

DOI: 10.20098/j.cnki.1001-5132.2025.0528

Hawkes 跳扩散模型下的最优投资策略

贾沐真, 王伟*

(宁波大学 数学与统计学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 旨在研究投资者在股票和货币市场账户之间的最优资产配置问题, 为此假定股票价格服从 Hawkes 跳扩散模型, 且跳跃幅度满足正态分布, 以最大化终端财富效用为目标, 运用随机动态规划方法构建相应的 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程, 并利用 Feynman-Kac 公式获得值函数的隐式解, 再基于 Banach 不动点定理严格证明了最优投资策略的收敛性, 最后采用迭代收敛数值方法求解出最优投资策略的解析解。数值结果证实, Hawkes 跳扩散模型的自激发性对最优投资策略存在显著影响。

关键词: Hawkes 跳扩散; 动态规划; 最优投资; 迭代收敛

中图分类号: O211.9

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2025) 06-0097-08

自 Markowitz^[1]于 1952 年开创性地提出单期模型的均值-方差资产配置问题后, 最优投资问题逐渐成为金融数学领域的研究热点。1971 年 Merton^[2]研究了连续时间的最优投资问题, 运用几何布朗运动对风险资产价格进行建模, 并利用随机控制方法得到了最优投资策略。然而, 市场突发性事件的发生往往会导致风险资产价格出现跳跃, 因此大量研究开始聚焦于风险资产价格是否满足跳扩散模型下的最优投资问题^[3-6]。例如, Liu 等^[7]研究了跳扩散模型下的最优消费和投资问题, 借助动态规划方法构建 HJB 方程, 并给出了最优投资和消费策略的闭式解; Wei 等^[8]假定投资者对扩散风险与跳跃风险持有不同程度的模糊态度, 研究了具有递归效用的模糊厌恶型投资者的最优消费与资产组合选择问题; Josa-Fombellida 等^[9]假定养老基金可配置于无风险资产和多种风险资产, 且风险资产价格满足多维跳扩散模型, 探讨了目标收益型养老金计划的最优资产配置问题。由于跳扩散模型下的最优投资策略很难得到显式解, Zhang 等^[10]提出了一种高效、易实现且严格单调的数值积分方法, 用于求解均值-方差投资组合优化问题。

Hawkes 于 1971 年提出 Hawkes 过程^[11], 最初应用于地震学等领域, 其核心特性是能够描述事件发生时的自我激发和相互激发现象。Hawkes 进一步指出跳扩散模型难以充分描述市场中资产价格动态变化所呈现的跳跃聚集效应和自激发特性^[12]。Errais 等^[13]指出 Hawkes 过程因同时融合了跳跃和聚类两种特征, 能很好地刻画风险资产价格中跳跃聚集现象。Aït-Sahalia 等^[14]指出造成金融市场灾难的原因不仅在于初始跳跃事件本身, 更在于后续连锁反应对金融市场的持续影响。此后, 众多学者将 Hawkes 过程运用到期权定价、投资和风险管理领域, 如 Stabile 等^[15]采用 Hawkes 过程刻画保险索赔的发生次数, 深入研究保险公司破产概率的渐近行为; Ma 等^[16]利用 Hawkes 跳扩散过程描述公司资产价值, 进而分析了两家公司的联合违约概率。

但目前针对 Hawkes 过程下最优投资组合问题的研究仍相对匮乏。Aït-Sahalia 等^[17]将多维 Hawkes 跳扩散模型应用于多个风险资产的价格研究, 探讨不同效用函数下的最优投资组合和消费问题。Liu 等^[18]研究了家庭在面临外生随机收入且风险资产价格满足二维 Hawkes 跳扩散模型时, 最优资产配

收稿日期: 2025-05-27

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journalg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金数学天元基金(1226510); 宁波市自然科学基金(2024J193)

第一作者: 贾沐真, 硕士研究生, 主要研究方向为应用概率统计。E-mail: 2311400025@nbu.edu.cn

*通信作者: 王伟, 教授, 主要研究方向为应用概率统计。E-mail: wangwei2@nbu.edu.cn

置、消费和人寿保险策略的选择问题。本文同样采用 Hawkes 跳扩散模型描述风险资产的价格动态,且假定跳跃大小满足正态分布。在市场仅可投资无风险债券和风险股票设定下,通过 Itô 公式和随机动态规划方法推导得到 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程,重点研究指数效用函数下的最优投资策略,并借助 Banach 不动点定理证明了该最优投资策略的收敛性,最终利用迭代收敛数值法求解出最优投资策略的数值解。

1 金融市场模型

令 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_{t|0 \leq t \leq T})$ 是一个带域流的概率空间,其中, P 为概率测度, $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ 为自然 σ 域。 $\{N_t, W_t : t > 0\}$ 是定义在该概率空间上的随机过程,其中, N_t 为 Hawkes 过程, W_t 为一维标准布朗运动。Hawkes 过程 $\{N_t : t > 0\}$ 是一种具有自激发特性的点过程,其强度函数不仅取决于时间,还受以往跳跃事件的影响。由 Hawkes 过程定义可知, N_t 满足如下的条件概率:

$$\mathbb{P}(N_{t+\Delta t} - N_t = m | \mathcal{F}_t) = \begin{cases} 1 - \lambda_t \Delta t + o(\Delta t), m = 0 \\ \lambda_t \Delta t + o(\Delta t), m = 1 \\ o(\Delta t), m > 1 \end{cases} \quad (1)$$

其中, λ_t 表示 t 时刻跳跃过程的强度函数,满足如下均值回复过程:

$$d\lambda_t = \alpha(\bar{\lambda} - \lambda_t)dt + \eta dN_t \quad (2)$$

其中, $\bar{\lambda}$ 为 λ_t 的均值; α 为回复速度; η 为跳跃过程的波动率。

假设金融市场中有两种可连续交易的资产:无风险债券 $B(t)$ 和风险股票 $S(t)$ 。

无风险债券 $B(t)$ 的价格过程为

$$dB(t) = rB(t)dt \quad (3)$$

其中, r 为无风险债券利率,且 $r > 0$ 。

风险股票 $S(t)$ 假定服从如下 Hawkes 跳跃扩散模型:

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW_t + J_t dN_t) \quad (4)$$

其中, μ 和 σ 分别为风险股票的预期回报率和波动率; N_t 表示股票价格跳跃次数; J_t 表示 t 时刻跳跃大小。此外,假定跳跃大小服从正态分布,即 $J_t \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, 其中, μ_1 和 σ_1^2 是常数,分别表示期望和方差。

投资者在 $[0, T]$ 时间段内进行连续交易, T 为终端时刻。设 X_t 表示投资者在 $t \in [0, T]$ 时刻的总财富; π_t 表示控制策略,为时间 t 时实际投资于风险股票 $S(t)$ 的金额; $X_t - \pi_t$ 表示在时间 t 时投资于无风险债券 $B(t)$ 的金额,故总财富满足如下条件:

$$dX_t = (X_t - \pi_t) \frac{dB(t)}{B(t)} + \pi_t \frac{dS(t)}{S(t)} = (rX_t + \pi_t(\mu - r))dt + \pi_t \sigma dW_t + \pi_t J_t dN_t \quad (5)$$

定义 1 (可允许策略) 对于任意一个固定的 $t \in [0, T]$, 一个交易策略 $\pi = \{\pi_t\}_{t \in [0, T]}$ 如果满足下列条件,则可称为可允许策略:

(1) π 是 $\mathcal{F}$ 可测的;

(2) 对所有 $t \in [0, T]$, 有 $\mathbb{E} \left[\int_0^T \pi_t^2 dt \right] < +\infty$;

(3) (X_t, π) 是式 (5) 的唯一解。

假定投资者目标选择投资策略 π , 使终端时刻 T 的总财富贴现期望效用最大化,因此,值函数 $V(t, X_t, \lambda_t)$ 满足:

$$V(t, X_t, \lambda_t) = \max_{\pi_t} \mathbb{E} \left[e^{-\beta(T-t)} U(X_T) | \mathcal{F}_t \right] \quad (6)$$

其中, $\mathbb{E}[\cdot | \mathcal{F}]$ 为条件期望; β 为贴现率; $U(\cdot)$ 为效用函数。

2 最优投资策略

假设投资者的效用函数为指数效用,满足如下条件:

$$U(x) = -e^{-\gamma x} / \gamma, \gamma > 0 \quad (7)$$

其中, γ 表示风险厌恶系数。

为解决式 (6), 首先利用动态规划原理推导出相应 HJB 方程。对值函数 $V(t, X_t, \lambda_t)$ 应用 Itô 公式:

$$dV(t, X_t, \lambda_t) = V_t dt + V_x dX_t + V_\lambda d\lambda_t + \frac{1}{2} V_{xx} dX_t dX_t + (\bar{V} - V) dN_t \quad (8)$$

其中, $V = V(t, X_t, \lambda_t)$, 而 $V_t, V_x, V_\lambda, V_{xx}$ 分别表示 V 关于变量 t, X_t, λ_t 的一阶和二阶导数; $\bar{V}$ 为跳跃后的值函数,满足

$$\bar{V} = V(t, X_t + \pi_t J_t, \lambda_t + \eta) \quad (9)$$

由动态规划原理和式 (6) 可得 HJB 方程:

$$0 = V_t + rV_x X_t + V_\lambda \alpha(\bar{\lambda} - \lambda_t) + \max_{\pi_t} \left[V_x \pi_t (\mu - r) + \frac{1}{2} V_{xx} \pi_t^2 \sigma^2 + \lambda_t \mathbb{E}[\bar{V} - V] \right] \quad (10)$$

且终端条件 $V(T, X_T, \lambda_T) = U(x)$, 再根据其一阶最优条件可推导出最优投资策略 π_t^* 为

$$\pi_t^* = \arg \max_{\pi_t} \left[V_X \pi_t (\mu - r) + \frac{1}{2} V_{XX} \pi_t^2 \sigma^2 + \lambda_t \mathbb{E}[\bar{V} - V] \right] \quad (11)$$

其中, $\arg \max_{\pi_t}[\cdot]$ 表示满足式(11)括号内最大的 π 。

由于效用函数为指数效用, 因此假设值函数 $V(t, X_t, \lambda_t)$ 满足如下仿射结构:

$$V(t, X_t, \lambda_t) = -\frac{1}{\gamma} e^{H(t,T)X_t} g(t, \lambda_t) \quad (12)$$

其中, $g(t, \lambda_t)$ 是关于 t 和 λ_t 的函数。为便于计算, 接下来分别用 H 、 g 和 V 表示 $H(t, T)$ 、 $g(t, \lambda_t)$ 和 $V(t, X_t, \lambda_t)$ 。

式(12)两边分别对变量 t, X_t, λ_t 求偏导:

$$\begin{cases} V_t = -\frac{1}{\gamma} g H_t X_t e^{H(t,T)X_t} - \frac{1}{\gamma} g_t e^{H(t,T)X_t} \\ V_X = -\frac{1}{\gamma} e^{H(t,T)X_t} g H(t, T) = HV \\ V_{XX} = -\frac{1}{\gamma} e^{H(t,T)X_t} g H^2(t, T) = H^2 V \\ V_\lambda = -\frac{1}{\gamma} e^{H(t,T)X_t} g_\lambda \end{cases} \quad (13)$$

根据式(9)和式(12)可知 $\bar{V}$ 满足

$$\bar{V} = -\frac{1}{\gamma} e^{H(t,T)(X_t + \pi_t J_t)} g(t, \lambda_t + \eta) \quad (14)$$

将式(13)和(14)代入 HJB 方程式(10), 则可重新表达为

$$\begin{aligned} 0 = \max_{\pi_t} & \left\{ HV(\mu - r)\pi_t + \frac{1}{2} \pi_t^2 \sigma^2 H^2 V + \right. \\ & \left. \lambda_t \mathbb{E} \left[-\frac{1}{\gamma} e^{H(X_t + \pi_t J_t)} g(t, \lambda_t + \eta) - V \right] \right\} - \\ & \frac{1}{\gamma} e^{HX_t} g H_t X_t - \frac{1}{\gamma} e^{HX_t} g_t + r H V X_t - \\ & \frac{1}{\gamma} e^{HX_t} g_\lambda \alpha(\bar{\lambda} - \lambda_t) \end{aligned} \quad (15)$$

再通过一阶最优条件可得 π_t^* 满足

$$\pi_t^* = \arg \min_{\pi_t} D(\pi_t, g(t, \lambda_t)) \quad (16)$$

其中,

$$D(\pi_t, g(t, \lambda_t)) = H \pi_t (\mu - r) + \frac{1}{2} \pi_t^2 \sigma^2 H^2 +$$

$$\lambda_t \frac{g(t, \lambda_t + \eta)}{g(t, \lambda_t)} \mathbb{E} [e^{H \pi_t J_t} - 1] \quad (17)$$

将 π_t^* 和式(12)代入 HJB 方程(15), 可得

$$\begin{aligned} 0 = & -\frac{1}{\gamma} e^{HX_t} g X_t [H_t + rH] - \frac{1}{\gamma} e^{HX_t} \times \\ & [\lambda_t (g(t, \lambda_t + \eta) - g(t, \lambda_t)) + \\ & D(\pi_t^*, g(t, \lambda_t)) g + g_t + g_\lambda \alpha(\bar{\lambda} - \lambda_t)] \end{aligned} \quad (18)$$

通过将式(18)分离变量可得如下两个方程:

$$0 = -\frac{1}{\gamma} e^{HX_t} g X_t (H_t + rH) \quad (19)$$

$$0 = D(\pi_t^*, g(t, \lambda_t)) g + g_t + g_\lambda \alpha(\bar{\lambda} - \lambda_t) + \lambda_t (g(t, \lambda_t + \eta) - g(t, \lambda_t)) \quad (20)$$

根据终端条件 $V(T, X_T, \lambda_T) = U(x)$ 和式(12)

可知 $H(T, T) = -\gamma$, 再结合式(19)可得:

$$H(t, T) = -\gamma e^{r(T-t)} \quad (21)$$

定义无穷小算子 $\{\mathcal{A}g\}(t, \lambda_t)$ 如下:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{A}g\}(t, \lambda_t) = & g_t + g_\lambda \alpha(\bar{\lambda} - \lambda_t) + \\ & \lambda_t (g(t, \lambda_t + \eta) - g(t, \lambda_t)) \end{aligned} \quad (22)$$

此外, 令

$$J(t, g(t, \lambda_t)) = D(\pi_t^*(t), g(t, \lambda_t)) g \quad (23)$$

则由式(20)可知函数 $g(t, \lambda_t)$ 满足

$$\{\mathcal{A}g\}(t, \lambda_t) + J(t, g(t, \lambda_t)) = 0 \quad (24)$$

再通过 Feynman-Kac 式, 可得 $g(t, \lambda_t)$ 满足

$$g(t, \lambda_t) = \mathbb{E} \left[\int_t^T J(s, g(s, \lambda_s)) ds | \mathcal{F}_t \right] \quad (25)$$

3 迭代收敛和数值方法

由于 Hawkes 过程的复杂性, 无法直接计算出式(25)中的 $g(t, \lambda_t)$, 从而无法求得最优投资策略的解析解, 所以本节采用 Liu 等^[18]的迭代数值计算方法得到 $g(t, \lambda_t)$ 的数值解。首先介绍 $g(t, \lambda_t)$ 迭代格式, 之后运用 Banach 不动点定理证明其迭代格式的收敛性, 即式(25)的解具有存在性和唯一性。再在第4章节中, 采用格点法利用 MATLAB 给出值函数和最优投资策略的数值解。

将式(25)中 $g(t, \lambda_t)$ 的解写成迭代格式 $\{g^{(n)}\}$,

对于 $n = 0, 1, \dots$ 有

$$\begin{aligned} g^{(0)} &= 1 \\ g^{(n+1)}(t, \lambda_t) &= \mathbb{E} \left[\int_t^T J(s, g^{(n)}(s, \lambda_s)) ds | \mathcal{F}_t \right] \end{aligned} \quad (26)$$

根据 Banach 不动点定理, 选择引入一个作用于函数 $g(t, \lambda_t)$ 的算子 $\mathcal{L}$, 如可证明算子 $\mathcal{L}$ 为压缩映射, 即证明式 (25) 的解具有存在性和唯一性。

定义一个作用于函数 $g(t, \lambda_t)$ 的算子 $\mathcal{L}$:

$$(\mathcal{L}g)(t, \lambda_t) = \mathbb{E} \left[\int_t^T J(s, g(s, \lambda_s)) ds | \mathcal{F}_t \right] \quad (27)$$

则式 (25) 的解变为

$$(\mathcal{L}g)(t, \lambda_t) = g(t, \lambda_t) \quad (28)$$

引理 1 由于算子 $\mathcal{L}$ 有界, 则存在正整数 a 和 b 满足:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}g)(t, \lambda_t) &< a \\ (\mathcal{L}g)(t, \lambda_t) &> b \end{aligned} \quad (29)$$

证明 因效用函数具有指数效用, 则根据式 (6) 可知值函数 $V(t, X_t, \lambda_t)$ 有界, 即 $V(t, X_t, \lambda_t) = -e^{H(t, T)X_t} g(t, \lambda_t) / \gamma$ 为有界, 又因 $H(t, T) = -\gamma e^{r(T-t)}$ 有界, 可得 $g(t, \lambda_t)$ 有界。设存在正常数 M , 使得 $g(t, \lambda_t) \leq M$ 。

由式 (17) 可得 $D(\pi_t^*, g(t, \lambda_t))$ 满足

$$\begin{aligned} D(\pi_t^*, g(t, \lambda_t)) &= H\pi_t^*(\mu - r) + \lambda_t \frac{g(t, \lambda_t + \eta)}{g(t, \lambda_t)} \times \\ &\quad \mathbb{E} \left[e^{H\pi_t^* J_t} - 1 \right] + \frac{1}{2} H^2 (\pi_t^*)^2 \sigma^2 \end{aligned} \quad (30)$$

则在给定参数值和 $g(t, \lambda_t)$ 有界性的条件下, $D(\pi_t^*, g(t, \lambda_t))$ 同样有界, 因此不妨设存在正常数 N , 使得 $D(\pi_t^*, g(t, \lambda_t)) \leq N$, 故结合式 (23) 有

$$J(t, g(t, \lambda_t)) = D(\pi_t^*(t), g(t, \lambda_t))g \leq MN \quad (31)$$

所以

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}g)(t, \lambda_t) &= \mathbb{E} \left[\int_t^T J(s, g(s, \lambda_s)) ds | \mathcal{F}_t \right] \leq \\ &\quad \mathbb{E} \left[\int_t^T MN ds | \mathcal{F}_t \right] \end{aligned} \quad (32)$$

因为 $\int_t^T MN ds = MN(T-t)$, 令 $a = MN(T-t)$, 则由式 (32) 可得 $(\mathcal{L}g)(t, \lambda_t) < a$ 。

同理, 根据 $g(t, \lambda_t)$ 的有界性, 存在正常数 M_1 , 有 $g(t, \lambda_t) \geq M_1$ 。又因 $D(\pi_t^*(t), g(t, \lambda_t))$ 有界, 于是存在正常数 N_1 , 有 $D(\pi_t^*, g(t, \lambda_t)) \geq -N_1$ 。

则

$$\begin{aligned} J(t, g(t, \lambda_t)) &= \\ D(\pi_t^*(t), g(t, \lambda_t))g &\geq -M_1 N_1 \end{aligned} \quad (33)$$

结合式 (23) 和式 (33) 有

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}g)(t, \lambda_t) &= \mathbb{E} \left[\int_t^T J(s, g(s, \lambda_s)) ds | \mathcal{F}_t \right] \geq \\ &\quad \mathbb{E} \left[\int_t^T (-M_1 N_1) ds | \mathcal{F}_t \right] \end{aligned} \quad (34)$$

再根据 $\int_t^T (-M_1 N_1) ds = M_1 N_1(t-T)$, 令 $b = M_1 N_1 \times (t-T)$, 则由式 (34) 可得 $(\mathcal{L}g)(t, \lambda_t) > b$ 。

由 Banach 不动点定理可知, 如需证明 $\mathcal{L}$ 是一个压缩映射, 则需要验证在 $\mathcal{L}$ 的作用下, 任意两点间的距离能够被某个压缩系数控制, 所以令任意两个函数 $f(t, \lambda_t)$ 和 $h(t, \lambda_t) \in [0, T] \times (0, \infty)$ (为表述方便, 分别用 f, h 表示 $f(t, \lambda_t), h(t, \lambda_t)$), 假定 $d(f, h)$ 为它们之间的距离, 则需证明存在 $\delta \in (0, 1)$, 使得 $d(\mathcal{L}f, \mathcal{L}h) \leq \delta d(f, h)$ 。

$$d(f, h) = \sup_{(t, \lambda_t) \in [0, T] \times (0, \infty)} \left| e^{-\alpha(T-t)} (f(t, \lambda_t) - h(t, \lambda_t)) \right| \quad (35)$$

则结合式 (27) 可得 $d(\mathcal{L}f, \mathcal{L}h)$ 的表达式为

$$\begin{aligned} d(\mathcal{L}f, \mathcal{L}h) &= \sup_{(t, \lambda_t)} \left| e^{-\alpha(T-t)} (\mathcal{L}f - \mathcal{L}h) \right| = \\ &\quad \sup_{(t, \lambda_t)} \left| e^{-\alpha(T-t)} \mathbb{E} \left[\int_t^T (J(s, f(s, \lambda_s)) - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. J(s, h(s, \lambda_s)) \right) ds | \mathcal{F}_t \right] \right| \end{aligned} \quad (36)$$

再由式 (23) 可得:

$$\begin{aligned} d(\mathcal{L}f, \mathcal{L}h) &= \sup_{(t, \lambda_t)} \left| e^{-\alpha(T-t)} \mathbb{E} \left[\int_t^T \left[fD(\pi_s^f, f(s, \lambda_s)) - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. hD(\pi_s^h, h(s, \lambda_s)) \right] ds | \mathcal{F}_t \right] \right| \end{aligned} \quad (37)$$

其中, $f(s, \lambda_s)$ 和 $h(s, \lambda_s)$ 中的 π_s^f 和 π_s^h 分别对应于 f 和 h 的最优策略。通过分析发现, 如直接运用式 (35) 和 (37) 证明 $d(\mathcal{L}f, \mathcal{L}h) \leq \delta d(f, h)$ 存在较大的计算复杂度。因此接下来参考 Liu 等^[18]的方法, 运用微分中值定理对式 (37) 进行数学变换和简化处理来降低证明过程的复杂性。

引理 2 定义在 $[0, T] \times (0, \infty)$ 上两个函数 $f(t, \lambda_t), h(t, \lambda_t)$ 存在有界函数 $\Phi(y)$, 使得 $fD(\pi_t^f, f) - hD(\pi_t^h, h)$ 满足

$$fD(\pi_t^f, f) - hD(\pi_t^h, h) = (f - h)\Phi(y) \quad (38)$$

证明 由式 (17) 可得, 对于 $l \in (f, h)$, $D(\pi_t^l, l)$ 的表达式满足

$$D(\pi_t^l, l) = (\mu - r)\pi_t^l H + \frac{1}{2} H^2 (\pi_t^l)^2 \sigma^2 +$$

$$\lambda_t \frac{l(t, \lambda_t + \eta)}{l(t, \lambda_t)} \mathbb{E} \left[e^{H\pi_t^f J_t} - 1 \right] \quad (39)$$

此外, 因为跳跃大小服从正态分布 $J_t \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, 则可得到 $\mathbb{E}[e^{H\pi_t^f J_t}]$ 的表达式为

$$\mathbb{E} \left[e^{H\pi_t^f J_t} \right] = e^{\mu_1 H \pi_t^f + \frac{1}{2} (H \pi_t^f)^2 \sigma_1^2}, l = f, h \quad (40)$$

令 $x_t = \pi_t^f H$, $\bar{l} = l(t, \lambda_t + \eta)$, 其中, $l \in (f, h)$, 将式 (40) 代入式 (39) 可得

$$D(\pi_t^f, l) = x_t(\mu - r) + \frac{1}{2} x_t^2 \sigma^2 + \lambda_t \frac{\bar{l}}{l} \left(e^{\mu_1 x_t + x_t^2 \sigma_1^2 / 2} - 1 \right) \quad (41)$$

由式 (41) 可得 $fD(\pi_t^f, f) - hD(\pi_t^h, h)$ 表达式为

$$\begin{aligned} fD(\pi_t^f, f) - hD(\pi_t^h, h) &= f\bar{x}_f(\mu - r) + \\ &\frac{1}{2} f\bar{x}_f^2 \sigma^2 + \lambda_t \bar{f} \left(e^{\mu_1 \bar{x}_f + \bar{x}_f^2 \sigma_1^2 / 2} - 1 \right) - \\ &\left[h\bar{x}_h(\mu - r) + \frac{1}{2} h\bar{x}_h^2 \sigma^2 + \lambda_t \bar{h} \left(e^{\mu_1 \bar{x}_h + \bar{x}_h^2 \sigma_1^2 / 2} - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (42)$$

对函数 $y(t, \lambda_t) \in [0, T] \times (0, \infty)$, 令 $M(y) = yD \times (\pi_t^y, y)$, 则由式 (41) 可得

$$\begin{aligned} M(y) &= yx_y(\mu - r) + \frac{1}{2} yx_y^2 \sigma^2 + \\ &\lambda_t \bar{y} \left(e^{\mu_1 x_y + x_y^2 \sigma_1^2 / 2} - 1 \right) \end{aligned} \quad (43)$$

其中, x_y 是关于 y 的函数, $\bar{y} = y(t, \lambda_t + \eta)$, 且满足 $\pi_t^y = \arg \min_{\pi_t} D(\pi_t, y(t, \lambda_t))$ 。则式 (42) 可化简为

$$fD(\pi_t^f, f) - hD(\pi_t^h, h) = M(f) - M(h) \quad (44)$$

根据微分中值定理, 存在 f 和 h 之间的 ξ , 则

$$M(f) - M(h) = (f - h) \frac{dM(y)}{dy} \Big|_{y=\xi} \quad (45)$$

因此只需求出 $dM(y)/dy$ 表达式即可证明引理 2。由式 (43) 可知, $dM(y)/dy$ 满足

$$\begin{aligned} \frac{dM(y)}{dy} &= (\mu - r) \left(x_y + y \frac{dx_y}{dy} \right) + \frac{1}{2} x_y^2 \sigma^2 + \\ &\lambda_t \left(e^{\mu_1 x_y + x_y^2 \sigma_1^2 / 2} - 1 \right) \frac{d\bar{y}}{dy} + \left[\sigma^2 yx_y + \right. \\ &\left. \lambda_t \bar{y} (\mu_1 + \sigma_1^2 x_y) e^{\mu_1 x_y + x_y^2 \sigma_1^2 / 2} \right] \frac{dx_y}{dy} \end{aligned} \quad (46)$$

由于 x_y 是关于 y 的函数, 结合 $\pi_t^y = \arg \min_{\pi_t} D \times (\pi_t, y(t, \lambda_t))$ 和式 (41) 可知, $D(\pi_t^y, y)$ 关于 π_t^y 求导等于 0, 即

$$0 = (\mu - r) + x_y \sigma^2 +$$

$$\lambda_t \frac{\bar{y}}{y} (\mu_1 + \sigma_1^2 x_y) e^{\mu_1 x_y + x_y^2 \sigma_1^2 / 2} \quad (47)$$

令 $m = \mu_1 x_y + x_y^2 \sigma_1^2 / 2$, 将式 (47) 两边同时乘以 y , 然后关于 y 求导可得

$$\begin{aligned} 0 &= (\mu - r) + x_y \sigma^2 + \sigma^2 y \frac{dx_y}{dy} + \lambda_t \frac{d\bar{y}}{dy} (\mu_1 + \sigma_1^2 x_y) \times \\ &e^m + \lambda_t \bar{y} e^m \left[(\mu_1 + \sigma_1^2 x_y)^2 + \sigma_1^2 \right] \frac{dx_y}{dy} \end{aligned} \quad (48)$$

所以 dx_y / dy 表达式为

$$\frac{dx_y}{dy} = - \frac{(\mu - r) + x_y \sigma^2 + \lambda_t \frac{d\bar{y}}{dy} (\mu_1 + \sigma_1^2 x_y) e^m}{\sigma^2 y + \lambda_t \bar{y} e^m \left[(\mu_1 + \sigma_1^2 x_y)^2 + \sigma_1^2 \right]} \quad (49)$$

$y(t, \lambda_t)$ 是关于 t 和 λ_t 的函数, 假定 $y(t, \lambda_t) = e^{A(t, T) + B(t, T)\lambda_t}$, 由 $\bar{y} = y(t, \lambda_t + \eta)$ 可得 $\bar{y}$ 满足

$$\bar{y} = e^{A(t, T) + B(t, T)(\lambda_t + \eta)} = ye^{B(t, T)\eta} \quad (50)$$

故由式 (50) 可得 $d\bar{y} / dy = e^{B(t, T)\eta}$ 有界。令 $\Phi(y) = dM(y) / dy$, 由式 (44) 和 (45) 可得 $fD(\pi_t^f, f) - hD(\pi_t^h, h) = (f - h)\Phi(y)$, 即式 (38) 成立。此外, 当 y 取值为 ξ 时, 有 $x \in (x_f, x_h)$ 且 $d\bar{y} / dy$ 有界, 由式 (49) 可得 dx_y / dy 有界, 结合式 (46)、(49) 和 (50) 可知 $|\Phi(y)|$ 有界。

因 $|\Phi(y)|$ 有界, 则假定存在正数 c , 因此可得 $|\Phi(y)| < c$ 。接着将式 (38) 代入式 (37) 的 $d(\mathcal{L}f, \mathcal{L}h)$ 中, 即证明算子 $\mathcal{L}$ 为压缩映射。

定理 1 对于映射 $\mathcal{L}: [0, T] \times (0, \infty) \rightarrow [0, T] \times (0, \infty)$, 对任意两个函数 $f(t, \lambda_t)$ 和 $h(t, \lambda_t) \in [0, T] \times (0, \infty)$, 定义距离 $d(f, h)$ 满足式 (35), 则当 $\alpha > c$ 时, $\mathcal{L}$ 是一个压缩映射。

证明 根据引理 2, 式 (37) 可重新表达为

$$\begin{aligned} d(\mathcal{L}f, \mathcal{L}h) &= \sup_{(t, \lambda_t)} \left| e^{-\alpha(T-t)} \mathbb{E} \left[\int_t^T \left[fD(\pi_s^f, f) - \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. hD(\pi_s^h, h) \right] ds \middle| \mathcal{F}_t \right] \right| = \sup_{(t, \lambda_t)} \left| e^{-\alpha(T-t)} \times \right. \\ &\left. \mathbb{E} \left[\int_t^T \left[(f - h)\Phi(x_y) \right] ds \middle| \mathcal{F}_t \right] \right| \end{aligned} \quad (51)$$

根据式 (35), 对任意 $s \in [0, T]$, 有 $e^{-\alpha(T-s)} \times (f - h) \leq d(f, h)$, 则式 (51) 变为

$$\begin{aligned} d(\mathcal{L}f, \mathcal{L}h) &\leq e^{-\alpha(T-t)} d(f, h) \times \\ &\left| \mathbb{E} \left[\int_t^T e^{\alpha(T-s)} \Phi(x_y) ds \middle| \mathcal{F}_t \right] \right| \leq \end{aligned}$$

$$d(f, h) \mathbb{E} \left[\int_t^T e^{-\alpha(s-t)} |\Phi(x_y)| ds \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (52)$$

由于 $\int_t^T e^{-\alpha(s-t)} ds = \frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha} \leq \frac{1}{\alpha}$, 且 $|\Phi(x_y)| < c$, 则式(52)可化简为

$$d(\mathcal{L}f, \mathcal{L}h) \leq \frac{c}{\alpha} d(f, h) \quad (53)$$

令 $\delta = c/\alpha$, 当 $\alpha > c$ 时, $\delta \in (0, 1)$, 则 $d(\mathcal{L}f, \mathcal{L}h) \leq \delta d(f, h)$, 由此证明 $\mathcal{L}$ 为压缩映射。

由此可见, 结合引理 2 和定理 1, 运用 Banach 不动点定理证明了 $g(t, \lambda_t)$ 迭代格式的收敛性。

4 数值分析

假设对所有 t 和 λ_t 有初始值 $g^{(0)} = 1$, 令 $g(t, \lambda_t)$ 的迭代格式为 $g^{(n+1)} = \mathcal{G}(g^{(n)})$, 且有

$$\mathcal{G}(g) = \mathbb{E} \left[\int_t^T J(s, g(s, \lambda_s)) ds \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

运用网格法, 采用格点依次近似模拟出跳跃过程 λ_t 、 $H(t, T)$ 和 $J(s, g(s, \lambda_s))$ 对应的网格值, 结合迭代格式最后模拟出 $g^{(n)}$ 的数值, 重复之前步骤, 直至 $g^{(n)}$ 收敛到每一个网格点。

为进行数值分析, 本节假设股票价格跳跃的大小遵循期望 $\mu_1 = 0.2$, 方差 $\sigma_1^2 = 0.04$ 的正态分布。设初始财富水平为 1 个单位, 并将投资时间段 $[0, T]$ 的期限设为 10 a, 即 $T = 10$ 。其他参数值参考文献[18], 具体模型参数值见表 1。

表 1 模型参数值

参数	数值	参数	数值
T	10	β	0.8
r	0.02	α	19.91
μ	0.05	$\bar{\lambda}$	0.48
σ	0.2	μ_1	0.2
γ	8	σ_1	0.2
η	0.1		

4.1 值函数

图 1 和图 2 为值函数 $V(t, X_t, \lambda_t)$ 随着跳跃强度 λ_t 和时间 t 变化的情况(图 2 横坐标取值范围为 0~10 a)。通过对比不同初始时间和不同跳跃强度, 可以发现值函数与时间呈负相关。随着时间 t 增加, 剩余时间 $T-t$ 减少, 意味着财富水平增长的时间变少, 进而导致值函数减少。另外, 值函数与跳跃强度呈正相关, 在图 2 中能明显看出有价格跳跃后

的值函数大于没有价格跳跃时的值函数。此外, 观察图 1 可发现 λ_t 取值处于区间 $[0, 1]$ 时, 值函数增长幅度较小且速率较慢; 而当 $\lambda_t \geq 1$ 时, 值函数的增长速率显著加快。这就意味着当 Hawkes 过程的跳跃强度较小时, 投资者基于风险收益权衡, 倾向于将资金配置于无风险债券以获取收益; 而随着风险股票价格跳跃强度的增大, 投资者选择将更多财富配置到风险股票上, 以获得更高的预期收益。

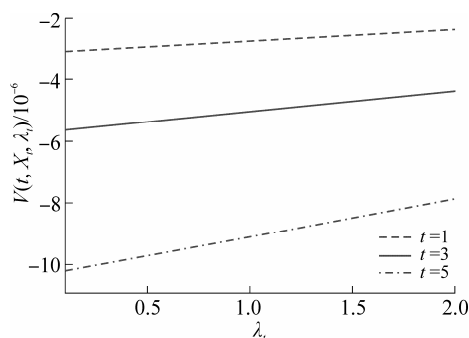


图 1 不同初始跳跃强度情形下的值函数

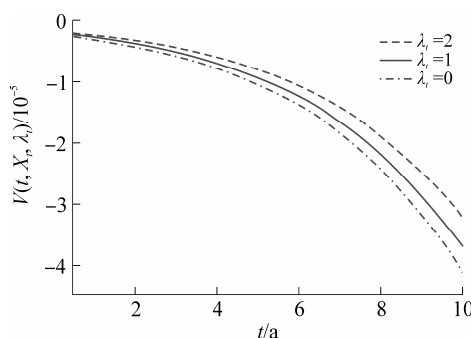


图 2 不同初始时间情形下的值函数

4.2 最优投资策略

将两种不同初始跳跃强度和无价格跳跃($\lambda_t = 0$)情况进行对比分析, 如图 3 所示, 可以发现随着跳跃强度的增加, 最优投资策略 π_t 不仅增加, 而且增长速度也随之加快。这是因为跳跃强度越大, 风险资产收益会越高, 因此投资者基于对风险与收

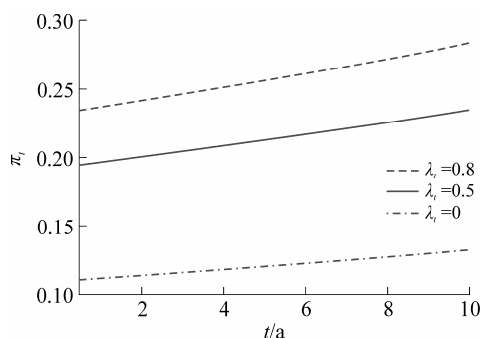


图 3 不同初始时间情形下的最优投资策略

益的综合考虑,会倾向于将更多财富配置到风险股票中以谋求高收益。

如图4所示,随着无风险利率 r 的增加,最优投资策略 π_t 呈现显著下降趋势;此外,最优投资策略会小幅增加,但整体波动幅度偏小。因为与无风险资产相比,风险股票虽能带来更高的潜在收益,但同时伴随着风险。在无风险资产利率较低时,投资者为追求更高收益,愿意承担一定风险去投资风险资产。然而当无风险资产利率上升后,风险资产的相对吸引力下降,投资者更倾向于将资金分配到无风险资产上,从而减少对风险资产的投资,导致最优投资策略中对风险资产的配置比例减小。

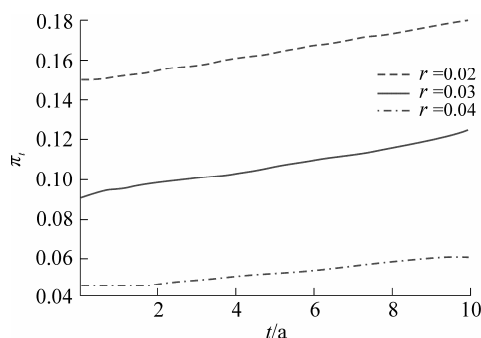


图4 无风险利率对最优投资策略的影响

由图5可知,随着波动率 σ 的增加,最优投资策略 π_t 值减小。这是因为波动率 σ 直接反映了风险资产的价格波动幅度,波动率增加意味着股票价格风险增大,会加剧投资者的损失厌恶心理,投资者自然会选择降低对风险资产股票的投资,从而导致其减少股票配置比例。

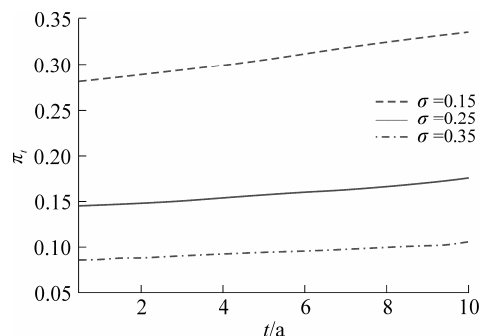


图5 风险资产波动率对最优投资策略的影响

由图6可知,风险资产的跳跃幅度对最优投资策略有显著影响。 μ_1 作为风险资产价格跳跃大小的期望值,反映了风险资产价格跳跃的平均水平。对比图6中 $\mu_1 = 0.1$ 和 $\mu_1 = 0.2$ 时的最优投资策略值可以发现,当跳跃期望降低时,风险资产收益的吸引

力下降,投资者倾向于增加无风险资产的配置。虽然跳跃期望的增加会使最优投资策略值增大,但是 μ_1 过大会导致强度函数 λ_t 因自激效应而迅速增长,使模型不收敛,也就意味着过高的 μ_1 会导致市场存在无限套利机会。因此,当跳跃大小的期望值 $\mu_1 = 0.2$ 时,风险资产的风险和收益达到了一个相对平衡的状态,投资者可以在承担一定风险前提下,获得相对较高的预期收益。

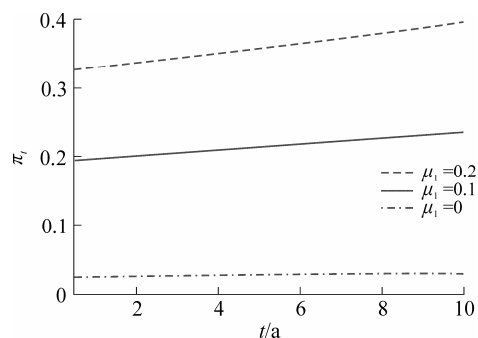


图6 跳跃大小的期望值对最优投资策略的影响

5 结论

本文假设风险资产价格满足Hawkes跳跃扩散模型,首先建立了最终财富期望效用最大化的数学模型,运用动态规划原理得到了对应的Hamilton-Jacobi-Bellman方程,再得到指数效用下最优策略的解析解。为解决由Hawkes跳跃的复杂性无法直接得到解析解的问题,通过Banach不动点定理证明了方程解的唯一性,之后再运用网格法进行迭代得到值函数和最优策略的数值解。另外,通过数值结果发现风险资产价格的跳跃强度和跳跃大小幅度对值函数与最优投资策略都有显著影响。然而,本文只考虑了投资风险资产股票和无风险资产,后续可以进一步研究Hawkes过程下含违约风险债券的最优投资策略问题。

参考文献:

- [1] MARKOWITZ H. Portfolio selection[J]. The journal of finance, 1952, 7(1):77-91.
- [2] MERTON R C. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model[J]. Journal of economic theory, 1971, 3(4):373-413.
- [3] BRANGER N, LARSEN L S. Robust portfolio choice with uncertainty about jump and diffusion risk[J]. Journal of banking & finance, 2013, 37(12):5036-5047.

- [4] WANG P Q, RONG X M, ZHAO H, et al. Robust optimal investment and benefit payment adjustment strategy for target benefit pension plans under default risk[J]. *Journal of computational and applied mathematics*, 2021, 391: 113382.
- [5] AFHAMI B, REZAPOUR M, MADADI M, et al. A comonotonic approximation to optimal terminal wealth under a multivariate Merton model with correlated jump risk[J]. *Applied mathematics and computation*, 2023, 444: 127808.
- [6] AÏT-SAHALIA Y, MATTHYS F. Robust consumption and portfolio policies when asset prices can jump[J]. *Journal of economic theory*, 2019, 179:1-56.
- [7] LIU H, YONG J, ZHOU X Y. Optimal consumption and portfolio policies with habit formation and a jump-diffusion model[J]. *Applied mathematics & optimization*, 2011, 63(1):1-36.
- [8] WEI P Y, YANG C, ZHUANG Y. Robust consumption and portfolio choice with derivatives trading[J]. *European journal of operational research*, 2023, 304(2):832-850.
- [9] JOSA-FOMBELLIDA R, LÓPEZ-CASADO P. Optimal investment and benefit strategies for a target benefit pension plan where the risky assets are jump diffusion processes[J]. *Insurance mathematics and economics*, 2025, 121:100-110.
- [10] ZHANG H W, DANG D M. A monotone numerical integration method for mean variance portfolio optimization under jump-diffusion models[J]. *Mathematics and computers in simulation*, 2024, 219:112-140.
- [11] HAWKES A G. Spectra of some self-exciting and mutually exciting point processes[J]. *Biometrika*, 1971, 58(1):83-90.
- [12] HAWKES A G. Hawkes processes and their applications to finance: a review[J]. *Quantitative finance*, 2018, 18(2): 193-198.
- [13] ERRAIS E, GIESECKE K, GOLDBERG L R. Affine point processes and portfolio credit risk[J]. *SIAM journal on financial mathematics*, 2010, 1(1):642-665.
- [14] AÏT-SAHALIA Y, CACHO-DIAZ J, LAEVEN R J A. Modeling financial contagion using mutually exciting jump processes[J]. *Journal of financial economics*, 2015, 117(3):585-606.
- [15] STABILE G, TORRISI G L. Risk processes with non-stationary Hawkes claims arrivals[J]. *Methodology and computing in applied probability*, 2010, 12(3):415-429.
- [16] MA Y, SHRESTHA K, XU W D. Pricing vulnerable options with jump clustering[J]. *The journal of futures markets*, 2017, 37(12):1155-1178.
- [17] AÏT-SAHALIA Y, HURD T R. Portfolio choice in markets with contagion[J]. *Journal of financial economics*, 2016, 14(1):1-28.
- [18] LIU G, JIN Z, LI S M. Household lifetime strategies under a self-contagious market[J]. *European journal of operational research*, 2021, 288(3):935-952.

Optimal investment strategies portfolio under the Hawkes jump-diffusion model

JIA Muzhen, WANG Wei

(School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: This paper studies the optimal asset allocation of investors between stock and money market accounts. The price dynamics of risky assets are assumed to follow a Hawkes jump diffusion model, and the jump sizes satisfy a normal distribution. Aiming to maximize the utility of terminal wealth, the corresponding Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equation is constructed using the stochastic dynamic programming method. The implicit solution of the value function is obtained via the Feynman-Kac formula. Furthermore, the convergence of the optimal investment strategy is rigorously proven using the Banach fixed-point theorem. Finally, the analytical solution of the optimal investment strategy is derived through an iterative convergent numerical method. The numerical results show that the self-exciting property of the Hawkes jump diffusion model has a significant impact on the optimal investment strategy.

Keywords: Hawkes jump diffusion; dynamic programming; optimal investment; iterative convergence

(责任编辑 章践立)