

多元连续型指数分布的识别性

靳淑云, 李国安*

(宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 分别讨论了3个二元连续型指数分布和多元连续型指数分布的识别性, 记 $Z = \min(X_1, X_2)$, $I = i$; 当 $Z = X_i$, $Z = \min(X_1, X_2, X_3)$, $I = i$, 对 (X_1, X_2) 和 (X_1, X_2, X_3) 分别具有 Weinman 型指数分布、Freund 型指数分布、Block-Basu 型指数分布时, 讨论了已知 $Z, (Z, I)$ 的分布情形下, (X_1, X_2) 和 (X_1, X_2, X_3) 的分布参数的识别性状况.

关键词: 连续型指数分布; 识别性; 最小值

中图分类号: O212.4

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2014) 02-0106-03

从二元随机变量的最小值分布去识别二元联合分布中的所含参数, 进而去估计分布参数, 这种形式的分布参数识别性问题源于统计的参数识别和参数估计, 且这种情况广泛存在于可靠性模型和风险模型中. Anderson 等^[1]讨论了已知二元随机变量最小值的分布时, 对应分布参数的识别性问题, Basu 等^[2]讨论了多元正态分布参数的识别性问题, 并对二元正态分布参数的识别性作了完美的解答, 其他文献也就此问题进行了分析和研究^[3-8], 而笔者在此主要对连续型指数分布取最小值时参数是否具有识别性进行了研究.

1 Weinman 型指数分布的识别性

1.1 二元 Weinman 型指数分布的识别性

称 (X_1, X_2) 为服从二元 Weinman 型指数分布的随机变量, 它有如下的密度函数:

$$p(x_1, x_2) = \begin{cases} \exp[-(2/\theta_0 - 1/\theta_1)x_1 - x_2/\theta_1]/\theta_0\theta_1, & x_1 \leq x_2, \\ \exp[-(2/\theta_0 - 1/\theta_2)x_2 - x_1/\theta_1]/\theta_0\theta_1, & x_2 \leq x_1, \end{cases}$$

记为 $(X_1, X_2) \sim \text{WBVED}(\theta_1, \theta_2)$.

令当 $X_1 < X_2$ 时, $I = 1$, 当 $X_1 > X_2$ 时, $I = 2$, 记 $Z = \min(X_1, X_2)$, 并记 (Z, I) 的联合密度为 $p_i f_i(z)$, $i = 1, 2$, 则 z 的密度函数为 $f_z(z)$.

引理 1 设 $(X_1, X_2) \sim \text{WBVED}(\theta_1, \theta_2)$, 则有 $f_z(z) = 2e^{-2z/\theta_0} / \theta_0, z > 0$. 显然, 由引理 1 得到参数 θ_0 可识别, 而参数 θ_1, θ_2 不可识别.

引理 2 设 $(X_1, X_2) \sim \text{WBVED}(\theta_1, \theta_2)$, 则有 $p_i f_i(z) = e^{-2z/\theta_0} / \theta_0, z > 0, i = 1, 2$. 显然, 由引理 2 得到参数 θ_0 可识别, 而参数 θ_1, θ_2 不可识别.

若 $(X'_1, X'_2) \sim \text{WBVED}(\partial_0, \partial_1)$, 令 $Z' = \min(X'_1, X'_2)$, 记 $p'_i f'_i(z)$ 为 (Z', I') ($i = 1, 2$) 的联合密度, 则有如下的识别性定理.

定理 1 若 (Z, I) 与 (Z', I') 有相同的分布, 则有 $\theta_0 = \partial_0$.

证明 由引理 2 可得 $p_i f_i(z) = p'_i f'_i(z)$, $e^{-2z/\theta_0} / \theta_0 = e^{-2z/\partial_0} / \partial_0$, 则由对应项系数可得 $\theta_0 = \partial_0$.

1.2 多元 Weinman 型指数分布的识别性

称 (X_1, X_2, X_3) 为服从三元 Weinman 型指数分布的随机变量, 则它有如下的密度函数:

$$p(x_1, x_2, x_3) = \exp[-(3/\theta_0 - 2/\theta_1)x_1 - (2/\theta_1 - 1/\theta_2)x_2 - x_3/\theta_2]/\theta_1\theta_2\theta_3,$$

其中, $x_i < x_j < x_k, i, j, k = 1, 2, 3$, 记为 $(X_1, X_2, X_3) \sim \text{WBVED}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$.

$Z = \min(X_1, X_2, X_3)$, 并记 (Z, I) 的联合密度为 $p_i f_i(z), i = 1, 2, 3$.

引理 3 $(X_1, X_2, X_3) \sim \text{WTVED}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, 则 $p_i f_i(z) = (\exp[-3z/\theta_0]) / 2\theta_0, z > 0, i = 1, 2, 3$.

收稿日期: 2013-05-16.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journal.lg.nbu.edu.cn/>

第一作者: 靳淑云 (1986-), 女, 河南商丘人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 应用数理统计. E-mail: jinshuyun2046@163.com

*通信作者: 李国安 (1964-), 男, 浙江宁波人, 副教授, 主要研究方向: 应用数理统计. E-mail: liguoan@nbu.edu.cn

证明 $P(I=1, Z>z) =$

$$6 \int_z dx_1 \int_{x_1} dx_2 \int_{x_2} ((\exp[-(3/\theta_0 - 2/\theta_1)x_1 - (2/\theta_1 - 1/\theta_2)x_2 - x_3/\theta_2]) / \theta_0 \theta_1 \theta_2) dx_3 = (\exp(-3/\theta_0)z) / 6,$$

直接求导可得 $p_1 f_1(z)$. 同理可得 $p_2 f_2(z), p_3 f_3(z)$.

显然, 由引理 3 得到可识别的参数 θ_0 , 而参数 θ_1, θ_2 是不可识别的.

若 $(X'_1, X'_2, X'_3) \sim \text{WTVED}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, 令 $Z' = \min(X'_1, X'_2, X'_3)$, 并记 $p'_i f'_i(z)$ 为 (Z', I') 的联合密度, 则有如下的识别性定理.

定理 2 若 (Z, I) 与 (Z', I') 有相同的分布, 则有 $\theta_1 = \lambda_1$. 直接计算即可证明.

2 Freund 型指数分布的识别性

2.1 二元 Freund 型指数分布的识别性

称 (X, Y) 服从二元 Freund 型指数分布的随机变量, 则它有如下的密度函数:

$$p_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \lambda_1 \lambda'_1 \exp[-\lambda'_2 y - (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda'_1)x], & 0 \leq x < y, \\ \lambda'_1 \lambda_2 \exp[-\lambda'_2 x - (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda'_1)y], & 0 \leq y < x. \end{cases}$$

记 $(X, Y) \sim \text{FBVED}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda'_1, \lambda'_2)$, 令当 $X < Y$ 时, $I=1$; 当 $X > Y$ 时, $I=2$. 记 $Z = \min(X, Y)$, 并记 $p_i f_i(z)$ 表示 (Z, I) 的联合密度, 而 $f_z(z)$ 表示 z 的密度函数.

引理 4 设 $(X, Y) \sim \text{FBVED}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda'_1, \lambda'_2)$ 则有 $f_z(z) = (\lambda_1 + \lambda_2) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)z}, z > 0$. 显然, 由引理 4 得到参数 $\lambda_1 + \lambda_2$ 可识别, 而参数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda'_1, \lambda'_2$ 不可识别.

引理 5 设 $(X, Y) \sim \text{FBVED}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda'_1, \lambda'_2)$, 则:

$$\begin{cases} p_1 f_1(z) = \lambda_1 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)z}, z > 0, \\ p_2 f_2(z) = \lambda_2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)z}, z > 0. \end{cases}$$

显然, 由引理 5 得到参数 λ_1, λ_2 可识别, 而参数 λ'_1, λ'_2 不可识别.

若 $(X', Y') \sim \text{FBVED}(\partial_1, \partial_2, \partial'_1, \partial'_2)$, 令 $Z' = \min(X', Y')$, 并记 $p'_i f'_i(z)$ 为 (Z', I') 的联合密度, 则有如下的识别性定理.

定理 3 若 (Z, I) 与 (Z', I') 有相同的分布, 则有 $(\lambda_1, \lambda_2) = (\partial_1, \partial_2)$. 此证明通过直接计算即可.

2.2 多元 Freund 型指数分布的识别性

称 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 服从 n 元 Freund 型指数分布,

若它有如下联合密度:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda_i \prod_{j \neq i} \lambda'_j \exp[-(\sum_{i=1}^n \lambda_j - \sum_{j \neq i} \lambda'_j)x_i - (\sum \lambda'_j x_j)], \quad 0 < x_i < x_j,$$

记作 $(X_1, X_2, \dots, X_n) \sim \text{FMVED}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_n)$. 设 $Z = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 设 $I=i$, 当 $Z = X_i$ 时, 记 $p_i = p(I=i), (i=1, 2, \dots, n)$, 记 $f_i(z)$ 表示给定 $I=i$ 时的条件密度函数; 则记 $p_i f_i(z)$ 为 (Z, I) 的联合分布密度.

引理 6 设 $(X_1, X_2, X_3) \sim \text{FMVED}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3)$, 则 $p_i f_i(z) = \lambda_i \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)z], i=1, 2, 3$, 其中, $z > 0$. 此证明通过直接计算即可.

由引理 6 可知, 可识别的参数为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 而参数 $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3$ 是不可识别的.

若 $(X'_1, X'_2, X'_3) \sim \text{FMVED}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta'_1, \theta'_2, \theta'_3)$, 令 $Z' = \min(X'_1, X'_2, X'_3)$, 记 $p'_i f'_i(z)$ 为 (Z', I') 的联合密度, 则有如下的识别性定理.

定理 4 若 (Z, I) 与 (Z', I') 有相同的分布, 则有 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$.

3 Block~Basu 型指数分布的识别性

3.1 二元 Block~Basu 型指数分布的识别性

(X_1, X_2) 服从 Block~Basu 型指数分布, 则它的联合密度函数为:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \lambda \lambda_1 (\lambda_2 + \lambda_{12}) \exp\{-\lambda_1 x_1 - (\lambda_2 + \lambda_{12})x_2\} / (\lambda_1 + \lambda_2), & 0 < x_1 < x_2, \\ \lambda \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_{12}) \exp\{-\lambda_2 x_2 - (\lambda_1 + \lambda_{12})x_1\} / (\lambda_1 + \lambda_2), & 0 < x_2 < x_1. \end{cases}$$

记 $(X_1, X_2) \sim \text{BVED}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12})$. 这里 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}$, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_{12} \geq 0$.

令当 $X_1 < X_2$ 时, $I=1$, 当 $X_1 > X_2$ 时, $I=2$, 记 $Z = \min(X_1, X_2)$, 并记 (Z, I) 的联合密度为 $p_i f_i(z)$, Z 的密度函数为 $f_z(z)$.

引理 7 设 $(X_1, X_2) \sim \text{BVED}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12})$, 则有 $f_z(z) = \lambda e^{-\lambda z}, z > 0$. 显然, 由引理 7 得到可识别参数为 λ , 而参数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}$ 不可识别.

引理 8 设 $(X_1, X_2) \sim \text{BVED}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12})$, 则有:

$$\begin{cases} p_1 f_1(z) = \lambda \lambda_1 e^{-\lambda z} / (\lambda_1 + \lambda_2), z > 0, \\ p_2 f_2(z) = \lambda \lambda_2 e^{-\lambda z} / (\lambda_1 + \lambda_2), z > 0. \end{cases}$$

显然, 由引理 8 得到可识别参数为 $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$,

而参数 λ_{12} 不可识别.

若 $(X'_1, X'_2) \sim \text{BVED}(\partial_1, \partial_2, \partial_{12})$, 令 $Z' = \min(X'_1, X'_2)$, 并记 $p'_i f'_i(z)$ 为 (Z', I') 的联合密度, 则有如下识别性定理.

定理 5 若 (Z, I) 与 (Z', I') 有相同的分布, 则有 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}) = (\partial_1, \partial_2, \partial_{12})$.

3.2 多元 Block~Basu 型指数分布的识别性

称 (X_1, X_2, X_3) 为服从三元 Block~Basu 型指数分布的随机变量, 则它有如下联合密度函数:

当 $x_1 < x_2, x_1 < x_3$ 时,

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{\lambda \lambda_1 (\lambda_2 + \lambda_{12}) (\lambda_3 + \lambda_{23})}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \exp\{-(\lambda_1 + \lambda_{23})x_1 - (\lambda_2 + \lambda_{12})x_2 - (\lambda_3 + \lambda_{13})x_3\},$$

记为 $(X_1, X_2, X_3) \sim \text{TVED}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{23})$. 设 $Z = \min(X_1, X_2, X_3)$, 用 $p_i f_i(z)$ 表示 (Z, I) 的联合密度, 则有如下引理.

引理 9 设 $(X_1, X_2, X_3) \sim \text{TVED}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{23})$, 则有 $p_i f_i(z) = \lambda \lambda_i e^{-\lambda z} / (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$, $i = 1, 2, 3$, 其中, $z > 0$. 此证明通过直接计算即可.

由引理 9 可知, 可识别的参数为 $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 而参数 $\lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{23}$ 是不能被识别的.

若 $(X'_1, X'_2, X'_3) \sim \text{TVED}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23})$, 令 $Z' = \min(X'_1, X'_2, X'_3)$, 并记 $p'_i f'_i(z)$ 为 (Z', I') 的联合密度, 则有如下识别性定理.

定理 6 若 (Z, I) 与 (Z', I') 有相同的分布, 则有 $(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$.

4 结论

在多元 Weinman 型指数分布中可识别的参数

为 θ_0 , 而参数 θ_1, θ_2 是不可识别的; 在多元 Freund 型指数分布中可识别的参数为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 而参数 $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3$ 不可被识别; 在多元 Block~Basu 型指数分布中可识别参数为 $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 而参数 $\lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{23}$ 不能被识别.

参考文献:

- [1] Anderson T W, Ghurye S G. Identification of parameters by the distribution of a maximum random variable[J]. Royal Statist Soc, 1977, 39(B):337-342.
- [2] Basu A P, Ghosh J K. Identifiability of the multinormal and other distributions under competing risks model[J]. Journal of Multivariate Analysis, 1978, 8(3):413-429.
- [3] Proschan F, Sullo P. Estimating the parameters of a bivariate exponential distribution in several sampling situations[C]. Proschan F, Serfling R. Statistical Analysis of Life Length, Philadelphia: SIAM, 1974:423-440.
- [4] 李国安. 二元 Proschan-Sullo 型指数分布的特征及其应用[J]. 宁波大学学报: 理工版, 2007, 20(4):468-472.
- [5] 李国安. 混合分布的识别性及其应用[J]. 宁波大学学报: 理工版, 1993, 6(3):28-38.
- [6] Friday D S, Patil G P. A bivariate exponential model thapplications to reliability and computer generation of random variables[C]. Tsokos C, Shimi L. Theory and Applications of Reliability, New York, 1977:527-549.
- [7] 杨静平. 寿险精算基础[M]. 北京: 北京大学出版社, 2002:45-49.
- [8] Elnaggar M, Mukherjea A. Identification of the parameters of a trivariate normal vector by the distribution of the minimum[J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 1999, 78:23-37.

Identification of Multivariate Continuous Exponential Distribution

JIN Shu-yun, LI Guo-an*

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: Discussed respectively the three bivariate continuous exponential distribution and the identification of multivariate continuous exponential distribution of identification, $Z = \min(X_1, X_2)$ is first defined, by letting with $I = i$, $Z = X_i$, $Z = \min(X_1, X_2, X_3)$, $I = i$ is defined, which (X_1, X_2) and (X_1, X_2, X_3) is respectively Weinman distribution, Freund distribution, Block~Basu distribution. Discuss the known $Z, (Z, I)$ distribution situation (X_1, X_2) and (X_1, X_2, X_3) distribution of the identification of parameters of the situation.

Key words: continuous exponential distribution; identification; minimum

(责任编辑 章践立)