

马尔可夫调制的跳扩散过程下幂式期权的定价

赵奇杰, 王 伟*

(宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 假定市场经济状态由两状态连续时间马尔可夫链描述, 风险资产满足马尔可夫调制的跳扩散过程, 研究了马尔可夫调制模型下幂式期权的定价问题. 通过测度变换和 Girsanov 定理, 得出幂式看涨期权定价公式, 并利用看涨、看跌的平价关系得到了幂式看跌期权的定价公式. 此外, 还利用蒙特卡洛方法给出了幂式看涨期权价值的数值结果.

关键词: 马尔可夫; 期权定价; 蒙特卡洛模拟

中图分类号: O157.5

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2013) 04-0077-05

期权定价是金融数学的核心问题之一, 现代期权定价技术来自于 Black-Scholes^[1]的先驱性工作, 自从 Black、Scholes 和 Meton^[2]的杰出工作以后, 有关期权定价的文章浩如烟海. 虽然 Black-Scholes 模型已经在金融市场中得到了广泛的应用, 但是其本身也有很大的不足之处, 因此大量的研究学者对 Black-Scholes 模型进行了推广, 例如随机波动率模型、跳扩散模型和 GARCH 模型等. 近年来, 马尔可夫调制模型在金融各领域尤其是期权定价领域越来越受到重视. Mamon 和 Rodrigo^[3]给出了马尔可夫调制模型下欧式期权的定价公式. Elliott 等^[4]考虑了带有马尔可夫调制的 GARCH 模型下的期权定价问题. Boyle 和 Dravias^[5]研究了马尔可夫调制模型下奇异期权的定价. Hardy^[6]通过利用两个状态的马尔可夫调制模型来预测长期的股票回报, 发现此模型得到的数据比其它模型得到的数据更加贴近实际, 在这个模型中, 他假定在每个体制状态(regime state)下, 股票价格服从参数不同的对数正态分布. 在本文中, 笔者考虑一个两状态马尔可夫调制模型, 假定市场处于稳定状态时, 股票价格满足马尔可夫调制的几何布朗运动; 而当市场处于高波动状态时, 股票价格服从马尔可夫调制的跳扩散过程. 在这个两状态体制转换模

型下, 我们考虑了幂式期权的定价问题.

1 市场模型

我们考虑一个连续时间的金融市场, 市场中不确定性由一个带滤流的完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, F_{\{0 \leq t \leq T\}}, Q)$ 来描述, 这里, Q 是风险中性测度. 金融市场中包含 2 个可连续交易的资产, 一类是无风险债券 B , 另一类是风险资产 S , 通常假定这个风险资产为股票. $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$ 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ 上的一个连续时间时齐马尔可夫链, $(X_t)_{t \in [0, T]}$ 的状态空间为 $S = (e_1, e_2)$, 其中, $e_1 = (1, 0)' \in \mathbb{R}^2$, $e_2 = (0, 1)' \in \mathbb{R}^2$, 马尔可夫链 X 的 Q 矩阵为 $(\lambda_{ij})_{i=1,2; j=1,2}$.

令 J_t 为连续时间马尔可夫链 X 在 $[0, t]$ 这段时间内在状态 e_1 的累积逗留时间, 则:

$$J_t = \int_0^t I_{\{X_s = e_1\}} ds, \quad (1)$$

式中, $I_{\{\cdot\}}$ 是示性函数.

令 B_t 表示银行货币账户 B 在 t 时刻的价值, 满足如下方程:

$$dB_t = r_t B_t dt, \quad (2)$$

式中, $r_t = \langle r, X_t \rangle$ 是 t 时刻市场上的无风险利率, 其中, $r = (r_1, r_2)$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示内积.

收稿日期: 2012-11-06.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journalg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 浙江省自然科学基金(LQ12A01006); 浙江省教育厅科研项目(Y201120129); 宁波大学学科项目(XKL11047, XKL11046).

第一作者: 赵奇杰(1989-), 男, 河南三门峡人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 金融数学. E-mail: zqj0398@163.com

*通信作者: 王 伟(1982-), 男, 安徽安庆人, 博士/讲师, 主要研究方向: 金融数学. E-mail: wangwei2@nbu.edu.cn

S_t 表示股票 S 在 t 时刻的价值, 满足如下随机过程:

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \int_0^t r_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds + \sum_{j=1}^{N_t} Z_j - \lambda \beta J_t \right\}, \quad (3)$$

其中, W 是定义在概率空间 (Ω, F, Q) 上的标准布朗运动, $\sigma_t = \langle \sigma, X_t \rangle$ 是股票 S 的波动率, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$, $\left\{ \sum_{j=1}^{N_t} Z_j, T \geq t \geq 0 \right\}$ 是复合泊松过程, N_t

的强度为 λ , Z_j 的概率密度函数为 $g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} \exp\left(-\frac{z^2}{2\delta^2}\right)$, $\beta = E_Q[\exp(Z_j) - 1] = \exp\left(\frac{1}{2}\delta^2\right) - 1$.

在文中, 我们假定 Z_j 满足正态分布, 只是希望模型简单一些, 如果 Z_j 满足其它的分布, 用本文的方法一样可以得到结果.

从(3)式可知, 当市场处于状态 e_1 时, S_t 满足马尔可夫调制的跳扩散过程; 当市场处于状态 e_2 时, S_t 满足马尔可夫调制的几何布朗运动. 接着, 我们将考虑在这个两状态马尔可夫调制转换模型下幂式期权的定价问题.

2 幂式看涨期权的定价

幂式看涨期权在期权到期日 T 收益为 $\Psi(T) = (S_T^\alpha - K^\alpha)^+$, 其中, S_t 是标的资产在 t 时刻的价格, K^α 为敲割价格, $0 < \alpha < 1$.

令 $C(t, S, X)$ 表示给定 $S_t = S$, $X_t = X$ 时, 幂式看涨期权在 t 时刻的价值, 故由风险中性定价原理可得:

$$C(t, S, X) = E_Q \left[\frac{B_t}{B_T} (S_T^\alpha - K^\alpha)^+ | F_t \right]. \quad (4)$$

接着, 将给出幂式看涨期权在 t 时刻的定价公式, 令:

$$\bar{R}(J_T - J_t) = \int_t^T r_u du = r_1(J_T - J_t) +$$

$$r_2(T - t - J_T + J_t),$$

$$\bar{U}(J_T - J_t) = \int_t^T \sigma_u^2 du = \sigma_1^2(J_T - J_t) +$$

$$\sigma_2^2(T - t - J_T + J_t).$$

另外, 令 $\phi_{J_T - J_t | X}(y)$ 表示 $J_T - J_t$ 在给定 $X_t = X$

下的条件概率密度, Yoon 等人^[7]给出了 $\phi_{J_T - J_t | X}(y)$ 的具体表达式. 对任意 $y(0 \leq y \leq T - t)$, 有:

$$\begin{cases} \phi_{J_T - J_t | X=e_1}(y) := \exp[-\lambda_{22}(T - t - y) - \lambda_{11}y] \cdot \\ \left(\left(\frac{\lambda_{11}\lambda_{22}y}{T - t - y} \right)^{\frac{1}{2}} I_1(2(\lambda_{11}\lambda_{22}y(T - t - y))^{\frac{1}{2}}) + \right. \\ \left. \lambda_{11}I_0(2(\lambda_{11}\lambda_{22}y(T - t - y))^{\frac{1}{2}}) \right), \\ \phi_{J_T - J_t | X=e_2}(y) := \exp[-\lambda_{22}(T - t - y) - \lambda_{11}y] \cdot \\ \left(\left(\frac{\lambda_{11}\lambda_{22}(T - t - y)}{y} \right)^{\frac{1}{2}} I_1(2(\lambda_{11}\lambda_{22}y(T - t - y))^{\frac{1}{2}}) + \right. \\ \left. \lambda_{22}I_0(2(\lambda_{11}\lambda_{22}y(T - t - y))^{\frac{1}{2}}) \right), \end{cases}$$

和

$$\phi_{J_T - J_t | X=e_1}(0) = 0,$$

$$\phi_{J_T - J_t | X=e_1}(T - t) = \exp[-\lambda_{11}(T - t)],$$

$$\phi_{J_T - J_t | X=e_2}(0) = \exp(-\lambda_{22}(T - t)),$$

$$\phi_{J_T - J_t | X=e_2}(T - t) = 0,$$

其中,

$$I_a(z) := \left(\frac{z}{2} \right)^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2n}}{n! \Gamma(a + n + 1)}.$$

定理 1 幂式看涨期权在 t 时刻的价值为:

$$\begin{aligned} C(t, S, X) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{T-t} [\exp(-\bar{\lambda}y) \frac{(\bar{\lambda}y)^n}{n!} S^\alpha f(\alpha, y) \cdot \\ N(d_1(y)) - K^\alpha \exp(-\lambda y) \frac{(\lambda y)^n}{n!} \cdot \\ \exp[(r_2 - r_1)y - r_2(T - t)] N(d_2(y))] \cdot \\ \phi_{J_T - J_t | X}(y) dy, \end{aligned} \quad (5)$$

其中, $\bar{\beta} = \exp(\frac{\alpha^2 \delta^2}{2}) - 1$, $\bar{\lambda} = \lambda(\bar{\beta} + 1)$,

$$d_1(y) = \frac{\ln \frac{S}{K} + \bar{R}(y) + (\alpha - \frac{1}{2})\bar{U}(y) - \lambda\beta y + n\alpha}{\sqrt{\bar{U}(y) + n\delta^2}},$$

$$d_2(y) = \frac{\ln \frac{S}{K} + \bar{R}(y) - \frac{1}{2}\bar{U}(y) - \lambda\beta y}{\sqrt{\bar{U}(y) + n\delta^2}},$$

$$f(\alpha, y) = \exp\{(\alpha - 1)\bar{R}(y) + (\alpha^2 - \alpha)\bar{U}(y)/2 + \lambda(\bar{\beta} - \alpha\beta)y\}.$$

证明 为计算 $C(t, S, X)$, 方便起见, 记:

$$c_1 = E_Q \left[\frac{B_t}{B_T} S_T^\alpha I_{\{S_T \geq K\}} | F_t \right],$$

$$c_2 = K^\alpha E_Q \left[\frac{B_t}{B_T} I_{\{S_T \geq K\}} \mid F_t \right],$$

则由(4)式可知 $C(t, S, X) = c_1 - c_2$. 首先计算 c_1 , 记 $F_T^X = \sigma(X_u, 0 \leq u \leq T)$, 令 $H_t = F_t \vee F_T^X$, 先定义概率测度 Q_α 如下:

$$\frac{dQ_\alpha}{dQ} \Big|_{H_t} = \frac{\tilde{S}_t^\alpha}{E_Q[\tilde{S}_t^\alpha \mid F_T^X]}, \quad (6)$$

其中, $\tilde{S}_t$ 是风险资产 S 在 t 时刻的贴现价值, 即 $\tilde{S}_t = S_t / B_t$.

于是由(3)式直接计算可得:

$$E_Q[\tilde{S}_t^\alpha \mid F_T^X] = S_0^\alpha \exp \left\{ \frac{1}{2} \alpha^2 \int_0^t \sigma_s^2 ds - \frac{1}{2} \alpha \int_0^t \sigma_s^2 ds + \lambda \bar{\beta} J_t - \lambda \alpha \beta J_t \right\}, \quad (7)$$

再由(3)式和(7)式有:

$$\frac{dQ_\alpha}{dQ} \Big|_{H_t} = \exp \left\{ \alpha \int_0^t \sigma_s dW_s - \frac{1}{2} \alpha^2 \int_0^t \sigma_s^2 ds + \alpha \sum_{j=1}^{N_{J_t}} Z_j - \lambda \bar{\beta} J_t \right\}. \quad (8)$$

则由 Girsanov 定理可知, 在给定条件 F_T^X 下, $\widehat{W}_t = W_t - \alpha \int_0^t \sigma_s ds$ 是标准的 Q_α 布朗运动, 在概率测度 Q_α 下, N_t 的强度为 $\bar{\lambda} = \lambda(\bar{\beta} + 1)$, Z_j 满足正态分布 $N(\alpha, \delta^2)$. 通过条件期望的平滑性和 Bayes 法则可得:

$$\begin{aligned} c_1 &= E_Q \left[\frac{B_t}{B_T} S_T^\alpha I_{\{S_T \geq K\}} \mid F_t \right] = \\ &= B_t E_Q \left[E_Q \left[\frac{S_T^\alpha}{B_T} I_{\{S_T \geq K\}} \mid H_t \right] \mid F_t \right] = B_t \cdot \\ &= E_Q \left[E_{Q_\alpha} \left[\frac{B_T^{\alpha-1} \tilde{S}_T^\alpha E_Q[\tilde{S}_T^\alpha \mid F_T^X]}{E_Q[\tilde{S}_T^\alpha \mid F_T^X]} I_{\{S_T \geq K\}} \mid H_t \right] \mid F_t \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

从(7)式可知:

$$\frac{E_Q[\tilde{S}_T^\alpha \mid F_T^X]}{E_Q[\tilde{S}_t^\alpha \mid F_T^X]} = \exp \left\{ \frac{1}{2} (\alpha^2 - \alpha) \int_t^T \sigma_s^2 ds + \lambda(\bar{\beta} - \alpha\beta)(J_T - J_t) \right\},$$

则,

$$c_1 = S_t^\alpha E_Q[E_{Q_\alpha}[f(\alpha, J_T - J_t) I_{\{S_T \geq K\}} \mid H_t] \mid F_t]. \quad (10)$$

又因为事件,

$$\{S_T \geq K\} = \left\{ \bar{R}(J_T - J_t) + \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \bar{U}(J_T - J_t) + \right.$$

$$\left. \int_t^T \sigma_s d\widehat{W}_s + \sum_{j=N_{J_t}+1}^{N_{J_T}} Z_j - \lambda \beta (J_T - J_t) \geq \ln \frac{K}{S_t} \right\}, \quad (11)$$

且 N_t 在概率测度 Q_α 下的强度为 $\bar{\lambda}$, Z_j 在 Q_α 下满足正态分布 $N(\alpha, \delta^2)$, 从而通过直接计算可得:

$$E_{Q_\alpha}[I_{\{S_T \geq K\}} \mid H_t] = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\bar{\lambda}(J_T - J_t)) \cdot$$

$$\frac{(\bar{\lambda}(J_T - J_t))^n}{n!} N(d_1(J_T - J_t)),$$

则,

$$\begin{aligned} c_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} S_t^\alpha \int_0^{T-t} f(\alpha, y) \exp(-\bar{\lambda}y) \frac{(\bar{\lambda}y)^n}{n!} \cdot \\ &\quad N(d_1(y)) \phi_{J_T - J_t | X}(y) dy. \end{aligned} \quad (12)$$

同理, 因为 N_t 在概率测度 Q 下的强度为 λ , Z_j 在 Q 下满足正态分布 $N(0, \delta^2)$, 容易得到:

$$\begin{aligned} c_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} K^\alpha \int_0^{T-t} \exp[(r_2 - r_1)y - r_2(T-t) - \lambda y] \cdot \\ &\quad \frac{(\lambda y)^n}{n!} N(d_2(y)) \phi_{J_T - J_t | X}(y) dy. \end{aligned} \quad (13)$$

由于 $C(t, S, X) = c_1 - c_2$, 于是由(12)式和(13)式即可完成定理 1 的证明.

令 $P(t, S, X)$ 表示给定 $S_t = S$, $X_t = X$ 时, 幂式看跌期权在 t 时刻价值, 由无套利定价原理可得:

$$P(t, S, X) = E_Q \left[\frac{B_t}{B_T} (K^\alpha - S_T^\alpha)^+ \mid F_t \right]. \quad (14)$$

利用幂式看涨期权和看跌期权的平价关系, 给出幂式看跌期权的价值, 有下面的命题.

命题 1 幂式看跌期权在 t 时刻的价值为:

$$\begin{aligned} P(t, S, X) &= C(t, S, X) - \int_0^{T-t} (S_t^\alpha f(\alpha, y) - \\ &\quad K^\alpha \exp(-\bar{R}(y))) \phi_{J_T - J_t | X}(y) dy. \end{aligned} \quad (15)$$

证明 因为

$$(K^\alpha - S_T^\alpha)^+ = (K^\alpha - S_T^\alpha) I_{\{S_T < K\}},$$

$$(S_T^\alpha - K^\alpha)^+ = (S_T^\alpha - K^\alpha) I_{\{S_T \geq K\}},$$

则由(4)式和(14)式可得

$$\begin{aligned} C(t, S, X) - P(t, S, X) &= \\ &= E_Q \left[\frac{B_t}{B_T} (S_T^\alpha - K^\alpha) \mid F_t \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

又因为

$$\frac{B_t}{B_T} S_T^\alpha = S_t^\alpha \exp \left\{ \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \bar{R}(J_T - J_t) + \int_t^T \alpha \sigma_u dW_u - \right.$$

$$\frac{1}{2}\alpha\bar{U}(J_T-J_t)+\alpha\sum_{j=N_{J_t}+1}^{N_{J_T}}Z_j-\lambda\alpha\beta(J_T-J_t)\Bigg\},$$

故,

$$E_Q\left[\frac{B_t}{B_T}S_T^\alpha|H_t\right]=S_t^\alpha f(\alpha,J_T-J_t).$$

利用条件期望的平滑性, 可得:

$$E_Q\left[\frac{B_t}{B_T}(S_T^\alpha-K^\alpha)|F_t\right]=E_Q[S_t^\alpha f(\alpha,J_T-J_t)-K^\alpha\exp(-\bar{R}(J_T-J_t))|F_t],$$

综合上式和(16)式有:

$$P(t,S,X)=C(t,S,X)-\int_0^{T-t}(S_t^\alpha f(\alpha,y)-K^\alpha\exp(-\bar{R}(y)))\phi_{J_T-J_t|X}(y)dy.$$

3 模拟

此节中将用蒙特卡洛模拟方法计算出幂式看涨期权的数值价格, 对于幂式看跌期权的价格可通过幂式看涨期权和命题 1 获得. 假定每年有 252 个交易日, 则样本区间是 1/252, 我们将通过 10000 次模拟得到幂式看涨期权的数值价格. 假定马尔可夫链的转移概率为 $P_{11}=0.3$, $P_{12}=0.7$, $P_{21}=0.2$, $P_{22}=0.8$. 市场中其它参数如下: 当市场处于状态 e_1 时, 市场利率 $r_1=0.06$, 风险资产的波动率是 $\sigma_1=0.2$; 当市场处于状态 e_2 时, 市场利率 $r_2=0.08$, 风险资产的波动率是 $\sigma_2=0.4$. 风险资产跳的强度 $\lambda=10$, 也就是年平均发生跳的次数为 10. 期权到期日 $T=1$ 年. 风险资产跳 Z_j 的标准差 $\delta=0.2$.

图 1 模型的参数除了采用上述假设外, 还假定 $\alpha=0.6$, 风险资产的初始价格 $S=100$. 从图 1 可以看出, 幂式看涨期权的价格随敲割价格 K 增加

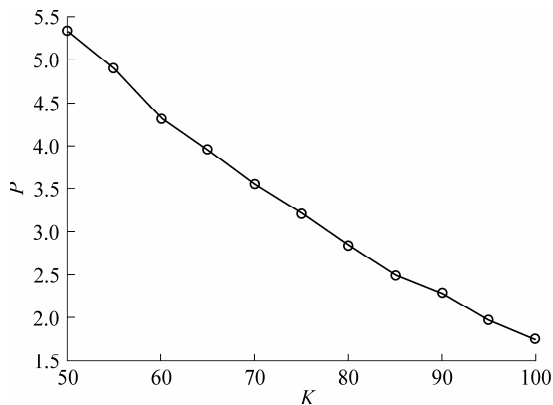


图 1 敲割价格 K 对幂式看涨期权的影响

而减少.

图 2 模型的参数除采用上述假设外, 还假定期权敲割价格 $K=100$, 风险资产初始价格 $S=100$. 从图 2 可以看出, 幂式看涨期权的价格随次数 α 的增加而增加.

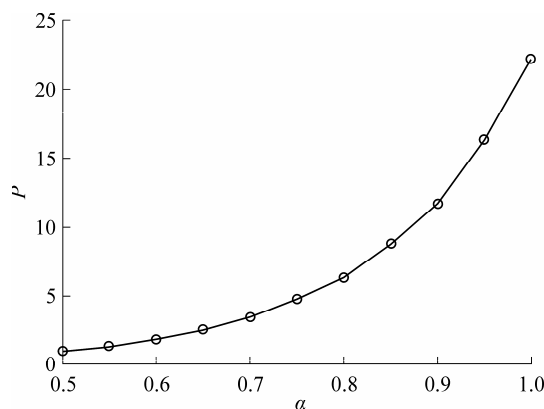


图 2 α 对幂式看涨期权的影响

图 3 模型的参数除了采用上述假设外, 还假定期权敲割价格 $K=100$, $\alpha=0.6$. 从图 3 可以看出, 幂式看涨期权的价格随资产初始价格 S 的增加而增加.

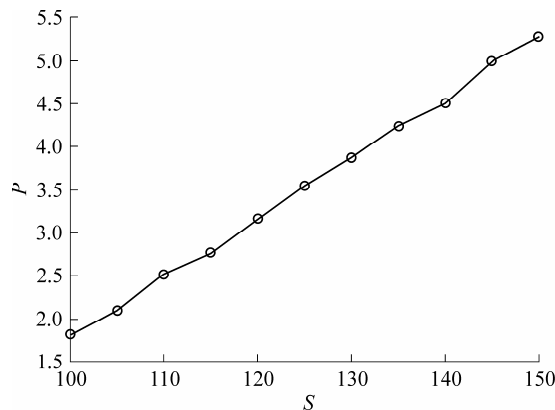


图 3 风险资产的初始价格 S 对幂式看涨期权的影响

4 结论

假定市场利率由一个两状态马尔可夫链描述, 当市场处于高波动状态 e_1 时, 股票价格 S_t 满足马尔可夫调制的跳扩散过程; 当市场处于低波动状态 e_2 时, 股票价格 S_t 满足马尔可夫调制的几何布朗运动. 利用测度变换和 Girsanov 定理, 通过鞅定价方法得到了这个两状态马尔可夫调制转换模型下幂式看涨期权的定价公式; 同时, 利用看涨期权与看跌期权的平价关系, 给出了幂式看跌期权的

定价公式. 此外, 利用蒙特卡洛模拟方法给出了模型幂式看涨期权的数值价格, 并用图形揭示了幂式看涨期权与模型中参数敲定价格 K 、次数 α 以及初始价格 S 之间的关系, 发现幂式看涨期权的价格随次数 α 或初始价格 S 的增加而增加, 而随敲定价格 K 的增加而减少. 此外, 文中的两状态马尔可夫调制模型也可以用来计算其它欧式期权的价格.

参考文献:

- [1] Black F, Scholes F. The pricing of options and corporate liability[J]. Journal of Political Economy, 1973, 81:637-659.
- [2] Merton R C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous[J]. Journal of Financial Economics, 1976(3):125-144.
- [3] Mamon R S, Rodrigo M R. Explicit solutions to European options in a regime-switching economy[J]. Operations Research Letters, 2005, 33:581-586.
- [4] Elliott R J, Siu T K, Chan L G. Option pricing for GARCH models with Markov switching[J]. International Journal of Theoretical and Applied Finance, 2006, 9(6): 825-841.
- [5] Boyle P, Draviam T. Pricing exotic options under regime switching[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2007, 40:267-282.
- [6] Hardy M R. A regime switching model of a long term stock returns[J]. North American Actuarial Journal, 2001 (3):185-211.
- [7] Yoon J H, Jang B G, Roh K H. An analytic valuation method for multivariate contingent claims with regime-switching volatilities[J]. Operations research letters, 2011, 39:180-187.

Pricing Power Options under a Markov-modulated Jump Diffusion Process

ZHAO Qi-jie, WANG Wei*

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: The conditions of market economy are described by a two-state continuous time Markov chain with a Markov-modulated jump diffusion process satisfied by the risky asset. The pricing problem of power option is considered under a Markov-modulated model. The value formula of power call option is obtained by measuring the change and Girsanov's theorem, and the value formula of power put option by put-call-parity. The numeric results are also provided using the Monte Carlo simulation technique.

Key words: Markov; option pricing; Monte Carlo simulation

(责任编辑 章践立)