

DOI: 10.20098/j.cnki.1001-5132.2025.0604

基于观测器的状态约束 Hamilton 系统的输出调节

周 粤, 徐 松*

(宁波大学 数学与统计学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 针对具有状态约束的 Hamilton 系统的鲁棒输出调节问题, 提出了一种基于观测器的输出调节方法。利用内模原理和障碍存储函数 (BSF) 方法, 给出了系统 BSF 存在的充分条件, 所得到的调节器在保证闭环系统满足状态约束条件的同时, 解决系统输出调节问题。该方法能保持 Hamilton 系统耗散结构, 将系统鲁棒输出调节问题转化为镇定问题, 从而避免求解调节器方程和 Hamilton-Jacobi-Isaacs 不等式。数值仿真结果表明该方法具有有效性。

关键词: 状态约束; Hamilton 系统; 输出调节; 障碍存储函数

中图分类号: O211.9

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2026) 02-0113-08

Observer-based output regulation of state-constrained Hamiltonian systems

ZHOU Yue, XU Song*

(School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: An observer-based output regulation method is proposed for the robust output regulation problem of state-constrained Hamiltonian system. Using the internal model principle and the barrier storage function (BSF) method, a sufficient condition for the existence of the BSF of the system is given, and the proposed regulator solves the output regulation problem of the closed-loop system while guaranteeing that the closed-loop system satisfies the state constraints. The method maintains the dissipative structure of the Hamiltonian system and transforms the robust output regulation problem into a stabilization problem, thus avoiding the need to solve the regulator equations and the Hamilton-Jacobi-Isaacs inequality. Numerical simulation results demonstrate the effectiveness of this output regulation method.

Keywords: state constraint; Hamiltonian system; output regulation; barrier storage function

在控制系统设计中, 除了确保系统的稳定性和性能优化外, 通常还需要考虑系统在运行过程中满足一系列物理和环境约束条件。例如, 机械臂在实际使用时必须从原始位置启动, 其性能受初始状态条件的影响较大^[1]; 服务航天器执行任务过程中受到空间环境的不确定干扰及自身能源限制等因素影响^[2]; 航行过程中海船的位置和速度受到最大行程的限制^[3]。如果在控制系统设计时未充分考虑这

些约束条件, 系统可能会失去稳定性, 甚至导致灾难性的事故发生^[4]。近年来, 控制系统的状态约束问题受到了广泛的关注^[5-8]。

针对具有状态约束的非线性控制问题, 基于控制 Lyapunov 函数 (CLF) 和障碍函数 (BF)^[8-14]的方法是解决此类问题的有效途径。文献[8-10]针对单输入单输出 (SISO) 非线性系统, 采用障碍 Lyapunov 函数 (BLF) 方法设计了具有状态约束的

收稿日期: 2025-06-05

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journal.lg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金数学天元基金 (1226510)

第一作者: 周 粤, 硕士研究生, 主要研究方向为非线性控制。E-mail: 2311400067@nbu.edu.cn

*通信作者: 徐 松, 教授, 主要研究方向为非线性控制、随机控制。E-mail: xusong@nbu.edu.cn

稳定控制器。文献[13]提出了一种控制 Lyapunov 障碍函数 (CLBF) 方法, 用于解决状态约束下的镇定问题。文献[14]提出了一种新的障碍存储函数 (BSF) 方法, 解决了具有状态约束的非线性系统 L_2 增益控制问题。但上述方法均基于状态反馈, 而在实际应用中, 系统状态由于种种现实因素的限制, 往往难以直接测量和准确获取。

输出调节问题是控制理论中的一个基本问题, 除了确保闭环系统渐近稳定外, 还需要系统能够精确跟踪参考输入并有效抑制外部干扰^[15-17]。文献[18]研究了任意阶阻抗无源端口 Hamilton 系统的鲁棒输出调节。文献[19]利用状态反馈方法研究了带有正弦扰动的随机 Hamilton 系统的输出调节问题。文献[20]基于观测器方法和内模原理, 给出了含匹配干扰的随机 Hamilton 系统的输出调节方法。但上述研究均没有考虑 Hamilton 系统具有状态约束的情况。

基于上述考虑, 本文主要研究基于观测器的状态约束 Hamilton 系统鲁棒输出调节问题。首先, 基于观测器方法和内模原理, 将 Hamilton 系统的鲁棒输出调节问题转化为镇定问题; 其次, 构造出系统基于 Hamilton 函数的 BSF, 并给出其存在的充分条件, 保证系统满足状态约束条件; 最后, 对具有状态约束的 Hamilton 系统给出鲁棒调节器。数值实验表明所给出的输出调节方法具有有效性。

符号: ∂D 表示集合 D 的边界, D^c 表示集合 D 的补集, $\|\cdot\|$ 表示欧几里得范数, $\|x\|_M^2 = x^T M x$, $R > 0$ (≥ 0) 表示矩阵 R 正定 (半正定), $d(A, x) = \min_{y \in A} \|y - x\|$ 表示点 x 与集合 A 之间的最小距离, 若 $A = \{0\}$, 记 $B_D(\delta) = \{x \in D \mid d(0, x) = \|x\| < \delta\}$ 。

1 问题描述

考虑如下耗散 Hamilton 系统^[19]:

$$\begin{cases} \dot{x} = [J(x) - R(x)]\nabla H(x) + g(x)u + v + g_w(x)w \\ y = g_w^T(x)\nabla H(x) \\ z = r(x)g^T(x)\nabla H(x) \end{cases} \quad (1)$$

式中: $x \in \mathbb{R}^n$ 是系统状态; $J(x) = -J^T(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $0 \leq R(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $u \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入; $w \in \mathbb{R}^r$ 是外部干扰; $g(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 是连续且列满秩的; $g_w(x) \in \mathbb{R}^{n \times r}$ 是连续的; $y \in \mathbb{R}^r$ 是系统输出; $z \in \mathbb{R}^p$ 是罚信号; $r(x) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ 是列满秩加权矩阵; Hamilton 函数

$H(x)$ 二次可微, 且在 $x=0$ 处取极小值, $H(0)=0$; $\nabla H(x) = \partial H(x) / \partial x$; $v \in \mathbb{R}^n$ 是由如下外部系统产生的正弦干扰:

$$\begin{cases} \dot{\eta} = A\eta \\ v = -B\eta \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\eta \in \mathbb{R}^{2k}$ 是外部系统的状态; 常数矩阵 $A = \text{Diag}\{A_1, A_2, \dots, A_k\} \in \mathbb{R}^{2k \times 2k}$, $A_i = \begin{bmatrix} 0 & \omega_i \\ -\omega_i & 0 \end{bmatrix}$, $i=1, 2, \dots, k$, $\omega_i > 0$; $B \in \mathbb{R}^{n \times 2k}$ 是一个常数矩阵。

下面先给出系统状态约束相关定义。考虑如下仿射非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)w \\ z = h(x) \end{cases} \quad (3)$$

式中: $x \in \mathbb{R}^n$ 是系统状态; $w \in \mathbb{R}^s$ 是外部干扰; $z \in \mathbb{R}^p$ 是评价信号; $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 、 $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times s}$ 、 $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ 均为充分光滑的函数。

根据系统 (3) 的约束要求, 构造一个连续可微的函数 $m(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 。基于 $m(x)$, 定义系统状态约束相关的集合^[14]:

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid m(x) > 0\} \quad (4)$$

$$\partial D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid m(x) = 0\} \quad (5)$$

$$D(\delta) = \{x \in D \mid 0 < m(x) < \delta\} \quad (6)$$

其中 $m(0) > 0$, 且 $\exists x \in \mathbb{R}^n$, 使得 $m(x) = 0$, 即 $D \neq \emptyset$, $\partial D \neq \emptyset$ 。

具有状态约束的 Hamilton 系统 (1) 与外部系统 (2) 的鲁棒输出调节问题描述如下: 对于一个给定的干扰抑制水平 $\gamma > 0$, 设计一个基于观测器的调节器

$$\begin{cases} \dot{\phi} = f(x, \phi) \\ \hat{\eta} = g(x, \phi) \\ u = h(x, \phi) \end{cases} \quad (7)$$

使得闭环系统状态始终满足约束条件, 即 $x \in D$, 同时闭环系统在平衡点处渐近稳定, 且控制输出渐近跟踪干扰信号并抑制干扰, 其中 $\hat{\eta}$ 是外部系统状态 η 的估计。

为解决该问题, 下面介绍一些定义和引理。

定义 1^[14] 可微函数 $V(x): D \rightarrow \mathbb{R}$, 称为系统 (3) 的一个 BSF, 如果

$$(1) \forall x \in D \setminus \{0\}, V(x) > 0, V(0) = 0;$$

$$(2) \text{当 } x \rightarrow \partial D \text{ 或者 } \|x\| \rightarrow \infty \text{ 时, } V(x) \rightarrow \infty;$$

(3) 对于给定的干扰抑制水平 γ ($\gamma > 0$), $\mathbf{x} \in D \setminus \{0\}$ 时,

$$\sup_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^r} \left\{ \nabla V(\mathbf{x}) (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{w}) + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T(\mathbf{x})\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} \gamma^2 \mathbf{w}^T \mathbf{w} \right\} < 0$$

定义 2^[21] 连续函数 $\alpha: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 称为 K 类函数, 如果其在定义域上严格递增且满足 $\alpha(0) = 0$ 。

定义 3^[14] 对于给定的干扰抑制水平 $\gamma > 0$, 系统 (3) 关于集合 D 满足 L_2 稳定, 如果

(1) 当 $\mathbf{x}(0) \in D$, $\mathbf{w} \in L_2[0, \infty)$ 时, $\mathbf{x} \in D$, 并且存在一 K 类函数 α 和一个 γ_0 ($\gamma > \gamma_0$), 使得

$$\int_0^\infty \mathbf{z}^T(t)\mathbf{z}(t)dt \leq \gamma_0^2 \int_0^\infty \mathbf{w}^T(t)\mathbf{w}(t)dt + \alpha(\|\mathbf{x}(0)\|)$$

(2) 当 $\mathbf{w} = 0$ 时, $\forall \rho > 0$, $\exists \varepsilon > 0$, 使得 $\forall \mathbf{x}(0) \in B_D(\varepsilon)$ 时, $\mathbf{x} \in B_D(\rho)$, 且 $\forall \mathbf{x}(0) \in D$ 时, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0$ 。

引理 1^[14] 如果系统 (3) 存在一个 BSF, 那么系统 (3) 是关于集合 D 满足 L_2 稳定的。

2 基于观测器的具有状态约束的鲁棒输出调节

本节将给出系统 (1) 和 (2) 基于观测器的输出调节方法。

为此, 先给出外部系统状态 $\boldsymbol{\eta}$ 的估计

$$\hat{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (8)$$

其中 $\mathbf{C} = \mathbf{B}^T \mathbf{K}_a$, $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{R}^{2k}$ 表示内模的状态, $0 < \mathbf{K}_a \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是调节器参数。

定义外部系统状态估计误差为

$$\boldsymbol{\eta}_e = \boldsymbol{\eta} - \hat{\boldsymbol{\eta}} \quad (9)$$

为保持 Hamilton 系统的耗散结构, 令

$$\mathbf{u} = [\mathbf{g}^T(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x})]^{-1} \mathbf{g}^T(\mathbf{x})\mathbf{B}\hat{\boldsymbol{\eta}} - \left(\mathbf{K}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \mathbf{r}^T(\mathbf{x})\mathbf{r}(\mathbf{x}) + \frac{\mathbf{I}_m}{\gamma^2} \right) \mathbf{g}^T(\mathbf{x})\nabla V_A(\mathbf{x}, \varepsilon) \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varphi}} = & \mathbf{B}^T \mathbf{K}_a \left[\mathbf{J}(\mathbf{x}) - \mathbf{R}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}) \left(\mathbf{K}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \mathbf{r}^T(\mathbf{x})\mathbf{r}(\mathbf{x}) + \frac{\mathbf{I}_m}{\gamma^2} \right) \mathbf{g}^T(\mathbf{x}) \right] \nabla H(\mathbf{x}) - \\ & \mathbf{B}^T \mathbf{K}_a \mathbf{g}(\mathbf{x}) \left(\mathbf{K}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \mathbf{r}^T(\mathbf{x})\mathbf{r}(\mathbf{x}) + \frac{\mathbf{I}_m}{\gamma^2} \right) \times \\ & \mathbf{g}^T(\mathbf{x})\nabla V_C(\mathbf{x}, \varepsilon) + \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\eta}} - \mathbf{B}^T \nabla H(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $0 < \mathbf{K}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 是反馈增益,

$$V_A(\mathbf{x}, \varepsilon) = H(\mathbf{x}) + V_C(\mathbf{x}, \varepsilon)$$

$$V_C(\mathbf{x}, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{\varepsilon - m(\mathbf{x})}{m(\mathbf{x})}, & 0 < m(\mathbf{x}) < \varepsilon \\ 0, & \varepsilon \leq m(\mathbf{x}) \end{cases}$$

将式 (10) 代入式 (1) 可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} = & \left[\mathbf{J}(\mathbf{x}) - \mathbf{R}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}) \left(\mathbf{K}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \mathbf{r}^T(\mathbf{x})\mathbf{r}(\mathbf{x}) + \frac{\mathbf{I}_m}{\gamma^2} \right) \mathbf{g}^T(\mathbf{x}) \right] \nabla H(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}) \left(\mathbf{K}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \mathbf{r}^T(\mathbf{x})\mathbf{r}(\mathbf{x}) + \frac{\mathbf{I}_m}{\gamma^2} \right) \mathbf{g}^T(\mathbf{x}) \nabla V_C(\mathbf{x}, \varepsilon) - \\ & \mathbf{B}\boldsymbol{\eta}_e + \mathbf{g}_w(\mathbf{x})\mathbf{w} \end{aligned} \quad (12)$$

将式 (2) 和 (8) 代入式 (9) 后对 $\boldsymbol{\eta}_e$ 求导, 结合式 (11) 可得

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\eta}}_e = & \mathbf{A}\boldsymbol{\eta} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} - \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{B}^T \nabla H(\mathbf{x}) + \\ & (\mathbf{A} - \mathbf{B}^T \mathbf{K}_a \mathbf{B})\boldsymbol{\eta}_e + \mathbf{B}^T \mathbf{K}_a \mathbf{g}_w(\mathbf{x})\mathbf{w} \end{aligned} \quad (13)$$

结合式 (12) 和 (13), 得

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = [\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{X}) - \bar{\mathbf{R}}(\mathbf{X})] \nabla \bar{H}(\mathbf{X}) + \bar{\mathbf{G}}_w(\mathbf{X})\mathbf{w} + \mathbf{G}_c(\mathbf{X}) \nabla \bar{V}_C(\mathbf{X}) \\ \mathbf{y} = \mathbf{G}_y^T(\mathbf{X}) \nabla \bar{H}(\mathbf{X}) \\ \mathbf{z} = \mathbf{G}_z^T(\mathbf{X}) \nabla \bar{H}(\mathbf{X}) \end{cases} \quad (14)$$

其中

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\eta}_e \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{J}}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}(\mathbf{x}) & -\mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{A} \end{bmatrix}$$

$$\bar{H}(\mathbf{X}) = H(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\eta}_e\|^2$$

$$\nabla \bar{V}_C(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \nabla V_C(\mathbf{x}, \varepsilon) \\ \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{R}}(\mathbf{X}) = & \text{Diag} \left\{ \mathbf{R}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \left(\mathbf{K}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \mathbf{r}^T(\mathbf{x})\mathbf{r}(\mathbf{x}) + \frac{\mathbf{I}_m}{\gamma^2} \right) \mathbf{g}^T(\mathbf{x}), \mathbf{B}^T \mathbf{K}_a \mathbf{B} \right\} \end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{G}}_w(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_w(\mathbf{x}) \\ \mathbf{B}^T \mathbf{K}_a \mathbf{g}_w(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_c(\mathbf{X}) = \text{Diag} \left\{ -\mathbf{g}(\mathbf{x}) \left(\mathbf{K}(\mathbf{x}) + \mathbf{r}^T(\mathbf{x})\mathbf{r}(\mathbf{x}) / 2 + \mathbf{I}_m / \gamma^2 \right) \mathbf{g}^T(\mathbf{x}), \mathbf{O} \right\}$$

$$\mathbf{G}_y(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_w(\mathbf{x}) \\ \mathbf{O} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_z(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{r}^T(\mathbf{x}) \\ \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

系统(1)和(2)的鲁棒输出调节器设计如下:

$$\begin{cases} \dot{\phi} = B^T K_a \left[J(x) - R(x) - g(x) \left(K(x) + \right. \right. \\ \left. \left. r^T(x)r(x)/2 + I_m/\gamma^2 \right) g^T(x) \right] \nabla H(x) - \\ B^T K_a g(x) \left(K(x) + \frac{1}{2} r^T(x)r(x) + \frac{I_m}{\gamma^2} \right) \times \\ g^T(x) \nabla V_c(x, \varepsilon) + A \hat{\eta} - B^T \nabla H(x) \\ \hat{\eta} = \phi - B^T K_a x \\ u = \left[g^T(x)g(x) \right]^{-1} g^T(x) B \hat{\eta} - \left(K(x) + \right. \\ \left. \frac{1}{2} r^T(x)r(x) + \frac{I_m}{\gamma^2} \right) g^T(x) \nabla V_A(x, \varepsilon) \end{cases} \quad (15)$$

考虑系统(1)和(2)存在BSF的充分条件。

定理 1 考虑系统(1)和(2), 假设 $\bar{K}$ 是 Hurwitz 矩阵, 如果不等式

$$W_{ob}(x) = R(x) + g(x)K(x)g^T(x) + \frac{1}{\gamma^2} (g(x)g^T(x) - g_w(x)g_w^T(x)) > 0 \quad (16)$$

成立, 且 $\exists \delta > 0$, 使得对于 $\forall x \in D(\delta)$ 有

$$2\sqrt{Q_{ob}(x)L_{ob}(x)} + \nabla m^T(x)N_{ob}(x) > 0 \quad (17)$$

$$L_{ob}(x) < 0 \quad (18)$$

成立, 那么函数

$$V(x, \varepsilon) = \begin{cases} \bar{H}(X) + \frac{\varepsilon - m(x)}{m(x)}, & 0 < m(x) < \varepsilon \\ \bar{H}(X), & \varepsilon \leq m(x) \end{cases}$$

是该系统的一个BSF, 其中

$$Q_{ob}(x) = \eta_e^T B^T \bar{K} B \eta_e - \nabla H^T(x) W_{ob}(x) \nabla H(x)$$

$$\bar{K} = K_a g_w(x) g_w^T(x) K_a^T / \gamma^2 - K_a$$

$$N_{ob}(x) = \left[J(x) - R(x) - 2g(x) \left(K(x) + \right. \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} r^T(x)r(x) + \frac{I_m}{\gamma^2} \right) g^T(x) +$$

$$\left. \frac{2}{\gamma^2} g_w(x)g_w^T(x) \right] \nabla H(x) - B \eta_e$$

$$L_{ob}(x) = \nabla m^T(x) \left[\frac{1}{\gamma^2} g_w(x)g_w^T(x) - g(x) \left(K(x) + \right. \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} r^T(x)r(x) + \frac{I_m}{\gamma^2} \right) g^T(x) \right] \nabla m(x)$$

$$0 < \varepsilon < \delta$$

证明 根据 $V(x, \varepsilon)$ 的表达式, $V(x, \varepsilon)$ 正定,

且当 $x \rightarrow \partial D$ 或 $\|X\| \rightarrow \infty$ 时, $V(x, \varepsilon) \rightarrow \infty$ 。接下来证明定义1中的条件(3)成立。选择 $V(x, \varepsilon)$ 作为系统的 Lyapunov 函数。

当 $x \in D \setminus D(\varepsilon)$ 时, 取 $V(x, \varepsilon) = \bar{H}(X)$, 则

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \varepsilon) + \frac{1}{2} z^T z - \frac{1}{2} \gamma^2 w^T w = & -\nabla H^T(x) \left[R(x) + \right. \\ & g(x)K(x)g^T(x) + \frac{1}{\gamma^2} (g(x)g^T(x) - \\ & g_w(x)g_w^T(x)) \left. \right] \nabla H(x) + \eta_e^T B^T \bar{K} B \eta_e - \\ & \left\| \frac{1}{2} \gamma w - \frac{1}{\gamma} g_w^T(x) \nabla H(x) \right\|^2 - \\ & \left\| \frac{1}{2} \gamma w - \frac{1}{\gamma} g_w^T(x) K_a^T B \eta_e \right\|^2 \leq -\nabla H^T(x) \times \\ & \left[R(x) + g(x)K(x)g^T(x) + \frac{1}{\gamma^2} (g(x)g^T(x) - \right. \\ & \left. g_w(x)g_w^T(x)) \right] \nabla H(x) + \eta_e^T B^T \bar{K} B \eta_e < 0 \end{aligned}$$

当 $x \in D(\varepsilon)$ 时, 取 $V(x, \varepsilon) = \bar{H}(X) + (\varepsilon - m(x))/m(x)$, $\nabla V(x, \varepsilon) = \nabla \bar{H}(x) - p(x, \varepsilon) \nabla m(x)$, $p(x, \varepsilon) = \varepsilon / m^2(x)$, 则

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \varepsilon) + z^T z / 2 - \gamma^2 w^T w / 2 = & (\nabla H^T(x) - \\ & p(x, \varepsilon) \nabla m^T(x)) \dot{x} - \eta_e^T B^T K_a B \eta_e + \\ & \eta_e^T B^T K_a g_w(x) w + \frac{1}{2} z^T z - \frac{1}{2} \gamma^2 w^T w = \\ & -\nabla H^T(x) \left[R(x) + g(x)K(x)g^T(x) + \right. \\ & \left. \frac{1}{\gamma^2} (g(x)g^T(x) - g_w(x)g_w^T(x)) \right] \nabla H(x) - \\ & \eta_e^T B^T (K_a - K_a g_w(x)g_w^T(x)K_a^T / \gamma^2) B \eta_e - \\ & p(x, \varepsilon) \nabla m^T(x) \left[\left(J(x) - R(x) - \right. \right. \\ & \left. 2g(x) \left(K(x) + \frac{1}{2} r^T(x)r(x) + \frac{I_m}{\gamma^2} \right) g^T(x) + \right. \\ & \left. \frac{2}{\gamma^2} g_w(x)g_w^T(x) \right) \nabla H(x) - B \eta_e \left. \right] + \\ & p^2(x, \varepsilon) \nabla m^T(x) \left[\frac{1}{\gamma^2} g_w(x)g_w^T(x) - g(x) \times \right. \\ & \left. \left(K(x) + \frac{1}{2} r^T(x)r(x) + \frac{I_m}{\gamma^2} \right) g^T(x) \right] \nabla m(x) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{2} \gamma \mathbf{w} - \frac{1}{\gamma} \mathbf{g}_w^T(\mathbf{x}) (\nabla H(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x}, \varepsilon) \nabla m(\mathbf{x})) \right\|^2 - \\ & \left\| \frac{1}{2} \gamma \mathbf{w} - \frac{1}{\gamma} \mathbf{g}_w^T(\mathbf{x}) \mathbf{K}_a^T \mathbf{B} \boldsymbol{\eta}_e \right\|^2 \leq Q_{ob}(\mathbf{x}) - \\ & p(\mathbf{x}, \varepsilon) \nabla m^T(\mathbf{x}) \mathbf{N}_{ob}(\mathbf{x}) + p^2(\mathbf{x}, \varepsilon) L_{ob}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

$L_{ob}(\mathbf{x}) < 0$, 故当 $p(\mathbf{x}, \varepsilon) = \nabla m^T(\mathbf{x}) \mathbf{N}_{ob}(\mathbf{x}) / (2L_{ob}(\mathbf{x}))$

时, $Q_{ob}(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x}, \varepsilon) \nabla m^T(\mathbf{x}) \mathbf{N}_{ob}(\mathbf{x}) + p^2(\mathbf{x}, \varepsilon) L_{ob}(\mathbf{x})$ 的最大值为 $Q_{ob}(\mathbf{x}) - (m^T(\mathbf{x}) \mathbf{N}_{ob}(\mathbf{x}))^2 / (4L_{ob}(\mathbf{x}))$,

又由不等式 (17) 成立, 可得

$$\dot{V}(\mathbf{x}, \varepsilon) + \mathbf{z}^T \mathbf{z} / 2 - \gamma^2 \mathbf{w}^T \mathbf{w} / 2 < 0$$

综上, 当 $\mathbf{x} \in D$ 时,

$$\sup_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^r} \{ \dot{V}(\mathbf{x}, \varepsilon) + \mathbf{h}^T(\mathbf{x}) \mathbf{h}(\mathbf{x}) / 2 - \gamma^2 \mathbf{w}^T \mathbf{w} / 2 \} < 0$$

由定义 1 可知, 函数

$$V(\mathbf{x}, \varepsilon) = \begin{cases} \bar{H}(\mathbf{x}) + \frac{\varepsilon - m(\mathbf{x})}{m(\mathbf{x})}, & 0 < m(\mathbf{x}) < \varepsilon \\ \bar{H}(\mathbf{x}), & \varepsilon \leq m(\mathbf{x}) \end{cases}$$

是该系统的 BSF。证毕。

注 1 根据文献[22], 若系统 (1) 广义 ZEG 可检测, 条件 (16) 可放宽至 $\mathbf{W}_{ob}(\mathbf{x}) \geq 0$, 由 LaSalle 不变原理, 闭环系统在平衡点处渐近稳定。

注 2^[14] BSF 的构造并不唯一。例如, 下列函数也可以作为系统 (1) 和 (2) 一个 BSF:

$$V(\mathbf{x}, \varepsilon) = \begin{cases} \bar{H}(\mathbf{x}) + \frac{(\varepsilon - m(\mathbf{x}))^2}{m(\mathbf{x})}, & 0 < m(\mathbf{x}) < \varepsilon \\ \bar{H}(\mathbf{x}), & \varepsilon \leq m(\mathbf{x}) \end{cases}$$

$$V(\mathbf{x}, \varepsilon) = \begin{cases} \bar{H}(\mathbf{x}) + \ln \frac{\varepsilon}{m(\mathbf{x})}, & 0 < m(\mathbf{x}) < \varepsilon \\ \bar{H}(\mathbf{x}), & \varepsilon \leq m(\mathbf{x}) \end{cases}$$

定理 2 考虑系统 (1) 和 (2), 假设 $\bar{\mathbf{K}}$ 为 Hurwitz 矩阵, 如果条件 (16)、(17)、(18) 成立, 那么系统的状态约束鲁棒输出调节问题可由调节器 (15) 完成。

证明 由定理 1 可知, 函数 $V(\mathbf{x}, \varepsilon)$ 是系统 (11) 的 BSF, 故

$$\nabla V(\mathbf{x}, \varepsilon) \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{z}^T \mathbf{z} / 2 - \gamma^2 \mathbf{w}^T \mathbf{w} / 2 < 0$$

即闭环系统的 L_2 增益不大于 γ 。

由引理 1 可知系统 (14) 是关于集合 D 满足 L_2 稳定的, 所以当 $\mathbf{w} = 0$ 时, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{X}(t) = 0$, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x} = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\eta}_e = \lim_{t \rightarrow \infty} (\boldsymbol{\eta} - \hat{\boldsymbol{\eta}}) = 0$ 。所以闭环系统在平衡点

$\mathbf{x}_e = 0$ 处局部渐近稳定, 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e} = \lim_{t \rightarrow \infty} (\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\eta}) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{B}^T \mathbf{K}_a \mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}_e) = 0$ 。

综上, 系统的状态约束鲁棒输出调节问题可由调节器 (15) 完成。

注 3 当系统 (1) 受到匹配干扰时, 系统 (1) 表示如下:

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{J}(\mathbf{x}) - \mathbf{R}(\mathbf{x})] \nabla H(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{g}_w(\mathbf{x}) \mathbf{w}$$

系统的状态约束鲁棒调节问题可由调节器

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{B}^T \mathbf{g}^T(\mathbf{x}) \mathbf{K}_a [\mathbf{J}(\mathbf{x}) - \mathbf{R}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})(\mathbf{K}(\mathbf{x}) + \mathbf{r}^T(\mathbf{x}) \mathbf{r}(\mathbf{x}) / 2 + \mathbf{I}_m / \gamma^2) \mathbf{g}^T(\mathbf{x})] \nabla H(\mathbf{x}) - \\ \mathbf{B}^T \mathbf{g}^T(\mathbf{x}) \mathbf{K}_a \mathbf{g}(\mathbf{x})(\mathbf{K}(\mathbf{x}) + \mathbf{r}^T(\mathbf{x}) \mathbf{r}(\mathbf{x}) / 2 + \mathbf{I}_m / \gamma^2) \mathbf{g}^T(\mathbf{x}) \nabla V_c(\mathbf{x}, \varepsilon) + \mathbf{B}^T \frac{d\mathbf{g}^T(\mathbf{x})}{dt} \times \\ \mathbf{K}_a \mathbf{x} + \mathbf{A} \hat{\boldsymbol{\eta}} - \mathbf{B}^T \mathbf{g}^T(\mathbf{x}) \nabla H(\mathbf{x}) \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}} = \boldsymbol{\phi} - \mathbf{B}^T \mathbf{g}^T(\mathbf{x}) \mathbf{K}_a \mathbf{x} \\ \mathbf{u} = \mathbf{B} \hat{\boldsymbol{\eta}} - (\mathbf{K}(\mathbf{x}) + \mathbf{r}^T(\mathbf{x}) \mathbf{r}(\mathbf{x}) / 2 + \mathbf{I}_m / \gamma^2) \times \\ \mathbf{g}^T(\mathbf{x}) \nabla V_A(\mathbf{x}, \varepsilon) \end{cases}$$

完成。

注 4 定理 2 中, 当 $V_A(\mathbf{x}, \varepsilon) = H(\mathbf{x})$ 时, 由证明过程可知, 调节器 (15) 即为无状态约束的系统 (1) 和 (2) 的鲁棒输出调节器。特别地, 如果系统中的正弦干扰 (2) 不存在, 即 $\mathbf{v} = 0$, 则调节器 (15) 退化为系统 (1) 的镇定控制器^[23]

$$\mathbf{u} = -(\mathbf{K}(\mathbf{x}) + \mathbf{r}^T(\mathbf{x}) \mathbf{r}(\mathbf{x}) / 2 + \mathbf{I}_m / \gamma^2) \times \mathbf{g}^T(\mathbf{x}) \nabla H(\mathbf{x}) \quad (19)$$

进一步, 可以构造如下 BSF:

$$V(\mathbf{x}, \varepsilon) = \begin{cases} H(\mathbf{x}) + \frac{\varepsilon - m(\mathbf{x})}{m(\mathbf{x})}, & 0 < m(\mathbf{x}) < \varepsilon \\ H(\mathbf{x}), & \varepsilon \leq m(\mathbf{x}) \end{cases}$$

则控制器

$$\mathbf{u} = -(\mathbf{K}(\mathbf{x}) + \mathbf{r}^T(\mathbf{x}) \mathbf{r}(\mathbf{x}) / 2 + \mathbf{I}_m / \gamma^2) \times \mathbf{g}^T(\mathbf{x}) \nabla V(\mathbf{x}, \varepsilon) \quad (20)$$

可解决具有状态约束的系统 (1) 的鲁棒控制问题。

3 数值仿真

考虑如下系统:

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{J}(\mathbf{x}) - \mathbf{R}(\mathbf{x})] \nabla H(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{g}_w(\mathbf{x}) \mathbf{w} \quad (21)$$

其中

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_w(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Hamilton 函数 $H(\mathbf{x}) = x_1^2/2 + x_2^2/2$, $\mathbf{w} = 0.5 + \cos(2\pi x_1)$ 。 $\mathbf{v}$ 是由外部系统 (2) 产生的, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{2} \mathbf{I}_2$$

状态约束区域

$$D = \{\mathbf{x} | m(\mathbf{x}) = x_1^2 + 1.5x_1 - x_2 + 1.5 > 0\}$$

下面将验证调节器 (15) 的有效性, 为此先检验定理 1 中的条件 (16) ~ (18)。代入检验, 条件 (16) 成立。

设正定矩阵

$$\mathbf{K}_a = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

$b^2/\gamma^2 - a < 0$ 且 $b^2c/\gamma^2 - ac^2/\gamma^2 + ac - b^2 > 0$ 时, $\bar{\mathbf{K}}$ 是 Hurwitz 矩阵, 不妨取调节器参数 $\mathbf{K}_a = \mathbf{I}_2/2$, $\gamma = 1$, $K(\mathbf{x}) = 1$, $r(\mathbf{x}) = 1$ 。代入检验可得条件 (17) 成立。

下面验证条件 (18)。取 $\delta = 0.02$, 直接计算可得

$$Q_{ob} = -x_1^2 - x_2^2 - e_1^2/8 - e_2^2/16$$

$$\nabla m^T(\mathbf{x}) \mathbf{N}_{ob} = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - x_1e_1 - x_1/2 +$$

$$9x_2/2 - 3e_1/4 + e_2/2$$

$$L_{ob} = -3/2$$

条件 (18) 成立, 同时有一个足够小的 ε , 使得系统 (21) 存在一个 BSF:

$$V(\mathbf{x}, \varepsilon) = \begin{cases} \bar{H}(\mathbf{x}) + \frac{\varepsilon - m(\mathbf{x})}{m(\mathbf{x})}, & 0 < m(\mathbf{x}) < \varepsilon \\ \bar{H}(\mathbf{x}), & \varepsilon \leq m(\mathbf{x}) \end{cases}$$

根据定理 2, 系统 (21) 基于观测器的调节器设计如下:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \varphi_2 - 3x_1/4 \\ \dot{\varphi}_2 = -\varphi_1 - 9x_2/8 + u_1/4 \\ u = \varphi_2/2 - 21x_2/8 + u_1 \end{cases} \quad (22)$$

其中

$$u_1 = \begin{cases} -\frac{5\varepsilon}{2(x_1^2 + 1.5x_1 + 1.5 - x_2)^2}, & 0 < m(\mathbf{x}) < \varepsilon \\ 0, & \varepsilon \leq m(\mathbf{x}) \end{cases}$$

为检验系统状态是否满足约束条件, 将调节器 (22) 和控制器 (19) 作用下的系统 (21) 的状态轨迹进行比较。为研究调节器 (22) 对外部干扰的鲁棒性, 在 2~3 s 时间段对系统 (21) 施加外部干扰。同时为检验调节器的性能表现, 将调节器 (22) 与控制器 (19) 及开环系统进行比较。

仿真结果如图 1 与图 2 所示。图 1 为调节器 (22) 和控制器 (19) 作用下的系统 (21) 的状态轨迹, 区域 D 为状态约束区域, 区域 D^c 为限制区域, 轨迹 a 为系统 (21) 在控制器 (19) 的作用下的状态轨迹, 轨迹 b 为系统 (21) 在调节器 (22) 的作用下的状态轨迹。图 2 为系统 (21) 的 3 种动态响应情况, 状态分量 $(x_{11}, x_{21}, e_{11}, e_{21})^T$ 表示开环系统的状态响应, 状态分量 $(x_{12}, x_{22}, e_{12}, e_{22})^T$ 和 $(x_{13}, x_{23}, e_{13}, e_{23})^T$ 分别表示系统 (21) 在控制器 (19) 和调节器 (22) 作用下的状态响应。由图 1 可知, 系统在控制器 (19) 的作用下, 轨迹 a 会经过限制区域 D^c , 状态不满足约束条件, 但在调节器 (22) 的作用下, 轨迹 b 始终在状态约束区域 D 内, 满足约束条件。由图 2 可知, 开环系统和控制器 (19) 作用下的系统都不稳定, 参考输入也不能渐近跟踪干扰信号, 而系统在调节器 (22) 的作用下渐近稳定在平衡点处, 且跟踪误差逐渐收敛到原点, 对外部干扰也具有鲁棒性。

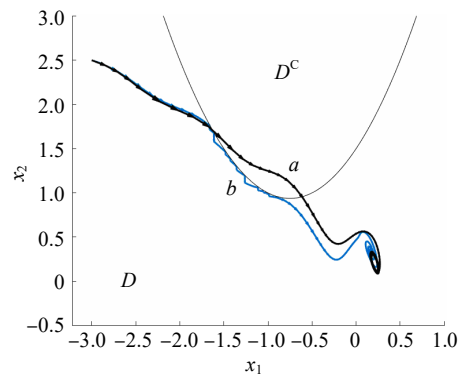
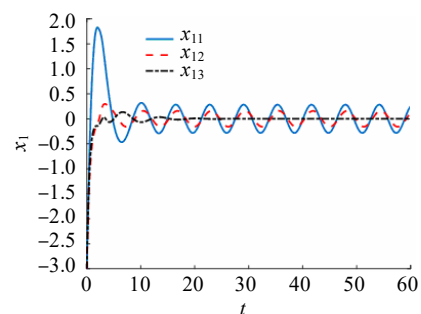


图 1 闭环系统状态轨迹



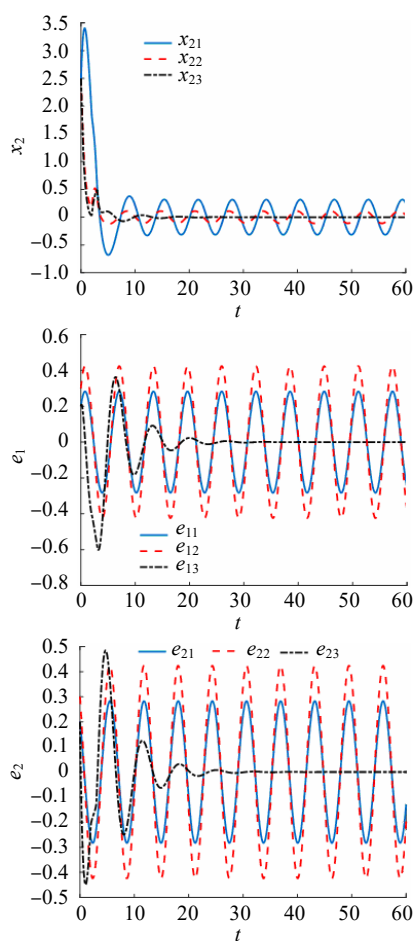


图2 系统动态响应情况

注5 BSF 取

$$V(\mathbf{x}, \varepsilon) = \begin{cases} \bar{H}(\mathbf{X}) + \ln \frac{\varepsilon}{m(\mathbf{x})}, & 0 < m(\mathbf{x}) < \varepsilon \\ \bar{H}(\mathbf{X}), & \varepsilon \leq m(\mathbf{x}) \end{cases}$$

时, 图3中轨迹 c 为系统(21)在调节器(15)的作用下的状态轨迹, 图4中 $(x_{14}, x_{24}, e_{14}, e_{24})^T$ 表示系统(21)在调节器(15)作用下的状态响应。由仿真结果可知, 系统的状态约束鲁棒输出调节问题可由调节器(15)完成, 即BSF的构造不唯一。

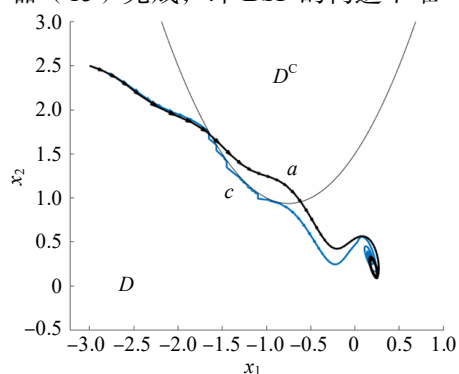


图3 闭环系统状态轨迹 (不同BSF)

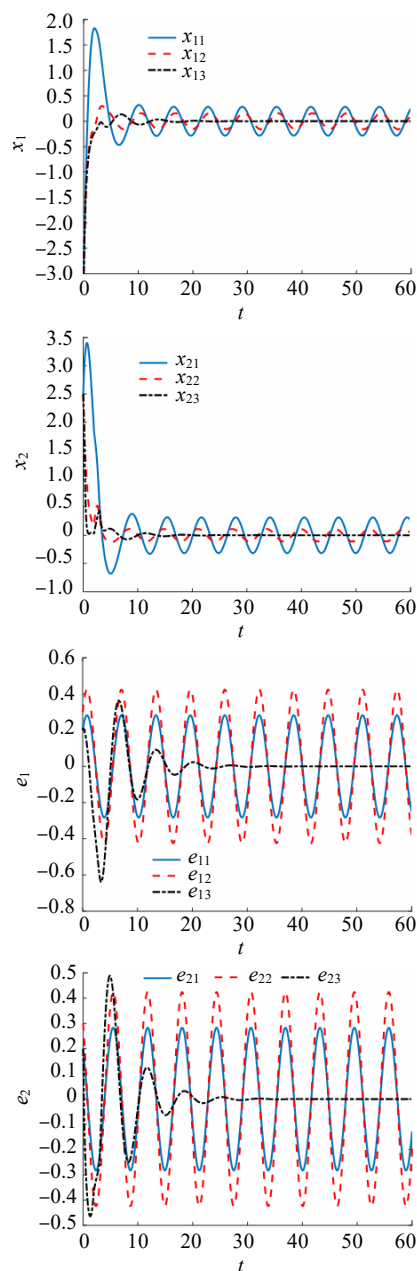


图4 系统动态响应情况 (不同BSF)

4 结论

本文研究了具有状态约束的 Hamilton 系统的鲁棒输出调节问题。利用内模原理和 BSF 方法, 设计了基于观测器的鲁棒调节器, 在解决系统输出调节问题的同时, 确保系统状态始终满足约束条件。该方法保持 Hamilton 系统的耗散结构, 将输出调节问题转化为增广系统的镇定问题, 并构造了系统基于 Hamilton 函数的 BSF, 使得系统状态满足约束条件。该方法也给出了输出调节器的显式结

构,避免了传统方法中求解调节器方程和 Hamilton-Jacobi-Issacs 不等式的复杂过程。数值仿真结果表明所设计的鲁棒调节器在实现输出调节目标的同时,能够有效保证系统状态轨迹始终保持在预设的约束区域内。基于 BSF 方法,未来可以进一步研究多个状态约束情况下的输出调节问题或者随机 Hamilton 系统的输出调节问题。

参考文献:

- [1] 沈鹏, 李小华, 刘辉. 无关初始状态的机械臂全状态约束轨迹跟踪容错控制[J/OL]. [2025-04-13]. <https://link.cnki.net/urlid/44.1240.TP.20250312.0929.010>.
- [2] YU W C, GUO H W, XIAO J, et al. Physical neural networks with self-learning capabilities[J]. Science China physics, mechanics & astronomy, 2024, 67(8):287501.
- [3] HE W, GE S S. Cooperative control of a nonuniform gantry crane with constrained tension[J]. Automatica, 2016, 66:146-154.
- [4] STEIN G. Respect the unstable[J]. IEEE control systems magazine, 2003, 23(4):12-25.
- [5] RICHTER H. A multi-regulator sliding mode control strategy for output-constrained systems[J]. Automatica, 2011, 47(10):2251-2259.
- [6] GHAEMI R, SUN J, KOLMANOVSKY I V. Robust control of constrained linear systems with bounded disturbances[J]. IEEE transactions on automatic control, 2012, 57(10):2683-2688.
- [7] SU Q Y, ZHU H C, LI J. H_∞ control for a class of continuous-time switched systems with state constraints via a mode-dependent switching method[J]. Transactions of the institute of measurement and control, 2018, 40(11): 3358-3367.
- [8] LIU Y Y, YU J P, YU H S, et al. Barrier Lyapunov functions-based adaptive neural control for permanent magnet synchronous motors with full-state constraints[J]. IEEE access, 2017, 5:10382-10389.
- [9] LIU Y J, LU S M, TONG S C, et al. Adaptive control-based Barrier Lyapunov functions for a class of stochastic nonlinear systems with full state constraints[J]. Automatica, 2018, 87:83-93.
- [10] YU J P, ZHAO L, YU H S, et al. Barrier Lyapunov functions-based command filtered output feedback control for full-state constrained nonlinear systems[J]. Automatica, 2019, 105:71-79.
- [11] ZHAO K, SONG Y D, ZHANG Z R. Tracking control of MIMO nonlinear systems under full state constraints: a single-parameter adaptation approach free from feasibility conditions[J]. Automatica, 2019, 107:52-60.
- [12] ROMDLONY M Z, JAYAWARDHANA B. Stabilization with guaranteed safety using control Lyapunov-Barrier function[J]. Automatica, 2016, 66:39-47.
- [13] JHANG J Y, WU J L, YUNG C F. Stabilization of nonlinear control-affine systems with multiple state constraints[J]. IEEE access, 2020, 8:179735-179744.
- [14] WU J L, CHOU Y S. State-constrained nonlinear L_2 -gain control[J]. IEEE transactions on automatic control, 2020, 65(2):771-777.
- [15] JIN C L, LI L L, WANG R, et al. Asynchronous output regulation with passivity control for a class of switched stochastic delay systems[J]. IET control theory & applications, 2017, 11(18):3269-3277.
- [16] LIU W, HUANG J. Event-triggered global robust output regulation for a class of nonlinear systems[J]. IEEE transactions on automatic control, 2017, 62(11):5923-5930.
- [17] XIE K D, JIANG Y, YU X, et al. Data-driven cooperative optimal output regulation for linear discrete-time multi-agent systems by online distributed adaptive internal model approach[J]. Science China information sciences, 2023, 66(7):170202.
- [18] HUMALOJA J P, PAUNONEN L. Robust regulation of infinite-dimensional port-Hamiltonian systems[J]. IEEE transactions on automatic control, 2018, 63(5):1480-1486.
- [19] XU S, WANG W, CHEN S Y. Energy-based output regulation for stochastic port-Hamiltonian systems[J]. International journal of robust and nonlinear control, 2021, 31(5):1720-1734.
- [20] 王飞飞, 徐松. 一类基于观测器的随机端口 Hamilton 系统的输出调节[J]. 宁波大学学报(理工版), 2024, 37(3):36-43.
- [21] KHAIL H K. Nonlinear control system[M]. London: Springer-Verlag, 1995.
- [22] 王玉振. 广义 Hamilton 控制系统理论: 实现、控制与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- [23] LIU Y H, CAO G Z, TANG S X, et al. Energy-based stabilisation and robust stabilisation of stochastic nonlinear systems[J]. IET control theory & applications, 2018, 12(2):318-325.

(责任编辑 韩 超)