

具有共因故障的温贮备并联可修系统的最优控制问题

胡晓晓¹, 吕丹¹, 吴艳²

(1.温州医科大学 信息与工程学院, 浙江 温州 325035; 2.嘉兴学院 数理与信息工程学院, 浙江 嘉兴 314001)

摘要: 针对具有共因故障的温贮备并联可修系统模型, 用范数指标泛函作为衡量系统可控性的标准, 利用 Banach 空间理论讨论了系统稳态解达到预期概率分布的最优控制问题.

关键词: 可修复系统; 最优控制; 极小化序列

中图分类号: O232

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2014) 01-0057-05

文献[1]建立了一个具有共同故障的 2 个部件温贮备并联可修复系统的模型. 文献[2]利用 C_0 半群的方法证明该模型确定了一个正压缩 C_0 半群, 从而得到系统存在唯一的动态非负解. 笔者通过分析系统算子的谱点分布, 得到系统的渐近稳定性, 并在此基础上用范数指标泛函作为衡量系统可控性的标准, 利用 Banach 空间进一步研究了稳态解的最优控制问题.

系统方程如下:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -(2\lambda + \lambda_5 + \lambda_{cc_0})p_0(t) + \int_0^\infty p_5(x, t)\mu_5(x)dx + \int_0^\infty p_6(x, t)\mu_6(x)dx, \quad (1)$$

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = 2\lambda p_0(t) - (\lambda + \lambda_5 + \lambda_{cc_1})p_1(t), \quad (2)$$

$$\frac{dp_2(t)}{dt} = \lambda_5 p_0(t) - (2\lambda + \lambda_{cc_2})p_2(t), \quad (3)$$

$$\frac{dp_3(t)}{dt} = \lambda_5 p_1(t) + 2\lambda p_2(t) - (\lambda + \lambda_{cc_3})p_3(t), \quad (4)$$

$$\frac{dp_4(t)}{dt} = \lambda p_1(t) - (\lambda + \lambda_{cc_4})p_4(t), \quad (5)$$

$$\frac{\partial p_5(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial p_5(x, t)}{\partial t} = -\mu_5(x)p_5(x, t), \quad (6)$$

$$\frac{\partial p_6(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial p_6(x, t)}{\partial t} = -\mu_6(x)p_6(x, t), \quad (7)$$

$$p_5(0, t) = \lambda[p_3(t) + p_4(t)], \quad (8)$$

$$p_6(0, t) = \sum_{i=0}^4 \lambda_{cc_i} p_i(t), \quad (9)$$

$$p_0(0) = 1, p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = p_4(0) =$$

$$p_5(x, 0) = p_6(x, 0) = 0, \quad (10)$$

其中: $(x, t) \in [0, \infty) \times [0, \infty)$ $p_0(t)$ 为 2 个部件正常工作和备用部件完好的概率; $p_1(t)$ 为 1 个部件正常工作而另 1 个部件故障和备用部件完好的概率; $p_2(t)$ 为 2 个部件正常工作, 且备用部件故障的概率; $p_3(t)$ 为 1 个部件工作而另 1 个部件故障, 且备用部件故障的概率; $p_4(t)$ 为 2 个部件故障, 备用部件工作的概率; $p_5(x, t)$ 为除由共因故障引起的系统故障, 且耗用修复时间为 x 的概率密度; $p_6(x, t)$ 为由共因故障引起的系统故障, 且耗用修复时间为 x 的概率密度; λ 为部件的故障率; λ_5 为温贮备部件或机械装置开关的故障率; λ_{cc_i} 为系统在状态 i 时共因故障率 ($i = 0, 1, 2, 3, 4$); $\mu_5(x)$ 为除由共因故障引起的故障的系统修复率; $\mu_6(x)$ 为由共因故障引起的故障的系统修复率; 且满足:

$$0 \leq \mu_i(x) < \infty, M = \sup_{x \in [0, \infty)} \mu_i(x),$$

$$\int_0^\infty \mu_i(x)dx = \infty, i = 5, 6.$$

下面在 Banach 空间中, 用抽象的 Cauchy 问题描述该系统. 为方便起见, 记

$$a_0 = 2\lambda + \lambda_5 + \lambda_{cc_0},$$

$$a_1 = \lambda + \lambda_5 + \lambda_{cc_1},$$

$$a_2 = 2\lambda + \lambda_{cc_2}, a_3 = \lambda + \lambda_{cc_3}, a_4 = \lambda + \lambda_{cc_4}.$$

$$A = \text{diag}(-a_0, -a_1, -a_2, -a_3, -a_4,$$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{d}{dx} - \mu_5(x), -\frac{d}{dx} - \mu_6(x) & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \int_0^\infty \mu_5(x)dx & \int_0^\infty \mu_6(x)dx \\ 2\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_5 & 2\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

显然 B 是有界线性算子.

取状态空间

$$X = \{p \in R^5 \times L^1[0, \infty) \times L^1[0, \infty) \mid \|p\| = \sum_{i=0}^4 \|p_i\| + \sum_{i=5}^6 \|p_i\|_{L^1[0, \infty)}\},$$

显然 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个 Banach 空间, 并且取算子 A 的定义域为:

$$D(A) = \left\{ p \in X \mid \begin{array}{l} \frac{dp_i(x)}{dx} \in L^1[0, \infty), \\ p_i(x) \text{ 是绝对连续函数, } i=5, 6, \\ p_5(0) = \lambda[p_3 + p_4], p_6(0) = \sum_{i=0}^4 \lambda_{cc_i} p_i \end{array} \right\},$$

则系统方程(1)~(10)可描述为 Banach 空间 X 中一个抽象的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} \frac{dp(t)}{dt} = (A+B)p(t), \\ p(0) = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\ p(t) = (p_0(t), p_1(t), p_2(t), p_3(t), \\ p_4(t), p_5(x, t), p_6(x, t)). \end{cases}$$

1 系统的稳态解

先解方程:

$$(\gamma I - A - B)p = 0,$$

得到

$$\frac{dp_j(x)}{dx} + (\gamma + \mu_j(x))p_j(x) = 0, j = 5, 6,$$

$$p_i(x) = p_i(0)e^{-\int_0^x (\gamma + \mu_i(\xi))d\xi}, i = 5, 6,$$

于是

$$(\gamma + a_0)p_0 - \sum_{i=5}^6 p_i(0) \int_0^\infty \mu_i(x) e^{-\int_0^x (\gamma + \mu_i(\xi))d\xi} dx = 0.$$

得到如下方程组:

$$\begin{cases} (\gamma + a_0)p_0 - \sum_{i=5}^6 p_i(0) \int_0^\infty \mu_i(x) e^{-\int_0^x (\gamma + \mu_i(\xi))d\xi} dx = 0, \\ -2\lambda p_0 + (\gamma + a_1)p_1 = 0, \\ -\lambda_5 p_0 + (\gamma + a_2)p_2 = 0, \\ -\lambda_5 p_1 - 2\lambda p_2 + (\gamma + a_3)p_3 = 0, \\ -\lambda p_1 + (\gamma + a_4)p_4 = 0, \\ \lambda p_3 + \lambda p_4 - p_5(0) = 0, \\ \sum_{i=0}^4 \lambda_{cc_i} p_i(t) - p_6(0) = 0, \end{cases} \quad (11)$$

$$\text{令 } \mu_{iy} = \int_0^\infty \mu_i(x) e^{-\int_0^x (\gamma + \mu_i(\xi))d\xi} dx, i = 5, 6.$$

记方程组(11)的系数行列式为 $\det(\gamma)$, 则有:

$$\det(\gamma) = \begin{vmatrix} \gamma + a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_{5,\gamma} & -\mu_{6,\gamma} \\ -2\lambda & \gamma + a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_5 & 0 & \gamma + a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_5 & -2\lambda & \gamma + a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & \gamma + a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \lambda & -1 & 0 \\ \lambda_{cc_0} & \lambda_{cc_1} & \lambda_{cc_2} & \lambda_{cc_3} & \lambda_{cc_4} & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

若 $\gamma \in R$ 是 $A+B$ 的本征值, 则 $\det(\gamma) = 0$, 反之, 若 $\gamma \in R$, 使得 $\det(\gamma) = 0$, 那么 $(p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5(0)e^{-\int_0^x (\gamma + \mu_5(\xi))d\xi}, p_6(0)e^{-\int_0^x (\gamma + \mu_6(\xi))d\xi}) \in D(A+B)$ 是方程组(11)的一个解. 特别当 $\gamma = 0$ 时, $\mu_{iy} = 1, i = 5, 6$, 有 $\det(\gamma) = 0$, 即 $\gamma = 0$ 是算子 $A+B$ 的本征值, 相应的本征向量的分量为:

$$\begin{cases} p_1 = (2\lambda / a_1)p_0, \\ p_2 = (\lambda_5 / a_2)p_0, \\ p_3 = (2\lambda\lambda_5 / a_3)(1/a_2 + 1/a_1)p_0, \\ p_4 = (2\lambda^2 / (a_1a_4))p_0, \\ p_5(x) = 2\lambda^2 p_0 (\lambda_5 / (a_3a_2) + \lambda_5 / (a_3a_1) + \\ \lambda / (a_1a_4)) e^{-\int_0^x (\mu_5(\xi))d\xi}, \\ p_6(x) = p_0 (\lambda_{cc_0} + \lambda_{cc_1} (2\lambda/a_1) + \lambda_{cc_2} (\lambda_5/a_2) + \lambda_{cc_3} \cdot \\ (2\lambda\lambda_5/a_3)(1/a_2 + 1/a_1) + \lambda_{cc_4} \frac{2\lambda^2}{a_1a_4}) e^{-\int_0^x (\mu_6(\xi))d\xi}, \end{cases} \quad (12)$$

即 0 是系统算子的 $A+B$ 的本征值, 并且对应本征值的本征向量空间是一维的线性空间, 因此本征值 0 的几何重数为 1. 再取 $Q(1, 1, 1, 1, 1, 1)$, 则有:

$$\langle p, Q \rangle = \sum_{i=0}^4 p_i + \sum_{i=5}^6 \int_0^\infty p_i(x) dx = \|p_i(x)\|_{L^1[0, \infty)} > 0,$$

且对任意的 $p \in D(A+B)$, 有 $\langle (A+B)P, Q \rangle = 0$, 即 $(A+B)^*Q = 0$, 从而得到 0 是算子 $A+B$ 和共轭算子 $(A+B)^*$ 的代数重数为 1 的本征值; 即 0 是算子 $A+B$ 的简单本征值.

将(12)式本征向量规范化得到:

$$N = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2\lambda}{a_1} + \frac{\lambda_5}{a_2} + \frac{2\lambda\lambda_5}{a_3} \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_1} \right) + \frac{2\lambda^2}{a_4} + \\ 2\lambda^2 \left(\frac{\lambda_5}{a_3a_2} + \frac{\lambda_5}{a_3a_1} + \frac{\lambda}{a_1a_4} \right) e^{-\int_0^x (\mu_5(\xi))d\xi} + \\ \left(\lambda_{cc_0} + \lambda_{cc_1} \frac{2\lambda}{a_1} + \lambda_{cc_2} \frac{\lambda_5}{a_2} + \lambda_{cc_3} \frac{2\lambda\lambda_5}{a_3} \left(\frac{1}{a_2} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{a_1} \right) + \lambda_{cc_4} \frac{2\lambda^2}{a_1a_4} \right) e^{-\int_0^x (\mu_6(\xi))d\xi} \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} p_0 = (1/N)p_0, \\ p_1 = (1/N)(2\lambda/a_1)p_0, \\ p_2 = (1/N)(\lambda_5/a_2)p_0, \\ p_3 = (1/N)(2\lambda\lambda_5/a_3)(1/a_2 + 1/a_1)p_0, \\ p_4 = (1/N)(2\lambda^2/(a_1a_4))p_0, \\ p_5(x) = (\lambda^2 p_0 / N)(2\lambda_5 / (a_3a_2) + \\ 2\lambda_5 / (a_3a_1) + 2\lambda / (a_1a_4)) e^{-\int_0^x (\mu_5(\xi))d\xi}, \\ p_6(x) = (1/N)p_0(\lambda_{cc_0} + \lambda_{cc_1}(2\lambda/a_1) + \\ \lambda_{cc_2}(\lambda_5/a_2) + \lambda_{cc_3}(2\lambda\lambda_5/a_3)(1/a_2 + \\ 1/a_1) + \lambda_{cc_4}(2\lambda^2/(a_1a_4))) e^{-\int_0^x (\mu_6(\xi))d\xi}, \end{cases}$$

故得到本征值 0 对应的一个非负本征向量,

$$p^* = (p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5(x, t), p_6(x, t)), \text{ 且 } \|p^*\| = 1.$$

引理 1 0 是算子的简单本征值, 设 p^* 是相应的本征值 0 对应的一个非负本征向量, 且 $\|p^*\| = 1$, $Q(1, 1, 1, 1, 1, 1)$, 则系统的动态非负解依范数收敛于稳态解 p^* , 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} p(x, t) = \langle P_0, Q \rangle p^* = p^*$, 其中 P_0 是系统的初值.

由此可知, 系统存在唯一的非负稳定解, 解集合的维数为 1, 并有:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(x, t) = \langle P_0, Q \rangle p(x) = p(x) = (p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5(x), p_6(x)),$$

于是稳态解满足方程

$$\begin{aligned} -a_0 p_0 + \int_0^\infty p_5(x) \mu_5(x) dx + \int_0^\infty p_6(x) \mu_6(x) dx &= 0, \\ 2\lambda p_0 - a_1 p_1 &= 0, \\ \lambda_5 p_0 - a_2 p_2 &= 0, \end{aligned}$$

$$\lambda_5 p_1 + 2\lambda p_2 - a_3 p_3 = 0, \quad (13)$$

$$\lambda p_1 - a_4 p_4 = 0,$$

$$dp_5(x)/dx = -\mu_5(x)p_5(x),$$

$$dp_6(x)/dx = -\mu_6(x)p_6(x),$$

$$p_5(0) = \lambda[p_3 + p_4],$$

$$p_6(0) = \sum_{i=0}^4 \lambda_{cc_i} p_i.$$

2 稳态解的最优控制

设容许控制集

$$U = \left\{ \begin{aligned} &\mu(x) = (\mu_5(x), \mu_6(x)) \in L^\infty[0, \infty) \times L^\infty[0, \infty) \\ &0 \leq \mu_i(x) \leq M < \infty, M = \sup_{x \in [0, \infty)} \mu_i(x) \\ &\int_0^\infty \mu_i(x) dx = +\infty, \\ &i = 5, 6 \end{aligned} \right\},$$

则 U 为 $L^\infty[0, \infty) \times L^\infty[0, \infty)$ 上的闭凸集.

我们希望找到 $\mu^*(x) \in U$, 使得:

$$J(\mu^*(x)) = \inf_{\mu(x) \in U} J(\mu(x)). \quad (14)$$

设预期稳态解概率为:

$$\bar{p}(x) \in R^5 \times L^1[0, \infty) \times L^1[0, \infty),$$

取指标泛函

$$J(\mu(x)) = \|\mu(x) - \bar{p}(x)\|^2,$$

其中: $p(\mu(x))$ 是系统对应于 $\mu(x)$ 的稳态解.

为求解问题(14), 重新定义指标泛函:

$$\tilde{J}(p(x)) = \|p(x) - \bar{p}(x)\|^2, \text{ 令集合}$$

$$W = \left\{ \begin{aligned} &p(x) \in R^5 \times L^1[0, \infty) \times L^1[0, \infty) \mid \exists \mu(x) \in U, \\ &\text{使系统稳态解存在} \end{aligned} \right\},$$

可修复系统的最优控制解问题转化为寻求 $\mu^*(x) \in U$, 使与之对应的稳态解 $p^*(x) \in W$, 满足:

$$\tilde{J}(p^*(x)) = \inf_{p(x) \in W} \tilde{J}(p(x)),$$

其中: $\mu^*(x)$ 称为可修复系统的最优控制元.

定理 1 W 是 $R^5 \times L^1[0, \infty) \times L^1[0, \infty)$ 中闭凸集.

证明 凸性: 设 $p^{(1)}(x), p^{(2)}(x) \in W$, 由 W 定义知存在 $\mu^{(1)}(x), \mu^{(2)}(x) \in U$, 使得 $p^{(1)}(x), p^{(2)}(x)$ 分别是方程组对应 $\mu^{(1)}(x), \mu^{(2)}(x)$ 的稳态解, 即

$$-a_0 p_0^{(k)} + \int_0^\infty p_5^{(k)}(x) \mu_5^{(k)}(x) dx +$$

$$\int_0^\infty p_6^{(k)}(x) \mu_6^{(k)}(x) dx = 0,$$

$$2\lambda p_0^{(k)} - a_1 p_1^{(k)} = 0, \quad \lambda_5 p_0^{(k)} - a_2 p_2^{(k)} = 0,$$

$$\lambda_5 p_1^{(k)} + 2\lambda p_2^{(k)} - a_3 p_3^{(k)} = 0,$$

$$\lambda p_1^{(k)} - a_4 p_4^{(k)} = 0,$$

$$dp_5^{(k)}(x)/dx = -\mu_5^{(k)}(x)p_5^{(k)}(x),$$

$$dp_6^{(k)}(x)/dx = -\mu_6^{(k)}(x)p_6^{(k)}(x),$$

$$p_5^{(k)}(0) = \lambda[p_3^{(k)} + p_4^{(k)}],$$

$$p_6^{(k)}(0) = \sum_{i=0}^4 \lambda_{cc_i} p_i^{(k)}.$$

其中: $k=1,2$.

对任意 $\tau \in [0,1]$, 考虑 $p(x) = \tau p^{(1)}(x) + (1-\tau) \cdot p^{(2)}(x)$, 因为 $p^{(1)}(x), p^{(2)}(x)$ 分别是方程组对应 $\mu^{(1)}(x)$ 和 $\mu^{(2)}(x)$ 稳态解, 所以 $p_i^{(1)}(x) > \varepsilon_1, p_i^{(2)}(x) > \varepsilon_2$, 故有 $\tau p_i^{(1)}(x) + (1-\tau)p_i^{(2)}(x) > \tau\varepsilon_1 + (1-\tau)\varepsilon_2 > 0$.

设 $\mu(x) = (\mu_5(x), \mu_6(x))$, 令

$$\mu_i(x) = \frac{\tau \mu_i^{(1)}(x) p_i^{(1)}(x) + (1-\tau) \mu_i^{(2)}(x) p_i^{(2)}(x)}{\tau p_i^{(1)}(x) + (1-\tau) p_i^{(2)}(x)},$$

$$i=5,6.$$

于是有:

$$\begin{aligned} 0 &= \tau(-a_0 p_0^{(1)} + \int_0^\infty p_5^{(1)}(x) \mu_5^{(1)}(x) dx + \\ &\quad \int_0^\infty p_6^{(1)}(x) \mu_6^{(1)}(x) dx) + (1-\tau)(-a_0 p_0^{(2)} + \\ &\quad \int_0^\infty p_5^{(2)}(x) \mu_5^{(2)}(x) dx + \int_0^\infty p_6^{(2)}(x) \mu_6^{(2)}(x) dx) = \\ &= -a_0[\tau p_0^{(1)}(x) + (1-\tau)p_0^{(2)}(x)] + \\ &\quad \int_0^\infty [\tau p_5^{(1)}(x) \mu_5^{(1)}(x) dx + (1-\tau)p_5^{(2)}(x) \cdot \\ &\quad \mu_5^{(2)}(x)] dx + \int_0^\infty [\tau p_6^{(1)}(x) \mu_6^{(1)}(x) dx + \\ &\quad (1-\tau)p_6^{(2)}(x) \mu_6^{(2)}(x)] dx = -a_0 p_0 + \\ &\quad \int_0^\infty p_5(x) \mu_5(x) dx + \int_0^\infty p_6(x) \mu_6(x) dx. \end{aligned}$$

由于 $\mu^{(k)}(x) = (\mu_5^{(k)}(x), \mu_6^{(k)}(x)) \in U, k=1,2$. 因此 $0 \leq \mu_i^{(k)}(x) \leq M$, 则 $\mu(x) = (\mu_5(x), \mu_6(x)) \in U$. 其他方程同理可证, 故 W 是凸集.

闭性: 任取 $p^{(n)}(x) \in W$, 由 W 定义可知, 存在 $\mu^{(n)}(x) \in U$, 使 $p^{(n)}(x)$ 为方程组与之对应的稳态解. 因 $L^1[0, \infty) \times L^1[0, \infty)$ 中有界集 U 是弱*闭的, 故由 $\{\mu^{(n)}(x)\}$ 有界知, 必存在一个 U 中弱*的收敛子列(不妨设其本身) $\mu^{(n)}(x) \xrightarrow{w^*} \tilde{\mu}(x)$, 则 $\tilde{\mu}(x) \in U$, $p^{(n)}(x)$ 依范数收敛于 $\tilde{p}(x)$, 则有:

$$p_i^{(n)} \rightarrow \tilde{p}_i, i=0,1,2,3,4, p_j^{(n)}(x) \rightarrow \tilde{p}_j(x), j=5,6.$$

下面证 $\tilde{p}(x) \in W$, 由(13)式整理得:

$$p_1^{(n)} = \frac{2\lambda}{a_1} p_0^{(n)}, p_2^{(n)} = \frac{\lambda_5}{a_2} p_0^{(n)},$$

$$p_3^{(n)} = \frac{2\lambda\lambda_5}{a_3} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) p_0^{(n)}, p_4^{(n)} = \frac{2\lambda^2}{a_1 a_4} p_0^{(n)},$$

$$p_5^{(n)}(x) = p_5^{(n)}(0) e^{-\int_0^x \mu_5^{(n)}(\zeta) d\zeta} = 2\lambda^2 \left(\frac{\lambda_5}{a_3 a_1} + \frac{\lambda_5}{a_3 a_2} + \frac{\lambda}{a_1 a_4} \right) p_0^{(n)} e^{-\int_0^x \mu_5^{(n)}(\zeta) d\zeta},$$

$$p_6^{(n)}(x) = p_6^{(n)}(0) e^{-\int_0^x \mu_6^{(n)}(\zeta) d\zeta} = \left(\lambda_{cc_0} + \lambda_{cc_1} \frac{2\lambda}{a_1} + \right.$$

$$\left. \lambda_{cc_2} \frac{\lambda_5}{a_2} + \lambda_{cc_3} \left(\frac{2\lambda\lambda_5}{a_3 a_1} + \frac{2\lambda\lambda_5}{a_3 a_2} \right) + \lambda_{cc_4} \frac{2\lambda^2}{a_1 a_4} \right) \cdot$$

$$p_0^{(n)} e^{-\int_0^x \mu_6^{(n)}(\zeta) d\zeta},$$

$$-a_0 p_0^{(n)} + \int_0^\infty p_5^{(n)}(x) \mu_5^{(n)}(x) dx +$$

$$\int_0^\infty p_6^{(n)}(x) \mu_6^{(n)}(x) dx = 0,$$

而

$$2\lambda^2 \left(\frac{\lambda_5}{a_3 a_1} + \frac{\lambda_5}{a_3 a_2} + \frac{\lambda}{a_1 a_4} \right) p_0^{(n)} e^{-\int_0^x \mu_5^{(n)}(\zeta) d\zeta} \xrightarrow{w}$$

$$2\lambda^2 \left(\frac{\lambda_5}{a_3 a_1} + \frac{\lambda_5}{a_3 a_2} + \frac{\lambda}{a_1 a_4} \right) \tilde{p}_0^{(n)} e^{-\int_0^x \tilde{\mu}_5^{(n)}(\zeta) d\zeta},$$

$$\left(\lambda_{cc_0} + \lambda_{cc_1} \frac{2\lambda}{a_1} + \lambda_{cc_2} \frac{\lambda_5}{a_2} + \lambda_{cc_3} \left(\frac{2\lambda\lambda_5}{a_3 a_1} + \frac{2\lambda\lambda_5}{a_3 a_2} \right) + \right.$$

$$\left. \lambda_{cc_4} \frac{2\lambda^2}{a_1 a_4} \right) \tilde{p}_0^{(n)} e^{-\int_0^x \tilde{\mu}_6^{(n)}(\zeta) d\zeta} \xrightarrow{w}$$

$$\left(\lambda_{cc_0} + \lambda_{cc_1} \frac{2\lambda}{a_1} + \lambda_{cc_2} \frac{\lambda_5}{a_2} + \lambda_{cc_3} \right) \cdot$$

$$\left(\frac{2\lambda\lambda_5}{a_3 a_1} + \frac{2\lambda\lambda_5}{a_3 a_2} \right) + \lambda_{cc_4} \frac{2\lambda^2}{a_1 a_4} \tilde{p}_0^{(n)} e^{-\int_0^x \tilde{\mu}_6^{(n)}(\zeta) d\zeta}.$$

于是

$$\tilde{p}_1^{(n)} = \frac{2\lambda}{a_1} \tilde{p}_0^{(n)}, \tilde{p}_2^{(n)} = \frac{\lambda_5}{a_2} \tilde{p}_0^{(n)},$$

$$\tilde{p}_3^{(n)} = \frac{2\lambda\lambda_5}{a_3} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) \tilde{p}_0^{(n)}, \tilde{p}_4^{(n)} = \frac{2\lambda^2}{a_1 a_4} \tilde{p}_0^{(n)},$$

$$\tilde{p}_5^{(n)}(x) = 2\lambda^2 \left(\frac{\lambda_5}{a_3 a_1} + \frac{\lambda_5}{a_3 a_2} + \frac{\lambda}{a_1 a_4} \right) \tilde{p}_0^{(n)} e^{-\int_0^x \tilde{\mu}_5^{(n)}(\zeta) d\zeta},$$

$$\tilde{p}_6^{(n)}(x) = \left(\lambda_{cc_0} + \lambda_{cc_1} \frac{2\lambda}{a_1} + \lambda_{cc_2} \frac{\lambda_5}{a_2} + \lambda_{cc_3} \left(\frac{2\lambda\lambda_5}{a_3 a_1} + \right. \right.$$

$$\left. \frac{2\lambda\lambda_5}{a_3 a_2} \right) + \lambda_{cc_4} \frac{2\lambda^2}{a_1 a_4} \tilde{p}_0^{(n)} e^{-\int_0^x \tilde{\mu}_6^{(n)}(\zeta) d\zeta},$$

$$-a_0 \tilde{p}_0^{(n)} + \int_0^\infty \tilde{p}_5^{(n)}(x) \tilde{\mu}_5^{(n)}(x) dx +$$

$$\int_0^\infty \tilde{p}_6^{(n)}(x) \tilde{\mu}_6^{(n)}(x) dx = 0,$$

综上, $\tilde{p}^{(n)}(x) \in W$, 故 W 是闭集.

定理 2 $\tilde{J}(p(x))$ 是 W 的严格凸泛函.

证明 对 $\forall p^{(1)}(x), p^{(2)}(x) \in W, 0 < \tau < 1, p^{(1)}(x) \neq p^{(2)}(x)$ 有:

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\tau p^{(1)}(x) + (1-\tau)p^{(2)}(x)) &= \\ \|\tau p^{(1)}(x) + (1-\tau)p^{(2)}(x) - \bar{p}(x)\|^2 &< \\ \tau \|p^{(1)}(x) - \bar{p}(x)\|^2 + (1-\tau) \|p^{(2)}(x) - \bar{p}(x)\|^2 &= \tau \tilde{J}(p^{(1)}(x)) + (1-\tau) \tilde{J}(p^{(2)}(x)), \end{aligned}$$

故 $\tilde{J}(p(x))$ 是 W 上的严格凸泛函.

引理 2^[3] (Banach-Saks-Mazur) 设 X 是一个赋范线性空间, $\{x_n\}$ 是 X 中的一列元素且 x_n 在 X 中弱收敛至 x_0 , 那么一定存在 $\{x_n\}$ 中的凸组合列, 使其强收敛至 x_0 .

定理 3 存在唯一的 $p^*(x) \in W$, 使 $\tilde{J}(p^*(x)) = \inf_{p(x) \in W} \tilde{J}(p(x))$.

证明 在 W 中取极小化序列 $\{p^{(n)}(x)\}$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{J}(p^{(n)}(x)) = \inf_{p(x) \in W} \tilde{J}(p(x))$, 而 $\{p^{(n)}(x)\}$ 是有界的, 因此存在收敛子列, 不妨设其本身 $p^{(n)}(x) \xrightarrow{w} p^*(x)$. 而且满足 $\tilde{J}(p^{(n+1)}(x)) < \tilde{J}(p^{(n)}(x))$, $n=1, 2, \dots$. 由引理 2 可以知道, 存在 $\{p^{(n)}(x)\}$ 中的凸组合 $q^{(n)}(x) = \sum_i \alpha_i^{(n)} p_{n_i}^{(n)}(x)$, 其中 $\sum_i \alpha_i^{(n)} = 1$, 使得 $q^{(n)}(x)$ 强收敛到 $p^*(x)$. 由定理 1 知 $q^{(n)}(x) \in W$, $p^*(x) \in W$, 且

$$\inf_{p(x) \in W} \tilde{J}(p(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{J}(p^{(n)}(x)) \leq$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{J}(q^{(n)}(x)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i \alpha_i^{(n)} \tilde{J}(p_{n_i}^{(n)}(x)),$$

而 $\sum_i \alpha_i^{(n)} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{J}(p_{n_i}^{(n)}(x)) = \inf_{p(x) \in W} \tilde{J}(p(x))$, 所以 $\tilde{J}(p^*(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{J}(q^{(n)}(x)) = \inf_{p(x) \in W} \tilde{J}(p(x))$, 由 $\tilde{J}$ 的严格凸性知 $p^*(x)$ 是唯一.

定理 4 存在唯一的 $\mu^*(x) \in U$, 使 $J(\mu^*(x)) = \inf_{\mu(x) \in U} J(\mu(x))$.

3 结语

笔者先利用 Banach 空间理论中的 C_0 半群理论与谱理论, 给出了系统的时间依赖解的渐近稳定性, 再利用 Banach 空间理论的指标泛函和闭凸集有关概念性质把求解系统的最优控制问题转化为寻求系统的最优控制元.

参考文献:

- [1] Yang N F, Dhillon B S. Availability analysis of a repairable standby Human-machine system[J]. Microelectron Reliab, 1995, 35(11):1401-1413.
- [2] 王梅枝, 高建平. 具有共因故障的温贮备并联可修复系统解的存在唯一性[J]. 周口师范学院学报, 2004, 21(5):24-27.
- [3] 张恭庆, 郭懋正. 泛函分析(上)[M]. 北京: 北京大学出版社, 1990.

Optimal Control of Repairable System with a Warm Standby and Common Cause Failures

HU Xiao-xiao¹, LÜ Dan¹, WU Yan²

(1.School of Information & Engineering, Wenzhou Medical University, Wenzhou 325035, China;

2.Department of Mathematics, Jiaying University, Jiaying 314001, China)

Abstract: This paper studies the repairable system with a warm standby and common cause failures. We use a normal index function as a controllable criterion of the system, and discuss the optimal control problem with the expected probability of the stable solution using the Banach space theorems.

Key words: repairable system; optimal control; minimizing sequences

(责任编辑 史小丽)