23}^e
案例 A ($\theta_1=5$)	8.44×10^4	1.62×10^4	3 311	1 534	1 143	1 143	-0.53	0.54	0.36
案例 B ($\theta_1=-5$)	8.19×10^4	1.55×10^4	3 342	1 532	1 143	1 143	0.78	0.12	0.28

注： E_{11}^e 、 E_{22}^e 、 E_{33}^e 为等效弹性模量， G_{12}^e 、 G_{13}^e 、 G_{23}^e 为等效剪切模量(所有字母的上标 e 表示等效)。

度成反比; 拉胀效应能够提升构件的稳定性. 此外, 为了考虑翼缘加劲板对结构整体性能的影响, 图 3(b)中对 I 型截面添加了两类翼缘加劲, 尺寸分别为 $d_1 = 10 \text{ mm}$, $d_1 = d_2 = 10 \text{ mm}$. 对比发现两类翼

缘皆可提升构件稳定性, 构件长度越小, 则增强效应越明显. 这是因为卷边可以提升构件上、下翼缘的整体刚度, 使其不易发生扭转变形. 后续如无特殊说明, 动态分析构件长度均选取 $L = 1200 \text{ mm}$,

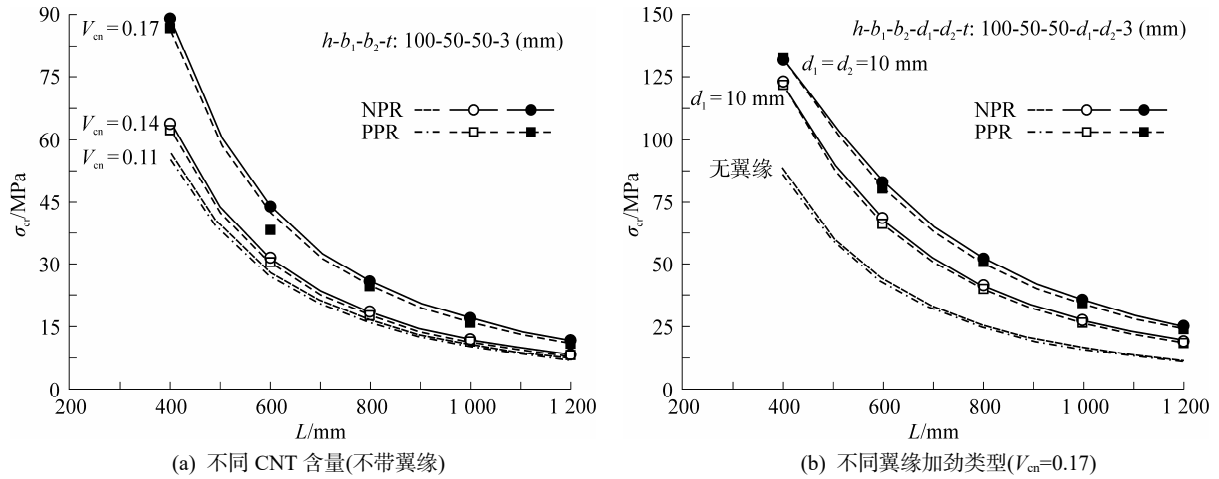


图3 CNTRC I型截面构件静态失稳分析

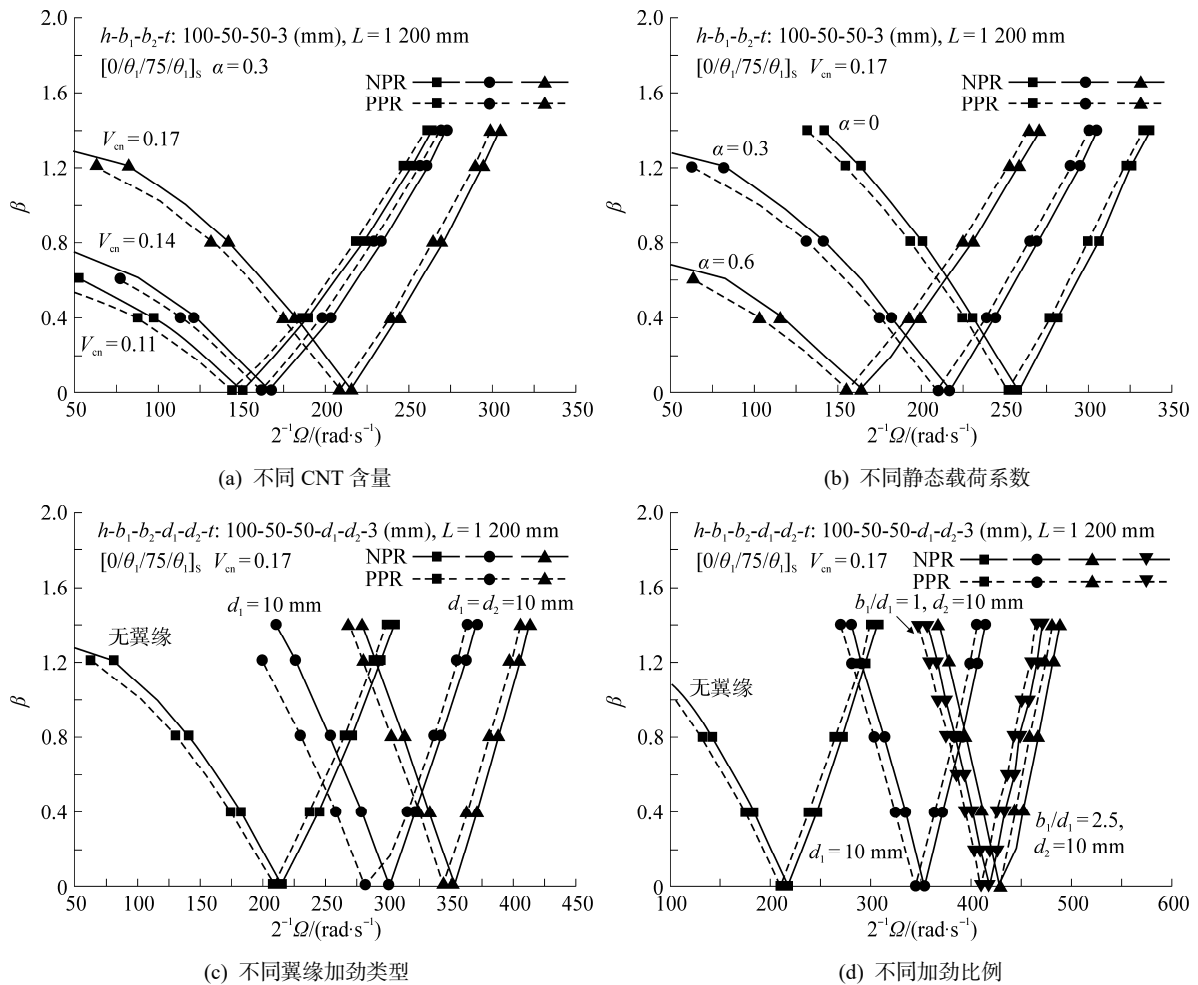


图4 I型截面构件动力失稳分析

动力载荷幅值也采用其对应的临界载荷。

接着以临界载荷 P_{cr} 为周期性载荷幅值, 设定不同的静、动态载荷因子计算不同工况下 I 型构件的动力特性。选定静态载荷因子 $\alpha = 0.3$, 图 4(a)给出了 3 种碳纳米管增强含量构件的失稳主区域, 对比发现随着 V_{cn} 的减小, 构件失稳频率在左边界下降明显。对比不同静态载荷因子对应的失稳区域, 发现构件失稳频率皆随着静态载荷因子的增大而减小(图 4(b))。此外, 为讨论板件相互作用对构件动力失稳的影响, 将静态载荷因子取值为 0.3。以卷边对构件翼缘加劲为例, 比较不同加劲类型和加劲比例对构件动力失稳的影响。由图 4(c)~(d)对比显示, 采用卷边加劲可以显著提升构件动力失稳频率并缩小失稳区域, 但随着加劲比例的增大, 其增强效应则并不明显, 原因是当加劲板件自身宽度过大时可能出现局部屈曲, 以致无法以刚体转动的形式对翼缘起到加劲作用。另观察发现, 拉胀效应可以提升构件失稳频率, 且在失稳区域的左边界提升效应较失稳右边界更明显。

4 结论

本文基于一阶剪切变形理论和有限条方法, 推导出任意截面形式复合材料结构动力失稳控制方程, 并利用 Bolotin 方法获得其动力失稳区域解。接着利用碳纳米管增强复合材料结构显著的各向异性, 设计具有拉胀效应的开口截面复合材料构件, 并对拉胀效应、卷边加劲效应以及碳纳米管含量增强效应对构件动力行为进行分析与讨论。对比结果表明, 构件的碳纳米管含量能够显著提升构件静态与动态稳定性, 拉胀效应则不同程度地提高构件临界载荷与动力失稳频率。此外, 由于板件间的相互作用, 卷边在上、下翼缘的加劲效应在构件动态行为中起着主导作用, 能较大提升构件的动力失稳频率并缩小失稳区域, 但加劲板件宽度过大则容易因其自身屈曲而丧失强化作用。

参考文献:

- [1] BOLOTIN V V, WEINGARTEN V I, GRESZCZUK L B, et al. Dynamic stability of elastic systems[J]. Journal of Applied Mechanics, 1965, 32(3):718.
- [2] ZHAO S, YANG Z, KITIPORNCHAI S, et al. Dynamic instability of functionally graded porous arches reinforced by graphene platelets[J]. Thin-Walled Structures, 2020, 147:106491.
- [3] 沙风焕, 赵隆茂, 杨桂通. 冲击扭矩作用下碳纳米管动力屈曲的研究[J]. 爆炸与冲击, 2006, 26(1):79-83.
- [4] 钟子林, 刘爱荣. 基础竖向多频参数激励下圆弧拱平面内动力失稳研究[J]. 工程力学, 2022, 39(4):53-64.
- [5] SHEN H S, XIANG Y, FAN Y. A novel technique for nonlinear dynamic instability analysis of FG-GRC laminated plates[J]. Thin-Walled Structures, 2019, 139: 389-397.
- [6] OBARA P, GILEWSKI W. Dynamic stability of moderately thick beams and frames with the use of harmonic balance and perturbation methods[J]. Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences, 2016, 64(4):739-750.
- [7] 毛柳伟, 王安稳, 邓磊, 等. 冲击载荷作用下矩形薄板的弹性动力屈曲[J]. 爆炸与冲击, 2014, 34(4):385-391.
- [8] ZHU J, LI L. A stiffened plate buckling model for calculating critical stress of distortional buckling of CFS beams[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2016, 115:457-464.
- [9] HUANG X, ZHU J. A stiffened-plate buckling model for calculating critical stress of distortional buckling of CFS columns[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2016, 119:237-242.
- [10] ZHU J, QIAN S, LI L Y. Dynamic instability of channel-section beams under periodic loading[J]. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2020, 27(10):840-849.
- [11] ZHU J, QIAN S, LI L. Dynamic instability of laterally-restrained zed-purlin beams under uplift loading[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2017, 131: 408-413.
- [12] WU M J, WANG F L, AZIM I, et al. Dynamic instability and free vibration analysis of thin-walled structures with arbitrary cross-sections[J]. The European Physical Journal Plus, 2022, 137(3):1-14.
- [13] SCHAFER B W. CUFSM4.05: finite strip buckling analysis of thin-walled members[M]. Baltimore, USA: Johns Hopkins University Press, 2012.
- [14] NGUYEN V V, HANCOCK G J, PHAM C H. Application of the thin-wall-2 V2. 0 program for analysis of thin-walled sections under localised loading[C]// Proceedings of the 4th Congrès International de Géotechnique-Ouvrages-Structures: CIGOS 2017 Vietnam, Ho Chi Minh City. Springer Singapore, 2018:78-88.

- [15] 任鑫, 张相玉, 谢亿民. 负泊松比材料和结构的研究进展[J]. 力学学报, 2019, 51(3):656-689.
- [16] LI C, SHEN H S, WANG H. Nonlinear dynamic response of sandwich plates with functionally graded auxetic 3D lattice core[J]. Nonlinear Dynamics, 2020, 100(4):3235-3252.
- [17] PENG X L, BARGMANN S. A novel hybrid-honeycomb structure: enhanced stiffness, tunable auxeticity and negative thermal expansion[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2021, 190:106021.
- [18] WU M J, ZHAO S Y, IFTIKHAR A, et al. Design and thermo-mechanical analysis of sandwich structures with negative thermal expansion[J]. International Journal of Mechanics and Materials in Design, 2022, 18:807-822.
- [19] CHEN X H, SHEN H S, HUANG X H. Thermo-mechanical postbuckling analysis of sandwich plates with functionally graded auxetic GRMMC core on elastic foundations[J]. Composite Structures, 2022, 279:114796.
- [20] SRIVASTAVA A K L, DATTA P K, SHEIKH A H. Dynamic instability of stiffened plates subjected to non-uniform harmonic in-plane edge loading[J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 262(5):1171-1189.
- [21] 黄栩浩, 杨健, 王星尔, 等. 负泊松比碳纳米管增强层合结构预测与设计[J]. 应用力学学报, 2021, 38(4):1408-1414.
- [22] 吴欣歌, 何智海, 赵思宇, 等. 可调热膨胀系数的复合材料层合结构预测与设计[J]. 应用力学学报, 2023, 40(3):636-642.
- [23] WU M J, HUANG X H, IFTIKHAR A, et al. Nonlinear dynamic and vibration characteristics of metamaterial shallow arches[J]. European Journal of Mechanics - A/ Solids, 2023, 102:105084.
- [24] WU M J, IFTIKHAR A, HUANG X H. A novel technique for low-velocity impact of shallow arches[J]. Computers & Structures, 2024, 298:107386.

Dynamic instability analysis of auxetic structure with opened section

WU Mengjing¹, ZHU Jue¹, HUANG Xuhao^{1,2,3}

(1.Zhejiang Provincial Engineering Research Center for the Safety of Pressure Vessel and Pipeline, Ningbo University, Ningbo 315211, China; 2.School of Mechanics and Civil Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China; 3.Hwaway Technology Co., Ltd., Zhuji 311800, China)

Abstract: In this work, the dynamic instability behavior of carbon nanotube-reinforced composite (CNTRC) structures with opened section is analyzed. The motion equations for the static and dynamic instability are derived based on the first-order shear plate theory and finite strip method. Further, the characteristic equations with $2T$ period are obtained by using Bolotin method, and the major dynamic instability regions of the structure are given. Subsequently, based on this model, the effects of different carbon nanotube volume, auxetic effect and lip stiffener on the dynamic instability response of the structures are investigated. The results show that above factors can increase the frequency of dynamic instability, but the strengthening effect of the stiffener will be weakened with the occurrence of local buckling caused by its own width being too large.

Key words: plates interaction; dynamic instability; auxetic effect; finite strip method; Bolotin method

(责任编辑 章践立)