

利用概率方法计算两类无穷积分

商金耀, 张晓敏*

(宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 提出了两类无穷积分 $\int_0^{+\infty} P_m(x)e^{\alpha x+\gamma} dx$ 和 $\int_0^{+\infty} Q_n(x)e^{\alpha x^2+\beta x+\gamma} dx$, 通过递归并借助概率统计中的伽玛分布和正态分布的有关概念和性质得到其解法, 并给出了结果的一般表达式. 该方法同时为具有 $\int_0^{+\infty} f(x)e^{\alpha x+\gamma} dx$ 或 $\int_0^{+\infty} g(x)e^{\alpha x^2+\beta x+\gamma} dx$ 形式, 但无法计算的积分提供了近似的计算方法.

关键词: 无穷积分; 伽玛分布; 正态分布; 概率密度函数; 递归

中图分类号: O211.9

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2014) 02-0097-04

高等数学中只给出了无穷积分的一些收敛判别准则和可以按定义计算的一些简单例子, 对具体计算的方法与技巧涉及很少^[1]. 而其他学科特别是保险精算中经常会遇到计算 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 这样的问题, 当 $f(x)$ 的具体形式不同, 其计算方法也不同, 甚至无法计算出结果, 对这种积分没有通用的方法. 笔者提出两大类无穷积分:

$$\int_0^{+\infty} P_m(x)e^{\alpha x+\gamma} dx \text{ 和 } \int_0^{+\infty} Q_n(x)e^{\alpha x^2+\beta x+\gamma} dx,$$

其中:

$$P_m(x) = C_0 + C_1 x^{\tau_1} + C_2 x^{\tau_2} + \cdots + C_m x^{\tau_m},$$

$$Q_n(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_n x^n,$$

$C_i, \tau_j, \alpha, \beta$ 和 γ 为常数, 且 $\tau_j > -1$ 和 $\alpha < 0$, 这里要求 $\alpha < 0$ 是为了所求积分的收敛性. 由于它们与概率统计中某些分布函数有某种相似, 因此可以从这些分布的有关性质去解决这类问题.

1 预备知识^[2]

1.1 伽玛分布的定义与性质

若随机变量 X 的概率密度函数为:

$$f(x) = \frac{1}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\theta}, x > 0,$$

其中: $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$, 则称 X 服从伽玛分布, 记为 $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \theta)$, ($\alpha, \theta > 0$); 指数分布是伽玛分布当 $\alpha = 1$ 时的特例.

伽玛函数的性质:

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

由概率的规范性可知:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\theta} dx = 1.$$

1.2 正态分布的定义与性质

若随机变量 X 的密度函数为:

$$f(x) = (1/(\sqrt{2\pi}\sigma)) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty,$$

则称 X 服从正态分布, 记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

性质 1

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right),$$

$$-\infty \leq a < b \leq \infty,$$

其中: $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布的累积分布函数.

2 用概率方法解决积分问题

2.1 第 1 类积分问题 $\int_0^{+\infty} P_m(x)e^{\alpha x+\gamma} dx$

情形 1 积分形式为 $\int_0^{+\infty} C e^{\alpha x} dx$, 其中 C, α 为常数, 且 $\alpha < 0$.

这个积分与指数分布函数类似, 可通过其规范性求解.

解 由指数分布的规范性 $\int_0^{+\infty} (1/\theta) e^{-t/\theta} dt = 1$, 得 $\int_0^{+\infty} e^{-t/\theta} dt = \theta$.

令 $\alpha = -1/\theta$, 即 $\theta = -1/\alpha$, 所以

收稿日期: 2013-04-27.

宁波大学学报(理工版) 网址: <http://journal.lg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 浙江省统计局 2012 年度统计学术类课题 (ZX2012000058); 宁波大学刘孔爱菊基金.

第一作者: 商金耀 (1988-), 男, 湖北黄冈人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 精算数学. E-mail: shangjinyao@163.com

*通信作者: 张晓敏 (1977-), 男, 湖北鄂州人, 博士/副教授, 主要研究方向: 精算科学与金融数学. E-mail: zhangxiaomin@nbu.edu.cn

原式 = $C \int_0^{+\infty} e^{\alpha x} dx = -C / \alpha$.

情形 2 积分形式为 $\int_0^{+\infty} (C_0 + C_1 x) e^{\alpha x + \gamma} dx$, 其中: C_0, C_1, α 和 γ 为常数, 且 $\alpha < 0$.

这个积分可写为 2 个积分之和, 且其中一个可由情形 1 得; 另一个和伽玛分布函数类似, 因此可通过其规范性来解决.

解 原式 = $e^\gamma (C_0 \int_0^{+\infty} e^{\alpha x} dx + C_1 \int_0^{+\infty} x e^{\alpha x} dx)$,

由情形 1 知, $\int_0^{+\infty} e^{\alpha x} dx = -1 / \alpha$.

由伽玛分布的规范性得:

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x/\theta} dx = \theta^2 \Gamma(2) = \theta^2.$$

令 $\alpha = -1/\theta$, 即 $\theta = -1/\alpha$, 可得 $\int_0^{+\infty} x e^{\alpha x} dx = \alpha^{-2}$,

所以,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= e^\gamma [C_0 (-1/\alpha) + C_1 \alpha^{-2}] = \\ &= (e^\gamma (C_1 - C_0 \alpha)) / \alpha^2. \end{aligned}$$

情形 3 积分形式为:

$$\int_0^{+\infty} (C_0 + C_1 x + C_2 x^2) e^{\alpha x + \gamma} dx \quad [3],$$

其中: C_0, C_1, C_2, α 和 γ 为常数, 且 $\alpha < 0$.

所求积分可写为 2 个积分之和, 其中一个可由情形 2 得, 另一个与伽玛分布函数类似, 因此可通过其规范性来解决.

解

$$\text{原式} = \int_0^{+\infty} (C_0 + C_1 x) e^{\alpha x + \gamma} dx + C_2 e^\gamma \int_0^{+\infty} x^2 e^{\alpha x} dx,$$

由情形 2 知,

$$\int_0^{+\infty} (C_0 + C_1 x) e^{\alpha x + \gamma} dx = \frac{e^\gamma (C_1 - C_0 \alpha)}{\alpha^2}.$$

由伽玛分布的规范性得:

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x/\theta} dx = \Gamma(3) \theta^3 = 2\theta^3.$$

令 $\alpha = -1/\theta$, 即 $\theta = -1/\alpha$, 可得:

$$\text{原式} = \frac{e^\gamma (C_1 - C_0 \alpha)}{\alpha^2} + C_2 e^\gamma.$$

$$\left(-\frac{2}{\alpha^3}\right) = \frac{e^\gamma}{\alpha^3} (-C_0 \alpha^2 + C_1 \alpha - 2C_2).$$

情形 4 积分形式为 $\int_0^{+\infty} P_m(x) e^{\alpha x + \gamma} dx$, 其中:

$P_m(x) = C_0 + C_1 x^{\tau_1} + C_2 x^{\tau_2} + \dots + C_m x^{\tau_m}$, $\alpha, \gamma, C_0, C_i, \tau_i$ 和 γ 为常数, 且 $\alpha < 0, \tau_i > -1, i = 1, \dots, m$.

所求积分可化为多个积分之和, 且每个积分具有相同的形式 $\int_0^{+\infty} x^\tau e^{\alpha x} dx$, α 和 τ 为常数, 且

$\alpha < 0, \tau > -1$, 而这积分与伽玛分布函数类似, 因此可通过其规范性求出, 于是可求出所有的积分.

解 由伽玛分布的规范性得:

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x/\theta} dx = \Gamma(\alpha) \theta^\alpha,$$

因此

$$\int_0^{+\infty} x^\tau e^{\alpha x} dx = \Gamma(\tau+1) (-1/\alpha)^{\tau+1},$$

所以

$$\begin{aligned} \text{原式} &= e^\gamma (C_0 \int_0^{+\infty} e^{\alpha x} dx + C_1 \int_0^{+\infty} x^{\tau_1} e^{\alpha x} dx + \dots + \\ &C_m \int_0^{+\infty} x^{\tau_m} e^{\alpha x} dx) = e^\gamma [C_0 \Gamma(1) (-1/\alpha) + \\ &C_1 \Gamma(\tau_1 + 1) (-1/\alpha)^{\tau_1+1} + \dots + \\ &C_m \Gamma(\tau_m + 1) (-1/\alpha)^{\tau_m+1}] = \\ &= -(e^\gamma / \alpha) [C_0 + \sum_{i=1}^m C_i \Gamma(\tau_i + 1) (-1/\alpha)^{\tau_i}]. \end{aligned}$$

特别的, 当 $\tau_i = i, i = 1, \dots, m$ 时,

$$\text{原式} = -(e^\gamma / \alpha) \sum_{i=0}^m C_i i! (-1/\alpha)^i.$$

2.2 第 2 类积分问题 $\int_0^{+\infty} Q_n(x) e^{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx$

情形 5 积分形式为 $\int_0^{+\infty} C e^{\alpha x^2} dx$, 其中 C, α 为常数, 且 $\alpha < 0$.

这种积分若用高等数学中的方法, 通常比较麻烦或困难. 若从概率方面着手, 由于被积函数与正态分布的密度函数极其相似, 因此可通过正态分布的分布函数来解决. 若将被积函数变形, 令 $t = x^2$, 原积分变为 $(C/2) \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{\alpha t} dt$, 这个积分与伽玛分布函数类似, 于是得到借助伽玛分布函数的解法, 而且计算也简单.

解 由伽玛分布的规范性得:

$$\int_0^{+\infty} x^{1/2} e^{-x/\theta} dx = \Gamma(1/2) \theta^{1/2} = \sqrt{\pi} \theta^{1/2}.$$

令 $t = x^2$, 则 $x = t^{(1/2)}$, $dx = (1/2) t^{-(1/2)} dt$, 所以

$$\text{原式} = C/2 \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{\alpha t} dt =$$

$$(C/2) \sqrt{\pi} \sqrt{-1/\alpha} = C/2 \sqrt{-\pi/\alpha}.$$

更一般的积分形式为 $\int_0^{+\infty} C e^{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx$, 其中: C, α, β 和 γ 为常数, 且 $\alpha < 0$, 则

$$\int_0^{+\infty} C e^{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx = C \int_0^{+\infty} e^{\alpha(x+\frac{\beta}{2\alpha})^2 + \frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}} dx =$$

$$C e^{\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{\alpha(x+\frac{\beta}{2\alpha})^2} dx = C e^{\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}} \sqrt{2\pi}.$$

$$\sqrt{-\frac{1}{2\alpha}}[\Phi(+\infty) - \Phi((0 + \frac{\beta}{2\alpha})\sqrt{-2\alpha})] =$$

$$C\sqrt{-\frac{\pi}{\alpha}}\Phi(\frac{\beta}{\sqrt{-2\alpha}})e^{\frac{4\alpha\gamma - \gamma^2}{4\alpha}}.$$

注 对于这类积分, 用正态分布函数的性质比用伽玛分布函数的规范性的通用性更强, 计算更为简单.

情形 6 积分形式为 $\int_0^{+\infty} (C_0 + C_1x)e^{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx$, 其中: C_0, C_1, α, β 和 γ 为常数, 且 $\alpha < 0$.

这积分若用常规变量替换将非常繁琐, 但可改写为 2 个积分之和, 且由情形 1 可知, 只要将积分 $\int_0^{+\infty} xe^{\alpha x^2 + \beta x} dx$ 变为这种形式 $\int_0^{+\infty} Ae^{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx + C$, 再用情形 1 中的方法, 问题就可解决.

解

$$\int_0^{+\infty} xe^{\alpha x^2 + \beta x} dx = \frac{1}{2\alpha} \int_0^{+\infty} (2\alpha x + \beta - \beta)e^{\alpha x^2 + \beta x} dx =$$

$$\frac{1}{2\alpha} \int_0^{+\infty} de^{\alpha x^2 + \beta x} - \frac{\beta}{2\alpha} \int_0^{+\infty} e^{\alpha x^2 + \beta x} dx =$$

$$-\frac{1}{2\alpha} - \frac{\beta}{2\alpha} \int_0^{+\infty} e^{\alpha x^2 + \beta x} dx,$$

所以

$$\text{原式} = \int_0^{+\infty} C_0 e^{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx + C_1 e^{\gamma} \int_0^{+\infty} xe^{\alpha x^2 + \beta x} dx =$$

$$\int_0^{+\infty} C_0 e^{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx + C_1 e^{\gamma} \cdot$$

$$(-\frac{1}{2\alpha} - \frac{\beta}{2\alpha} \int_0^{+\infty} e^{\alpha x^2 + \beta x} dx) =$$

$$\int_0^{+\infty} (C_0 - \frac{C_1\beta}{2\alpha}) e^{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx - \frac{C_1 e^{\gamma}}{2\alpha}.$$

由情形 1 得:

$$\text{原式} = (C_0 - \frac{C_1\beta}{2\alpha}) \sqrt{-\frac{\pi}{\alpha}} \Phi(\frac{\beta}{\sqrt{-2\alpha}}) e^{\frac{4\alpha\gamma - \gamma^2}{4\alpha}} - \frac{C_1 e^{\gamma}}{2\alpha}.$$

情形 7 积分形式为

$$\int_0^{+\infty} (C_0 + C_1x + C_2x^2) e^{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx,$$

其中: $C_0, C_1, C_2, \alpha, \beta$ 和 γ 为常数, 且 $\alpha < 0$.

这个积分较复杂, 若用常规变量替换将十分麻烦. 但由情形 2 可知, 只要将积分 $\int_0^{+\infty} x^2 e^{\alpha x^2 + \beta x} dx$ 转化成这种形式 $\int_0^{+\infty} (A + Bx) e^{\alpha x^2 + \beta x} dx + C$, 再用情形 2 中的方法, 问题就可解决.

解

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{\alpha x^2 + \beta x} dx =$$

$$\frac{1}{2\alpha} \int_0^{+\infty} (2\alpha x^2 + \beta x - \beta x) e^{\alpha x^2 + \beta x} dx =$$

$$\frac{1}{2\alpha} \int_0^{+\infty} x de^{\alpha x^2 + \beta x} - \frac{\beta}{2\alpha} \int_0^{+\infty} x e^{\alpha x^2 + \beta x} dx,$$

又

$$\int_0^{+\infty} x de^{\alpha x^2 + \beta x} = x e^{\alpha x^2 + \beta x} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{\alpha x^2 + \beta x} dx =$$

$$-\int_0^{+\infty} e^{\alpha x^2 + \beta x} dx, (\alpha < 0),$$

所以

$$\text{原式} = \int_0^{+\infty} (C_0 + C_1x) e^{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx + C_2 e^{\gamma} \cdot$$

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{\alpha x^2 + \beta x} dx = \int_0^{+\infty} (C_0 + C_1x) e^{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx +$$

$$C_2 e^{\gamma} (-\frac{1}{2\alpha} \int_0^{+\infty} e^{\alpha x^2 + \beta x} dx - \frac{\beta}{2\alpha} \int_0^{+\infty} x e^{\alpha x^2 + \beta x} dx) =$$

$$\int_0^{+\infty} [(C_0 - \frac{C_2}{2\alpha}) + (C_1 - \frac{C_2\beta}{2\alpha})x] e^{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx.$$

由情形 2 得:

$$\text{原式} = e^{\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}} \{ (C_1 - \frac{C_2\beta}{2\alpha}) (-\frac{1}{2\alpha} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}) +$$

$$[(C_0 - \frac{C_2}{2\alpha}) - \frac{\beta}{2\alpha} (C_1 - \frac{C_2\beta}{2\alpha})] \sqrt{-\frac{\pi}{\alpha}} \Phi(\frac{\beta}{\sqrt{-2\alpha}}) \} =$$

$$e^{\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}} [(-\frac{C_1}{2\alpha} + \frac{C_2\beta}{4\alpha^2}) e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} + (C_0 -$$

$$\frac{C_1\beta + C_2}{2\alpha} + \frac{C_2\beta^2}{4\alpha^2}) \sqrt{-\frac{\pi}{\alpha}} \Phi(\frac{\beta}{\sqrt{-2\alpha}})] .$$

情形 8 积分形式为 $\int_0^{+\infty} Q_n(x) e^{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx$, 其中: $Q_n(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_nx^n$, α, β, γ 和 C_i 为常数, 且 $\alpha < 0$.

若记 $A_n = \int_0^{+\infty} Q_n(x) e^{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx$, 则

$$A_n = A'_{n-1} = \int_0^{+\infty} Q'_{n-1}(x) e^{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx,$$

其中:

$$Q'_{n-1}(x) = Q_{n-3} + [C_{n-2} - \frac{C_n}{2\alpha}(n-1)]x^{n-2} +$$

$$(C_{n-1} - \frac{C_n\beta}{2\alpha})x^{n-1}, n \geq 3,$$

若继续下去, 可得 $A_n = A'_{n-1} = A'_{n-2} = \dots = A'_2$, 但该方法计算复杂. 若将所求积分化为 $(n+1)$ 个积分之和, 则所有积分均具有相同的形式

$$\int_0^{+\infty} C_i x^i e^{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx,$$

这样方便计算, 通过类比和递归可得最后结果.

$$\text{解 记 } I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx, \text{ 则}$$

$$I_n = \frac{1}{2\alpha} \int_0^{+\infty} (2\alpha x + \beta - \beta) x^{n-1} e^{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx =$$

$$\frac{1}{2\alpha} \int_0^{+\infty} x^{n-1} d e^{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} - \frac{\beta}{2\alpha} \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx =$$

$$-\frac{n-1}{2\alpha} I_{n-2} - \frac{\beta}{2\alpha} I_{n-1}, n \geq 2,$$

其中:

$$I_0 = \sqrt{-\frac{\pi}{\alpha}} \Phi\left(\frac{\beta}{\sqrt{-2\alpha}}\right) e^{\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}},$$

$$I_1 = -\frac{e^\gamma}{2\alpha} - \frac{\beta}{2\alpha} I_0,$$

所以

$$\text{原式} = C_0 \int_0^{+\infty} e^{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx + C_1 \int_0^{+\infty} x e^{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx + \dots +$$

$$C_n \int_0^{+\infty} x^n e^{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx = \sum_{i=0}^n C_i I_i.$$

特别的, 当 $\beta = 0$ 时,

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{\alpha x^2 + \gamma} dx \stackrel{\text{令 } t=x^2}{=} \frac{e^\gamma}{2} \int_0^{+\infty} t^{\frac{n-1}{2}} e^{\alpha t} dt =$$

$$\frac{e^\gamma}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{n+1}{2}},$$

所以

$$\text{原式} = \frac{e^\gamma}{2} \sum_{i=0}^n C_i \Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right) \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{i+1}{2}}.$$

3 结语

在本文的计算过程中, 密切注意被积函数的特点和积分区域, 选择合适的分布函数, 从概率分布的角度解决计算问题. 同时, 对较难处理的问题, 通过递归转化成已处理的, 避免了复杂的计算.

由 Weierstrass 逼近理论可以知道, 连续函数 $f(x)$ 可以用一元多项式无限逼近, 因此本文中研究的两类积分可以为具有形式 $\int_0^{+\infty} f(x) e^{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx$ 或 $\int_0^{+\infty} f(x) e^{\alpha x + \gamma} dx$ 难以计算的积分提供近似计算, 但其结果的有效性尚有待进一步研究.

参考文献:

- [1] 华东师范大学数学系. 数学分析(上册)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004:265-275.
- [2] 中国精算师协会. 精算模型[M]. 北京: 中国财政经济出版社, 2010:47-48.
- [3] 张拥萍, 卢建彬. 一类广义积分的多种计算方法[J]. 河北北方学院学报, 2010, 26(1):9-11.

Calculating of Two Classes of Infinite Integrals with Probabilistic Method

SHANG Jin-yao, ZHANG Xiao-min*

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: In this paper, two classes of infinite integrals $\int_0^{+\infty} P_m(x) e^{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx$ and $\int_0^{+\infty} Q_n(x) e^{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx$ are put forward and solved. The general expressions of the results are derived through recursion in combination with the concept and properties concerning gamma distribution and normal distribution. The solutions proposed in this paper provide the approximating method for calculation of the integrals that bear the unsolvable form of $\int_0^{+\infty} f(x) e^{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx$ or $\int_0^{+\infty} g(x) e^{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx$.

Key words: infinite integral; gamma distribution; normal distribution; probability density function; recursion

(责任编辑 史小丽)