

DOI: 10.20098/j.cnki.1001-5132.2024.0915

含 Grushin 梯度的加权 m -Laplace 方程稳定解的 Liouville 定理

邱佳露, 胡良根*

(宁波大学 数学与统计学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 研究了含 Grushin 梯度加权 m -Laplace 方程 $-\nabla_G(|\nabla_G u|^{m-2}\nabla_G u) + \|X\|^\theta |u|^{p-1}u = \|X\|^\delta |u|^{q-1}u$, 其中 $\nabla_G = (\nabla_x, |x|^\alpha \nabla_y)$ 是 Grushin 梯度, $\alpha > 0$, $m \geq 2$, $X = (x, y) \in R^N = R^{N_1} \times R^{N_2}$, $\|X\| = (|x|^{2(\alpha+1)} + |y|^2)^{1/(2(\alpha+1))}$. 采用 Moser 迭代、积分估计等方法, 探讨 θ 、 δ 、 p 、 q 取不同值, 齐次维数 $N_\alpha = N_1 + (1+\alpha)N_2$ 取不同上界值时, 建立 m -Laplace 方程稳定解的 Liouville 定理.

关键词: Grushin 梯度; 权项; 稳定解; Liouville 定理

中图分类号: O186

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2025) 02-0109-06

Lane-Emden 方程 $-\Delta u = |u|^{p-1}u$ 是描述天文物理中一个表现自引力位能的数学模型, 其解的 Liouville 定理可用来研究椭圆方程解的 L^∞ 界, 以解决非线性分析中紧性缺失的问题. 1992 年, Bahri 等^[1]首次在有界光滑开区域内研究椭圆方程 $-\Delta u = f(x, u)$ 解的 Morse 指标数大于等于非零解集的连通分量个数, 证明其解 Morse 指标数有界等价于解的 L^∞ 界. 椭圆方程 Morse 指标数是指线性化方程的负特征值个数, 如果椭圆方程解的 Morse 指标数为零, 则称其解是稳定的.

2007 年, Farina^[2]给出了 Lane-Emden 方程稳定解和有限 Morse 指标解的完全分类, 即当指数 p 属于次临界和超临界时, 方程稳定解和有限 Morse 指标解的 Liouville 定理成立; 当 p 为临界指数时, 其稳定解的 Liouville 定理成立, 但存在有限能量的有限 Morse 指标解. 对于双调和 Lane-Emden 方程 $\Delta^2 u = |u|^{p-1}u$, Dávila 等^[3]利用单调公式、Pohozaev 恒等式、Souplet 不等式, 结合积分先验估计等方法给出了类似于文献[2]的结果, 即给出稳定解和有限 Morse 指标解的完全分类. 采用文献[2-3]中的方法, 有关学者研究了多调和 Lane-Emden 方程, 加权的双调和 Lane-Emden 方程、分数阶椭圆方程稳定解和有限 Morse 指标解的完全分类^[4-7].

近年来, 含 Grushin 算子的椭圆方程引起了广泛关注, 但 Grushin 算子 $\Delta_G := \Delta_x + |x|^{2\alpha} \Delta_y$ 是非对称的, 且在 $\{0\} \times R^{N_2}$ 流行上是退化的, 这种退化性会导致拉普拉斯算子所具备的很多性质不再成立, 这使研究含 Grushin 算子(梯度)的椭圆方程变得很困难.

Capuzzo 等^[8]证明了含有 Grushin 算子的 Lane-Emden 方程 $-\Delta_G u = |u|^{p-1}u$ 在 $p < N_\alpha / (N_\alpha - 2)$ 条件下非负解的 Liouville 定理成立. 2010 年, Monticelli^[9]利用移动平面法结合 Kelvin 变换, 在 $p < (N_\alpha + 2) / (N_\alpha - 2)$ 条件下, 证明了含有 Grushin 算子的 Lane-Emden 方程非负经典解的 Liouville 定理成立. 2015 年, Yu^[10]利用同样的方法证明了含有 Grushin 算子的 Lane-Emden 方程非负弱解的 Liouville 定理成立. 利用 Bootstrap 方法, 结合积分先验估计, Duong 等^[11]研究了含 Grushin 算子和梯度项的椭圆方程稳定解的 Liouville 定理. Mtaouaa^[12]证明了含 Grushin 算子的加权椭圆系统稳定解的 Liouville 定理成立. 基于 Bootstrap 方法、解稳定性定义以及积分先验估计等方法, Mtiri^[13]研究了含 Grushin 算子加权的椭圆系统稳定解的 Liouville 定理.

本文研究含 Grushin 梯度的加权 m -Laplace 方程:

收稿日期: 2024-09-25.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journal.g.nbu.edu.cn/>

基金项目: 宁波市自然科学基金(2023J127).

第一作者: 邱佳露, 硕士研究生, 主要研究方向: 非线性泛函分析. E-mail: 443218615@qq.com

*通信作者: 胡良根, 教授, 主要研究方向: 非线性泛函分析. E-mail: hulianggen@nbu.edu.cn

$$-\nabla_G(|\nabla_G u|^{m-2}\nabla_G u) + \\ \|X\|^\theta |u|^{p-1}u = \|X\|^\delta |u|^{q-1}u, \quad (1)$$

其中: $\nabla_G = (\nabla_x, |x|^\alpha \nabla_y)$ 是 Grushin 梯度, $\alpha > 0$, $m \geq 2$, $X = (x, y) \in R^N = R^{N_1} \times R^{N_2}$, $\|X\| = (|x|^{2(\alpha+1)} + |y|^2)^{1/(2(\alpha+1))}$, 齐次维数 $N_\alpha := N_1 + (1+\alpha)N_2$.

本文得到 2 个主要结果.

定理 1 设 u 是加权 m -Laplace 方程的稳定解, $q > m-1$, $q > p \geq 1$, 对任意的 γ 满足下面 2 个条件之一:

(H1) 当 $0 < p \leq m-1$ 时, 有:

$$1 \leq \gamma < \frac{2q+1-m+2\sqrt{q(q-m+1)}}{m-1}.$$

(H2) 当 $p > m-1$ 且 $\delta p - \theta q > m(q-p)$ 时, 有:

$$\frac{2p+1-m+2\sqrt{p(p-m+1)}}{m-1} \leq \gamma < \\ \frac{2q+1-m+2\sqrt{q(q-m+1)}}{m-1}.$$

齐次维数 N_α 满足:

$$N_\alpha < \frac{\delta(m+\gamma-1)+m(q+\gamma)}{q-m+1},$$

则 $u \equiv 0$.

定理 2 设 u 是加权的 m -Laplace 方程的稳定解, $q > p > m-1$, 对任意的 γ 满足条件:

$$\frac{2p+1-m+2\sqrt{p(p-m+1)}}{m-1} \leq \gamma < \\ \frac{2q+1-m+2\sqrt{q(q-m+1)}}{m-1},$$

且 δ 和 θ 满足 $\delta p - \theta q < m(q-p)$, N_α 满足:

$$N_\alpha < \frac{\theta(m+\gamma-1)+m(p+\gamma)}{p-m+1},$$

则 $u \equiv 0$.

注 1 本文采用 Farina^[2]中的 Moser 迭代、测试函数和积分先验估计等方法, 解决方程中由于权项指数不同和含 Grushin 梯度的 m -Laplace 算子所产生的困难.

注 2 由定理 2 中 δ 、 θ 、 p 、 q 和 N_α 所满足的条件, 计算发现:

$$\frac{\delta(m+\gamma-1)+m(q+\gamma)}{q-m+1} < \\ \frac{\theta(m+\gamma-1)+m(p+\gamma)}{p-m+1}$$

成立. 即定理 2 中齐次维数 N_α 所取得的上限值更大.

1 预备知识和引理

首先给出 m -Laplace 方程弱解的定义.

定义 1 如果对所有 $\phi \in C_0^1(R^N)$, $\|X\|^\theta |u|^{p-1}u + \|X\|^\delta |u|^{q-1}u \in L_{loc}^1(R^N)$, 有:

$$\int_{R^N} |\nabla_G u|^{m-2} \nabla_G u \cdot \nabla_G \phi \, dx dy + \\ \int_{R^N} \|X\|^\theta |u|^{p-1} u \phi \, dx dy = \\ \int_{R^N} \|X\|^\delta |u|^{q-1} u \phi \, dx dy \quad (2)$$

成立, 则称 u 为 m -Laplace 方程的弱解.

定义 2 设 u 是 m -Laplace 方程(1)弱解, 对所有 $\phi \in C_0^1(R^N)$, $\|X\|^\theta |u|^{p-1}u + \|X\|^\delta |u|^{q-1}u \in L_{loc}^1(R^N)$, m -Laplace 方程关于 u 的二次型定义为:

$$Q_u(\phi) := \int_{R^N} [|\nabla_G u|^{m-2} |\nabla_G \phi|^2 + \\ (m-2) |\nabla_G u|^{m-4} (\nabla_G u \cdot \nabla_G \phi)^2] \, dx dy + \\ p \int_{R^N} \|X\|^\theta |u|^{p-1} \phi^2 \, dx dy - \\ q \int_{R^N} \|X\|^\delta |u|^{q-1} \phi^2 \, dx dy.$$

如果对所有 $\phi \in C_0^1(R^N)$, 有 $Q_u(\phi) \geq 0$ 成立, 则称 u 为 m -Laplace 方程的稳定解.

利用内积性质, 有:

引理 1 对所有的 $\phi \in C_0^1(R^N)$, 如果 u 是 m -Laplace 方程的稳定解, 则有:

$$\int_{R^N} (q \|X\|^\delta |u|^{q-1} - p \|X\|^\theta |u|^{p-1}) \phi^2 \, dx dy \leq \\ (m-1) \int_{R^N} |\nabla_G u|^{m-2} |\nabla_G \phi|^2 \, dx dy \quad (3)$$

成立.

受文献[14]启发, 从特征值角度给出 m -Laplace 方程的稳定解定义.

定义 3 m -Laplace 方程的解称为稳定的, 如果存在正的第一特征值 $\nu > 0$ 和正的光滑特征函数 ω , 使得:

$$\begin{cases} -(m-1) \nabla_G (|\nabla_G u|^{m-2} \nabla_G \omega) + \\ p \|X\|^\theta |u|^{p-1} \omega = \\ q \|X\|^\delta |u|^{q-1} \omega + \nu \omega, \\ X \in \Omega, \\ \omega = 0, X \in \partial\Omega. \end{cases}$$

引理 2 如果 u 是 m -Laplace 方程的稳定解, 则有:

$$\int_{R^N} \left(q \|X\|^\delta |u|^{q-1} - p \|X\|^\theta |u|^{p-1} \right) \phi^2 dx dy \leq (m-1) \int_{R^N} |\nabla_G u|^{m-2} |\nabla_G \phi|^2 dx dy$$

成立, 其中 $\phi \in C_0^1(R^N)$.

证明 由定义 3 易知:

$$\begin{aligned} q \|X\|^\delta |u|^{q-1} \omega &\leq \\ &-(m-1) \nabla_G (|\nabla_G u|^{m-2} \nabla_G \omega) + \\ &p \|X\|^\theta |u|^{p-1} \omega \leq \\ &(m-1) \int_{R^N} |\nabla_G u|^{m-2} \nabla_G \omega \cdot \nabla_G (\phi^2 / \omega) dx dy + \\ &p \int_{R^N} \|X\|^\theta |u|^{p-1} \omega (\phi^2 / \omega) dx dy = \\ &(m-1) \int_{R^N} |\nabla_G u|^{m-2} \nabla_G \omega \cdot \\ &[2\phi \omega^{-1} \nabla_G \phi - \phi^2 \omega^{-2} \nabla_G \omega] dx dy + \\ &p \int_{R^N} \|X\|^\theta |u|^{p-1} \phi^2 dx dy \leq \\ &(m-1) \int_{R^N} |\nabla_G u|^{m-2} |\nabla_G \phi|^2 dx dy + \\ &p \int_{R^N} \|X\|^\theta |u|^{p-1} \phi^2 dx dy. \end{aligned}$$

将上面不等式两端同乘以 ϕ^2 / ω , 其中 $\phi \in C_0^1(R^N)$, 并进行分部积分可得:

$$\begin{aligned} q \int_{R^N} \|X\|^\delta |u|^{q-1} \phi^2 dx dy &= \\ q \int_{R^N} \|X\|^\delta |u|^{q-1} \omega (\phi^2 / \omega) dx dy \end{aligned}$$

结论成立.

引理 3 设 u 是 m -Laplace 方程的稳定解, $m \geq 2$, 对任意的 $\gamma \geq 1$, 如果条件

$$q > \frac{(\gamma+1)^2(m-1)}{4\gamma} \geq p \quad (4)$$

成立, 则对任意的 $\zeta \in C_0^1(R^N)$, 存在正整数 k 和常数 $C = C_{n,m,p,q,\gamma,k} > 0$, 使得不等式

$$\begin{aligned} \int_{R^N} \left(|\nabla_G u|^m |u|^{\gamma-1} + \|X\|^\delta |u|^{q+\gamma} + \right. \\ \left. \|X\|^\theta |u|^{p+\gamma} \right) \zeta^{mk} dx dy \leq \\ C \int_{R^N} \|X\|^{\frac{\delta(m+\gamma-1)}{q-m+1}} |\nabla_G \zeta|^{\frac{m(q+\gamma)}{q-m+1}} dx dy \end{aligned} \quad (5)$$

成立.

证明 分 4 步进行证明.

第 1 步, 对所有的 $\varepsilon \in (0, \gamma)$, 证明不等式

$$(\gamma - \varepsilon) \int_{R^N} |\nabla_G u|^m |u|^{\gamma-1} \eta^m dx dy \leq$$

$$C_\varepsilon \int_{R^N} |u|^{m+\gamma-1} |\nabla_G \eta|^m dx dy + \int_{R^N} \left(\|X\|^\delta |u|^{q+\gamma} - \|X\|^\theta |u|^{p+\gamma} \right) \eta^m dx dy \quad (6)$$

成立.

在式(2)中选取测试函数 $\phi := |u|^{\gamma-1} u \eta^m$, 计算可得:

$$\nabla_G \phi = \gamma |u|^{\gamma-1} \eta^m \nabla_G u + m |u|^{\gamma-1} u \eta^{m-1} \nabla_G \eta.$$

代入式(2), 可得:

$$\begin{aligned} \gamma \int_{R^N} |\nabla_G u|^m |u|^{\gamma-1} \eta^m dx dy + \\ m \int_{R^N} |\nabla_G u|^{m-2} |u|^{\gamma-1} u \eta^{m-1} \nabla_G u \cdot \nabla_G \eta dx dy = \\ \int_{R^N} \left(\|X\|^\delta |u|^{q+\gamma} - \|X\|^\theta |u|^{p+\gamma} \right) \eta^m dx dy. \end{aligned}$$

再使用 Young 不等式, 可得:

$$\begin{aligned} \gamma \int_{R^N} |\nabla_G u|^m |u|^{\gamma-1} \eta^m dx dy - \\ \int_{R^N} \left(\|X\|^\delta |u|^{q+\gamma} - \|X\|^\theta |u|^{p+\gamma} \right) \eta^m dx dy \leq \\ m \int_{R^N} |\nabla_G u|^{m-1} |u|^\gamma \eta^{m-1} |\nabla_G \eta| dx dy \leq \\ \varepsilon \int_{R^N} \left(|\nabla_G u|^{m-1} |u|^{\frac{(\gamma-1)(m-1)}{m}} \eta^{m-1} \right)^{\frac{m}{m-1}} dx dy + \\ C_\varepsilon \int_{R^N} \left(|u|^{\frac{m+\gamma-1}{m}} |\nabla_G \eta| \right)^m dx dy = \\ \varepsilon \int_{R^N} |\nabla_G u|^m |u|^{\gamma-1} \eta^m dx dy + \\ C_\varepsilon \int_{R^N} |u|^{m+\gamma-1} |\nabla_G \eta|^m dx dy, \end{aligned}$$

从而对所有的 $\varepsilon \in (0, \gamma)$, 式(3)成立.

第 2 步, 在式(3)中选测试函数 $\phi := |u|^{(\gamma-1)/2} u \eta^{m/2}$, 直接计算可得:

$$\begin{aligned} \nabla_G \phi &= \frac{\gamma+1}{2} |u|^{\frac{\gamma-1}{2}} \eta^{\frac{m}{2}} \nabla_G u + \\ &\frac{m}{2} |u|^{\frac{\gamma-1}{2}} u \eta^{\frac{m-2}{2}} \nabla_G \eta, \end{aligned}$$

代入式(3), 并计算可得:

$$\begin{aligned} q \int_{R^N} \|X\|^\delta |u|^{q+\gamma} \eta^m dx dy - \\ p \int_{R^N} \|X\|^\theta |u|^{p+\gamma} \eta^m dx dy \leq (m-1) \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^2 \cdot \\ \int_{R^N} |\nabla_G u|^m |u|^{\gamma-1} \eta^m dx dy + \frac{\gamma+1}{2} m(m-1) \cdot \\ \int_{R^N} |\nabla_G u|^{m-1} |u|^\gamma \eta^{m-1} |\nabla_G \eta| dx dy + \frac{m^2}{4} (m-1) \cdot \end{aligned}$$

$$\int_{R^N} |\nabla_G u|^{m-2} |u|^{\gamma+1} \eta^{m-2} |\nabla_G \eta|^2 dx dy. \quad (7)$$

应用 Young 不等式估计式(7)的最后 2 项, 分别可得:

$$\begin{aligned} & m(m-1) \frac{2}{\gamma+1} \int_{R^N} |\nabla_G u|^{m-1} |u|^\gamma \eta^{m-1} |\nabla_G \eta| dx dy \leq \\ & \frac{\varepsilon}{2} \int_{R^N} \left(|\nabla_G u|^{m-1} |u|^{\frac{(\gamma-1)(m-1)}{m}} \eta^{m-1} \right)^{\frac{m}{m-1}} dx dy + \\ & C_\varepsilon \int_{R^N} \left(|u|^{\frac{m+\gamma-1}{m}} |\nabla_G \eta| \right)^m dx dy = \\ & \frac{\varepsilon}{2} \int_{R^N} |\nabla_G u|^m |u|^{\gamma-1} \eta^m dx dy + \\ & C_\varepsilon \int_{R^N} |u|^{m+\gamma-1} |\nabla_G \eta|^m dx dy, \end{aligned}$$

以及对所有的 $m \geq 2$, 有:

$$\begin{aligned} & \frac{m^2}{4} (m-1) \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^2 \cdot \\ & \int_{R^N} |\nabla_G u|^{m-2} |u|^{\gamma+1} \eta^{m-2} |\nabla_G \eta|^2 dx dy \leq \\ & \frac{\varepsilon}{2} \int_{R^N} \left(|\nabla_G u|^{m-2} |u|^{\frac{(\gamma-1)(m-2)}{m}} \eta^{m-2} \right)^{\frac{m}{m-2}} dx dy + \\ & C_\varepsilon \int_{R^N} \left(|u|^{\frac{2(m+\gamma-1)}{m}} |\nabla_G \eta|^2 \right)^{\frac{m}{2}} dx dy = \\ & \frac{\varepsilon}{2} \int_{R^N} |\nabla_G u|^m |u|^{\gamma-1} \eta^m dx dy + \\ & C_\varepsilon \int_{R^N} |u|^{m+\gamma-1} |\nabla_G \eta|^m dx dy. \end{aligned}$$

将上面这 2 个不等式代入式(7), 整理可得:

$$\begin{aligned} & \int_{R^N} (q \|X\|^\delta |u|^{q+\gamma} - p \|X\|^\theta |u|^{p+\gamma}) \eta^m dx dy \leq \\ & \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^2 (m-1+\varepsilon) \int_{R^N} |\nabla_G u|^m |u|^{\gamma-1} \eta^m dx dy + \\ & C_\varepsilon \int_{R^N} |u|^{m+\gamma-1} |\nabla_G \eta|^m dx dy. \end{aligned} \quad (8)$$

第 3 步, 证明不等式

$$\begin{aligned} & \int_{R^N} (|\nabla_G u|^m |u|^{\gamma-1} + \|X\|^\delta |u|^{q+\gamma} + \|X\|^\theta |u|^{p+\gamma}) \cdot \\ & \eta^m dx dy \leq C \int_{R^N} |u|^{m+\gamma-1} |\nabla_G \eta|^m dx dy \end{aligned} \quad (9)$$

成立. 联合式(6)和式(8)可得:

$$\begin{aligned} & \int_{R^N} (q \|X\|^\delta |u|^{q+\gamma} - p \|X\|^\theta |u|^{p+\gamma}) \eta^m dx dy \leq \\ & \frac{(\gamma+1)^2 (m-1+\varepsilon)}{4(\gamma-\varepsilon)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{R^N} (\|X\|^\delta |u|^{q+\gamma} - \|X\|^\theta |u|^{p+\gamma}) \eta^m dx dy + \\ & C_\varepsilon \int_{R^N} |u|^{m+\gamma-1} |\nabla_G \eta|^m dx dy, \end{aligned}$$

即有:

$$\begin{aligned} & \left(q - \frac{(\gamma+1)^2 (m-1+\varepsilon)}{4(\gamma-\varepsilon)} \right) \cdot \\ & \int_{R^N} \|X\|^\delta |u|^{q+\gamma} \eta^m dx dy + \\ & \left(\frac{(\gamma+1)^2 (m-1+\varepsilon)}{4(\gamma-\varepsilon)} - p \right) \cdot \\ & \int_{R^N} \|X\|^\theta |u|^{p+\gamma} \eta^m dx dy \leq \\ & C_\varepsilon \int_{R^N} |u|^{m+\gamma-1} |\nabla_G \eta|^m dx dy. \end{aligned}$$

因为

$$q > \frac{(\gamma+1)^2 (m-1)}{4\gamma} \geq p,$$

选取足够小的 $\varepsilon \in (0, \gamma)$, 使得不等式:

$$q > \frac{(\gamma+1)^2 (m-1+\varepsilon)}{4(\gamma-\varepsilon)} > p$$

成立. 则有:

$$\begin{aligned} & \int_{R^N} (\|X\|^\delta |u|^{q+\gamma} + \|X\|^\theta |u|^{p+\gamma}) \eta^m dx dy \leq \\ & C \int_{R^N} |u|^{m+\gamma-1} |\nabla_G \eta|^m dx dy. \end{aligned}$$

再联合式(6), 可得式(9)成立.

第 4 步, 令 $\eta = \zeta^k$, 其中 k 是足够大的正整数且满足:

$$k \left(\frac{q-m+1}{q+\gamma} \right) \geq 1,$$

则有:

$$\begin{aligned} & \int_{R^N} (|\nabla_G u|^m |u|^{\gamma-1} + \|X\|^\delta |u|^{q+\gamma} + \|X\|^\theta |u|^{p+\gamma}) \cdot \\ & \zeta^{mk} dx dy \leq \\ & C \int_{R^N} |u|^{m+\gamma-1} \zeta^{m(k-1)} |\nabla_G \zeta|^m dx dy. \end{aligned} \quad (10)$$

应用 Young 不等式可得:

$$\begin{aligned} & \int_{R^N} (|\nabla_G u|^m |u|^{\gamma-1} + \|X\|^\delta |u|^{q+\gamma} + \|X\|^\theta |u|^{p+\gamma}) \cdot \\ & \zeta^{mk} dx dy \leq \\ & \frac{1}{2} \int_{R^N} \left(\|X\|^{\frac{\delta(m+\gamma-1)}{q+\gamma}} |u|^{m+\gamma-1} \zeta^{m(k-1)} \right)^{\frac{q+\gamma}{m+\gamma-1}} dx dy + \\ & C \int_{R^N} \left(\|X\|^{\frac{\delta(m+\gamma-1)}{q+\gamma}} |\nabla_G \zeta|^m \right)^{\frac{q+\gamma}{q-m+1}} dx dy \leq \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \int_{R^N} \|X\|^\delta |u|^{q+\gamma} \zeta^{mk} dx dy +$$

$$C \int_{R^N} \|X\|^\frac{\delta(m+\gamma-1)}{q-m+1} |\nabla_G \zeta|^\frac{m(q+\gamma)}{q-m+1} dx dy,$$

即有:

$$\int_{R^N} (|\nabla_G u|^m |u|^{\gamma-1} + \|X\|^\delta |u|^{q+\gamma} + \|X\|^\theta |u|^{p+\gamma}) \cdot$$

$$\zeta^{mk} dx dy \leq$$

$$C \int_{R^N} \|X\|^\frac{\delta(m+\gamma-1)}{q-m+1} |\nabla_G \zeta|^\frac{m(q+\gamma)}{q-m+1} dx dy,$$

证毕.

2 定理的证明

定理 1 证明 设 $\omega_i \in C_0^\infty(R, [0, 1])$, $i=1, 2$, 且在 $[-1, 1]$ 上 $\omega_i=1$, 在 $[-2^{1+(i-1)\alpha}, 2^{1+(i-1)\alpha}]$ 外有 $\omega_i=0$. 对任意的 $R>0$, 定义:

$$\zeta_R(x, y) := \omega_1\left(\frac{|x|}{R}\right) \omega_2\left(\frac{|y|}{R^{\alpha+1}}\right),$$

则存在与 R 无关的正常数 C , 使得:

$$|\nabla_x \zeta_R(x, y)| \leq \frac{C}{R},$$

$$|\nabla_y \zeta_R(x, y)| \leq \frac{C}{R^{\alpha+1}},$$

$$|\Delta_x \zeta_R(x, y)| \leq \frac{C}{R^2},$$

$$|\Delta_y \zeta_R(x, y)| \leq \frac{C}{R^{2(\alpha+1)}}.$$

如果定理 1 中的条件(H1)或者(H2)成立, 则容易验证引理 3 中式(4)成立, 从而由引理 3 可以得到式(5)的结论成立. 令 $\zeta = \zeta_R$, 则有:

$$\int_{R^N} (|\nabla_G u|^m |u|^{\gamma-1} + \|X\|^\delta |u|^{q+\gamma} + \|X\|^\theta |u|^{p+\gamma}) \cdot$$

$$\zeta^{mk} dx dy \leq$$

$$\int_{B_{2R} \times B_{(2R)^{\alpha+1}}} (|\nabla_G u|^m |u|^{\gamma-1} +$$

$$\|X\|^\delta |u|^{q+\gamma} + \|X\|^\theta |u|^{p+\gamma}) \zeta^{mk} dx dy \leq$$

$$C \int_{B_{2R} \times B_{(2R)^{\alpha+1}}} \|X\|^\frac{\delta(m+\gamma-1)}{q-m+1} \cdot$$

$$|\nabla_G \zeta|^\frac{m(q+\gamma)}{q-m+1} dx dy \leq$$

$$CR^{N_\alpha \frac{\delta(m+\gamma-1)}{q-m+1} \frac{m(q+\gamma)}{q-m+1}}.$$

由定理 1 的齐次维数 N_α 所满足的条件可知:

$$N_\alpha - \frac{\delta(m+\gamma-1)}{q-m+1} - \frac{m(q+\gamma)}{q-m+1} < 0,$$

令 $R \rightarrow \infty$, 则 $u \equiv 0$.

定理 2 证明 采用引理 3 的证明, 对式(10)使用 Young 不等式可得:

$$\int_{R^N} (|\nabla_G u|^m |u|^{\gamma-1} + \|X\|^\delta |u|^{q+\gamma} + \|X\|^\theta |u|^{p+\gamma}) \cdot$$

$$\zeta^{mk} dx dy \leq$$

$$\frac{1}{2} \int_{R^N} \left(\|X\|^\frac{\theta(m+\gamma-1)}{p+\gamma} \zeta^{m(k-1)} \right)^\frac{p+\gamma}{m+\gamma-1} dx dy +$$

$$C \int_{R^N} \left(\|X\|^\frac{\theta(m+\gamma-1)}{p+\gamma} |\nabla_G \zeta|^m \right)^\frac{p+\gamma}{p-m+1} dx dy \leq$$

$$\frac{1}{2} \int_{R^N} \|X\|^\theta |u|^{p+\gamma} \zeta^{mk} dx dy +$$

$$C \int_{R^N} \|X\|^\frac{\theta(m+\gamma-1)}{p-m+1} |\nabla_G \zeta|^\frac{m(p+\gamma)}{p-m+1} dx dy,$$

其中:

$$k \left(\frac{p-m+1}{p+\gamma} \right) \geq 1,$$

即可得:

$$\int_{R^N} (|\nabla_G u|^m |u|^{\gamma-1} + \|X\|^\delta |u|^{q+\gamma} + \|X\|^\theta |u|^{p+\gamma}) \cdot$$

$$\zeta^{mk} dx dy \leq$$

$$C \int_{R^N} \|X\|^\frac{\theta(m+\gamma-1)}{p-m+1} |\nabla_G \zeta|^\frac{m(p+\gamma)}{p-m+1} dx dy,$$

与定理 1 相同, 选取 $\zeta := \zeta_R$ 并计算可得:

$$\int_{R^N} (|\nabla_G u|^m |u|^{\gamma-1} + \|X\|^\delta |u|^{q+\gamma} + \|X\|^\theta |u|^{p+\gamma}) \cdot$$

$$\zeta^{mk} dx dy \leq$$

$$CR^{N_\alpha \frac{\theta(m+\gamma-1)}{p-m+1} \frac{m(p+\gamma)}{p-m+1}}.$$

由定理 2 中齐次维数所满足的条件可知:

$$N_\alpha - \frac{\theta(m+\gamma-1)}{p-m+1} - \frac{m(p+\gamma)}{p-m+1} < 0.$$

令 $R \rightarrow \infty$, 则 $u \equiv 0$.

参考文献:

- [1] BAHRI A, LIONS P L. Solutions of superlinear elliptic equations and their morse indices[J]. Communications Pure and Applied Mathematics, 1992, 45(9):1205-1215.
- [2] FARINA A. On the classification of solutions of the

- Lane-Emden equation on unbounded domains of R^N [J]. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 2007, 87(5):537-561.
- [3] DÁVILA J, DUPAIGNE L, WANG K L, et al. A monotonicity formula and a Liouville-type theorem for a fourth order supercritical problem[J]. Advances in Mathematics, 2014, 258:240-285.
- [4] DAMASCELLI L, FARINA A, SCIUNZI B, et al. Liouville results for m -Laplace equations of Lane-Emden-Fowler type[J]. Annales de L'Institut Henri Poincaré C, Analyse Non Linéaire, 2009, 26(4):1099-1119.
- [5] FAZLY M, YANG W. On stable and finite Morse index solutions of the fractional Toda system[J]. Journal of Functional Analysis, 2021, 280(4):108870.
- [6] NGUYEN T Q, DUONG A T. On stable solutions of a weighted elliptic equation involving the fractional Laplacian[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2024, 47(4):2717-2727.
- [7] HAJLAOUI H. Liouville type theorems for stable solutions of the weighted fractional Lane-Emden system [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2022, 42(12):5665-5681.
- [8] CAPUZZO D I, CUTRI A. On the Liouville property for sublaplacians[J]. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa Classe di Scienze, 1997, 25:239-256.
- [9] MONTICELLI D D. Maximum principles and the method of moving planes for a class of degenerate elliptic linear operators[J]. Journal of the European Mathematical Society, 2010, 12(3):611-654.
- [10] YU X H. Liouville type theorem for nonlinear elliptic equation involving Grushin operators[J]. Communications in Contemporary Mathematics, 2015, 17(5):1450050.
- [11] DUONG A T, NGUYEN Q T. Liouville type theorems for elliptic equations involving Grushin operator and advection[J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2017, 108:1-11.
- [12] MTAOUAA W. Liouville results for stable solutions of weighted elliptic equations involving the Grushin operator[J]. Ricerche di Matematica, 2024, 9:1-11.
- [13] MTIRI F. On the classification of solutions to a weighted elliptic system involving the grushin operator[EB/OL]. [2024-07-10]. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10440-021-00425-2>.
- [14] MONTENEGRO M. Minimal solutions for a class of elliptic systems[J]. Bulletin of the London Mathematical Society, 2005, 37(3):405-416.

Liouville type theorems for stable solutions of the weighted m -Laplace equation with Grushin gradient

QIU Jialu, HU Lianggen

(School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: In the paper, the weighted m -Laplace equation with Grushin gradient is considered $-\nabla_G(|\nabla_G u|^{m-2}\nabla_G u) + ||X||^\theta |u|^{p-1}u = ||X||^\delta |u|^{q-1}u$ where $\nabla_G = (\nabla_x, |x|^\alpha \nabla_y)$ is Grushin gradient, $\alpha > 0$, $m \geq 2$, $X = (x, y) \in R^N = R^{N_1} \times R^{N_2}$, $||X|| = (|x|^{2(\alpha+1)} + |y|^2)^{1/(2(\alpha+1))}$. By employing Moser iteration and integral estimate, the Liouville type theorems of stable solution for m -Laplace equation is established, when θ, δ, p, q take different values and the homogeneous dimension $N_\alpha = N_1 + (1 + \alpha)N_2$ takes different upper bound values.

Key words: Grushin gradient; weights; stable solution; Liouville-type theorem

(责任编辑 史小丽)