

两指标 B 值强鞅的大数定律

叶 臣

(宁波大学 科学技术学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 证明了两指标 B 值强鞅的强弱大数定律的几个重要结果, 得到了 Banach 空间的 p 一致光滑特征的 2 个新刻画, 推广和改进了单指标 B 值鞅和两指标 B 值鞅的有关结果.

关键词: 两指标 B 值强鞅; 大数定律; p 一致光滑

中图分类号: O211.6

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2014) 03-0055-04

随机变量序列的大数定律是概率论中的经典理论课题之一, 而且一直是概率极限理论研究中一个十分活跃的分支. 因为鞅性是独立性概念的重要推广, 所以很多有关独立随机变量序列的极限定理可推广到鞅的情形, 但相对实值鞅而言, B 值鞅的结果一般与 Banach 空间的几何性质有密切联系. 赵兴球在文献[1]中研究了单指标 B 值鞅的强大数定律, 甘师信在文献[2]中研究了单指标 B 值鞅的弱大数定律, 翟富菊和吴海燕在文献[3]中研究了单指标 B 值极限鞅的大数定律, Chen 等在文献[4]中研究了两指标 B 值鞅的大数定律, 这些结果均与 Banach 空间的几何性质有关. 笔者研究了两指标 B 值强鞅的大数定律, 并用大数定律的结果刻画了 Banach 空间的 p 一致光滑性, 推广了单指标 B 值鞅的结果.

1 符号及定义

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为完备的概率空间, $(B, \|\cdot\|)$ 为维数不小于 2 的 Banach 空间, $\{\mathcal{F}_n, n \in N^2\}$ 为 $\mathcal{F}$ 的关于 N^2 中的偏序不降的子 σ 代数列且满足 F_4 条件. 对 $\forall n = (n_1, n_2) \in N^2$ 记:

$$\mathcal{F}_{n_1, \infty} = \sigma\left(\bigcup_{j \in N} \mathcal{F}_{n_1, j}\right), \quad \mathcal{F}_{\infty, n_2} = \sigma\left(\bigcup_{i \in N} \mathcal{F}_{i, n_2}\right),$$

$$\mathcal{F}_n = \sigma\left(\bigcup_{n \in N^2} \mathcal{F}_n\right), \quad \mathcal{F}_n^- = \sigma\left(\mathcal{F}_{n_1-1, n_2} \cup \mathcal{F}_{n_1, n_2-1}\right),$$

$$\mathcal{F}_n^+ = \sigma\left(\mathcal{F}_{n_1+1, n_2} \cup \mathcal{F}_{n_1, n_2+1}\right),$$

$$\mathcal{F}_n^* = \sigma\left(\mathcal{F}_{n_1, \infty} \cup \mathcal{F}_{\infty, n_2}\right).$$

用 $E, E_n, E_{n_1, \infty}, E_{\infty, n_2}, E_n^-, E_n^+$ 和 E_n^* 分别表示期望算子及关于 $\mathcal{F}_n, \mathcal{F}_{n_1, \infty}, \mathcal{F}_{\infty, n_2}, \mathcal{F}_n^-, \mathcal{F}_n^+$ 和 $\mathcal{F}_n^*$ 的条件期望算子.

取值 Banach 空间 B 且可积的随机变量序列 $f = (f_n, n \in N^2)$ 称为鞅, 若 $f = (f_n, n \in N^2)$ 关于 $\{\mathcal{F}_n, n \in N^2\}$ 是适应的(即对所有 $n \in N^2$, f_n 关于 $\mathcal{F}_n$ 可测), 且当 $n \leq m$ 时, 有 $E_n f_m = f_n$.

对两指标 B 值鞅 f 定义鞅差如下:

$$d_n f = \begin{cases} 0, & n_1 n_2 = 0, \\ f_{n_1, n_2} - f_{n_1-1, n_2} - f_{n_1, n_2-1} + \\ f_{n_1-1, n_2-1}, & n_1 n_2 \neq 0. \end{cases}$$

定义 1 称 B 值鞅 $f = (f_n, n \in N^2)$ 为一个强鞅, 若 $E_{n-1}^* d_n f = 0$ (等价于 $E_n^- d_n f = 0$) ($\forall n \in N^2$).

对定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上, 取值于 Banach 空间 B 上的两指标强鞅 $f = (f_n, n \in N^2)$, 文中用 $\|f\|_p, f^*, S^{(p)}(f), \sigma^{(p)}(f)$ 表示它的 L_p -模、极大算子、 p 均方算子以及 $\mathcal{F}_{n-1}$ 有关的条件 p 均方算子:

$$\|f\|_p = \sup_{n \in N^2} \|f_n\|_p, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$f_n^* = \sup_{i \leq n} \|f_i\|, \quad f^* = \sup_{n \in N^2} \|f_n\|,$$

$$S_n^{(p)}(f) = \left(\sum_{0 \leq i \leq n} \|d_i f\|^p \right)^{1/p},$$

$$S^{(p)}(f) = \sup_{n \in N^2} S_n^{(p)}(f), \quad 0 < p < \infty,$$

$$\sigma_n^{(p)}(f) = \left(\sum_{0 \leq i \leq n} E_{i-1} \|d_i f\|^p \right)^{1/p},$$

$$\sigma^{(p)}(f) = \sup_{n \in N^2} \sigma_n^{(p)}(f), \quad 0 < p < \infty.$$

此外, 对于两指标 B 值强鞅 $f = (f_n, n \in N^2)$, 定义一个新的更有用的关于 $\mathcal{F}_n^-$ 的条件 p 均方算子 $\tilde{\sigma}^{(p)}(f): \tilde{\sigma}^{(p)}(f) = (\sum_{n \in N^2} E_n^- \|d_n f\|^p)^{1/p}, 0 < p < \infty$.

在本文中, 对于两指标 B 值强鞅而言, “停时”是指关于 $(\mathcal{F}_n^+)$ 的停时, 简记为 $\nu \in T(\mathcal{F}_n^+)$, $(n \in N^2)$. 两指标 B 值强鞅 $f = (f_n, n \in N^2)$ 关于两指标停时 $\nu \in T(\mathcal{F}_n^+)$ 的停时鞅 $f = (f_n^{(\nu)}, n \in N^2)$ 定义为:

$$f_n^{(\nu)} = \sum_{m \leq n} \chi(\nu \leq m) d_m f \quad (n \in N^2).$$

关于 Banach 空间的 p 一致光滑性的定义见文献[4].

2 主要结果和证明

引理 1 (1) 设 $\{a_{ij}^{(n)}, i, j \in N, n \in N^2\}$ 为实数族, $\{x, x_{ij}, i, j \in N\}$ 为 Banach 空间 B 中的有界元素族, 若:

(I) $x_{ij} \rightarrow x(i, j \rightarrow \infty)$;

(II) $\forall \varepsilon > 0, (i_1, j_1) \in N^2$, 存在 $n_0 \in N^2$ 及 $(i_0, j_0) \in N^2, (i_0, j_0) \geq (i_1, j_1)$, 当 $n \geq n_0$ 时,

$$\sum_{(i_0, j_0) \leq (i, j) \leq (i_0, j_0)} |a_{ij}^{(n)}| < \varepsilon;$$

(III) $\sum_{i, j} a_{ij}^{(n)} \rightarrow 1(n \rightarrow \infty)$;

(IV) 每对 $(i, j), a_{ij}^{(n)} \rightarrow 0(n \rightarrow \infty)$;

(V) 存在 $M > 0$, 使得 $\sum_{i, j} |a_{ij}^{(n)}| \leq M(n \in N^2)$,

则 $\sum_{i, j} a_{ij}^{(n)} x_{ij} \rightarrow x(n \rightarrow \infty)$.

(2) 设 $a = \{a_{ij}, i, j \in N\}$ 为实数族, $\{x_{ij}, i, j \in N\}$ 为 Banach 空间 B 中的有界元素族, 若:

(VI) $\forall (i, j) \in N^2, a_{ij} > 0; d_{ij} a \geq 0, a_{i+1, j} \geq a_{ij}, a_{i, j+1} \geq a_{ij}$;

(VII) $\lim_{i, j \rightarrow \infty} a_{ij} = \infty$, 且当 $n = (n_1, n_2) \rightarrow \infty$ 时, $a_{in_2} / a_{n_1 n_2}$ 关于 i 一致收敛于 0, $a_{n_1 j} / a_{n_1 n_2}$ 关于 j 一致收敛于 0;

(VIII) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $y_{n+1} = \sum_{(i, j) \leq n \in N^2} (x_{ij} / a_{ij})$ 收敛

于 y , 且 $\{y_n, n \in N^2\}$ 有界, 则 $\frac{1}{a_n} \sum_{(i, j) \in N^2} x_{ij} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

证明 (1) 由于 $\sum_{i, j} a_{ij}^{(n)} x_{ij} - x = (\sum_{i, j} a_{ij}^{(n)} - 1)x + \sum_{i, j} a_{ij}^{(n)} (x_{ij} - x)$ 及 $\sum_{i, j} a_{ij}^{(n)} \rightarrow 1(n \rightarrow \infty)$, 故只需证明

$$\sum_{i, j} a_{ij}^{(n)} (x_{ij} - x) \rightarrow 0(n \rightarrow \infty).$$

$\forall \varepsilon > 0$, 由(I)存在 $(i_1, j_1) \in N^2$, 当 $(i, j) \geq (i_1, j_1)$ 时, $\|x_{ij} - x\| < \varepsilon$, 由(II)存在 $n_0 \in N^2, (i_0, j_0) \in N^2, (i_0, j_0) \geq (i_1, j_1)$, 当 $n \geq n_0$ 时,

$$\begin{aligned} \sum_{(i_0, j_0) \leq (i, j) \leq (i_0, j_0)} |a_{ij}^{(n)}| < \varepsilon. \text{ 则,} \\ \left\| \sum_{i, j} a_{ij}^{(n)} x_{ij} - x \right\| \leq \sum_{(i_0, j_0) \leq (i, j)} \|a_{ij}^{(n)} (x_{ij} - x)\| + \\ \sum_{(i_0, j_0) < (i, j)} \|a_{ij}^{(n)} (x_{ij} - x)\| \leq \left(\sup_{(i_0, j_0) \leq (i, j)} \|x_{ij} - x\| \right) \left(\sum_{(i_0, j_0) \leq (i, j)} |a_{ij}^{(n)}| \right) + \\ \left(\sup_{(i_0, j_0) < (i, j)} \|x_{ij} - x\| \right) \left(\sum_{(i, j) < (i_0, j_0)} |a_{ij}^{(n)}| \right) + \\ \left(\sum_{(i, j) < (i_0, j_0)} |a_{ij}^{(n)}| \right) \varepsilon \leq (M_1 + M) \varepsilon + M_1 \sum_{(i_0, j_0) < (i, j)} |a_{ij}^{(n)}|, \end{aligned}$$

其中, $M_1 = \sup_{(i_0, j_0) \leq (i, j)} \|x_{ij} - x\|$. 显然 $M_1 < \infty$. 令 $n \rightarrow \infty$ 和 $\varepsilon \rightarrow 0$, 由(III)、(IV)及(V)即知 $\sum_{i, j} a_{ij}^{(n)} (x_{ij} - x) \rightarrow 0(n \rightarrow \infty)$ 成立, 从而(1)成立.

(2)易验证,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_n} \sum_{(i, j) \leq n} x_{ij} &= \frac{1}{a_n} \sum_{(i, j) \leq n} a_{ij} d_{i+1, j+1} y = \\ &= \frac{1}{a_n} \sum_{(i, j) \leq n} y_{ij} d_{ij} a - \frac{1}{a_n} \sum_{i \leq n_1} y_{i, n_2+1} (a_{in_2} - a_{i-1, n_2}) - \\ &= \frac{1}{a_n} \sum_{j \leq n_2} y_{n_1+1, j} (a_{n_1, j} - a_{n_1, j-1}) + y_{n_1+1, n_2+1}. \end{aligned}$$

记

$$(A)_n = \frac{1}{a_n} \sum_{(i, j) \leq n} y_{ij} d_{ij} a,$$

$$(B)_n = \frac{1}{a_n} \sum_{i \leq n_1} y_{i, n_2+1} (a_{in_2} - a_{i-1, n_2}),$$

$$(C)_n = \frac{1}{a_n} \sum_{j \leq n_2} y_{n_1+1, j} (a_{n_1, j} - a_{n_1, j-1}),$$

$$(D)_n = y_{n_1+1, n_2+1}.$$

在 $(A)_n$ 中, $\forall (i, j) \in N^2$, 令:

$$a_{ij}^{(n)} = \begin{cases} d_{ij} a / a_n, & (i, j) \leq n, \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

则易验证 $\{a_{ij}^{(n)}\}, \{y_{ij}\}$ 满足(1)的条件, 从而由(1)知 $(A)_n \rightarrow y(n \rightarrow \infty)$.

在 $(B)_n$ 中, $\forall (i, j) \in N^2$, 令

$$a_{ij}^{(n)} = \begin{cases} (a_{in_2} - a_{i-1, n_2}) / a_n, & i \leq n_1, j = n_2 + 1, \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

亦由(1)可知 $(B)_n \rightarrow y(n \rightarrow \infty)$.

类似有 $(C)_n \rightarrow y(n \rightarrow \infty)$, 而 $(D)_n \rightarrow y(n \rightarrow \infty)$

是显然的. 从而 $\frac{1}{a_n} \sum_{(i,j) \in N^2} x_{ij} \rightarrow 0(n \rightarrow \infty)$.

引理 1 得证.

引理 2 设 $f = (f_n, \mathcal{F}_n, n \in N^2)$ 为两指标 B 值强鞅, 令 $d_n \bar{f} = d_n f / \|n\|$, $\bar{f}_n = \sum_{m \leq n} d_m \bar{f}$, 则 $\bar{f} = (\bar{f}_n,$

$\mathcal{F}_n, n \in N^2)$ 是两指标 B 值强鞅. 进一步, 若 $(\bar{f}_n,$

$n \in N^2)$, a.e. 收敛, 则 $f_n / \|n\| \rightarrow 0$, a.e..

证明 设 $m \leq n \in N^2$, 则 $\bar{f}_n - \bar{f}_m = \sum_{m \not\leq i \leq n} d_i \bar{f}$. 由 F_4 条件易证 $E_m(d_i f) = 0, m \not\leq i \leq n$, 从而 $E_m(\bar{f}_n - \bar{f}_m) = 0$, 即 $\bar{f}$ 为鞅. 又因为 $E_n^- d_n f = 0$, 由 $\bar{f}_n$ 的定义知 $E_n^- d_n \bar{f} = 0(n \in N^2)$, 所以 $\bar{f}$ 为强鞅.

现在不妨设 $(\bar{f}_n, n \in N^2)$ 处处收敛. 取 $a_{ij} = \|(i, j)\| (\forall (i, j) \in N^2)$, 则由引理 1 中的(2)可推得:

$$\frac{f_n}{\|n\|} = \frac{1}{\|n\|} \sum_{m \leq n} d_m f \rightarrow 0(n \rightarrow \infty).$$

引理 2 得证.

引理 3^[5] 设 B 为 Banach 空间, 则 B 具有 Radon-Nikodym 性质当且仅当任一 L_p 有界的两指标 B 值强鞅 $f = (f_n, n \in N^2)$ 是 L_p 收敛的, 其中 $1 < p < \infty$.

定理 1 设 B 为 Banach 空间, $1 < p \leq 2$, 则下列陈述等价:

(I) B 是 p 一致光滑的;

(II) 对任一两指标 B 值强鞅 $f = (f_n, \mathcal{F}_n, n \in N^2)$,

若 $\sum_{n \in N^2} \|n\|^{-p} E \|d_n f\|^p < \infty$, 则 $f_n / \|n\| \rightarrow 0$, a.e.;

(III) 对任一两指标 B 值强鞅 $f = (f_n, \mathcal{F}_n, n \in N^2)$, 若 $\sum_{n \in N^2} \|n\|^{-p} E \|d_n f\|^p \in L_\infty$, 则 $\frac{f_n}{\|n\|} \rightarrow 0$, a.e.;

(IV) 对任一两指标 B 值强鞅 $f = (f_n, \mathcal{F}_n, n \in N^2)$, 若 $\sum_{n \in N^2} \|n\|^{-p} E \|d_n f\|^p < \infty$, 则 $f_n / \|n\| \xrightarrow{P} 0$;

(V) 对任一两指标 B 值强鞅 $f = (f_n, \mathcal{F}_n, n \in N^2)$, 若 $\sum_{n \in N^2} \|n\|^{-p} E \|d_n f\|^p \in L_\infty$, 则 $f_n / \|n\| \xrightarrow{P} 0$.

证明 (I) $\Rightarrow$ (II) 设两指标 B 值强鞅 $f = (f_n, \mathcal{F}_n, n \in N^2)$ 满足条件 $\sum_{n \in N^2} \|n\|^{-p} E \|d_n f\|^p < \infty$. $\forall (n,$

$m) \in N^2$, 令 $d_n \bar{f} = d_n f / \|n\|$, $\bar{f}_n = \sum_{m \leq n} d_m \bar{f}$, $\mathcal{F}_n =$

$\mathcal{F}_n$. 由引理 2 知 $\bar{f} = (\bar{f}_n, n \in N^2)$ 为两指标 B 值强鞅. 由于 B 是 p 一致光滑的, 故存在 $K > 0$ 使

$$\sup_{n \in N^2} E \|\bar{f}_n\|^p \leq K \sum_{n \in N^2} E \|d_n \bar{f}\|^p = K \sum_{n \in N^2} \|n\|^{-p} E \|d_n f\|^p < \infty.$$

由此可知 $(\bar{f}_n, n \in N^2)$ 为 L_p 有界的. 由 B 的 p 一致光滑性知 B 具有 RN 性质, 从而由引理 3 得知 $\bar{f}$ 是 L_p 收敛的, 进而 $\bar{f}$, a.e. 收敛.

而在 $\sum_{n \in N^2} \|n\|^{-p} E \|d_n f\|^p < \infty$ 条件下 $\sup_{n \in N^2} \|\bar{f}_n\| = \bar{f}^* < \infty$, a.e.. 最终可根据引理 2 得到 $f_n / \|n\| \rightarrow 0$, a.e..

(II) $\Rightarrow$ (III), (II) $\Rightarrow$ (IV) 和 (III) $\Rightarrow$ (V) 属显然.

(IV) $\Rightarrow$ (I) 设 $f = (f_n, \mathcal{F}_n, n \in N^2)$ 为一个单指标 B 值鞅并且满足不定式 $\sum_{n \in N} n^{-p} E \|d_n f\|^p < \infty$. 令 $\hat{f}_{n,m} = f_{n \wedge m}$, $\hat{\mathcal{F}}_{n,m} = \mathcal{F}_{n \wedge m}$, $(\forall n, m \in N)$, 则 $\hat{f} = (\hat{f}_{n,m}, \hat{\mathcal{F}}_{n,m}, n, m \in N)$ 是两指标 B 值强鞅, $(\hat{\mathcal{F}}_{n,m}, n, m \in N)$ 满足 F_4 条件. 因为,

$$\begin{aligned} \sum_{(n,m) \in N^2} \|(n,m)\|^{-p} E \|d_{n,m} \hat{f}\|^p &= \sum_{n=0}^{\infty} \|(n,n)\|^{-p} E \|d_{n,n} \hat{f}\|^p = \\ \sum_n n^{-p} E \|d_n f\|^p < \infty, \end{aligned}$$

由(IV)知 $\hat{f}_{nm} / \|(n,m)\| \xrightarrow{P} 0$, 从而 $f_n / \|n\| \xrightarrow{P} 0$, 由单指标 B 值鞅的结论 B 为 p 一致光滑的^[6].

类似可证(V) $\Rightarrow$ (I).

定理 1 得证.

定理 2 设 B 为 $p(1 < p \leq 2)$ 一致光滑 Banach 空间, $f = (f_n, \mathcal{F}_n, n \in N^2)$ 为两指标 B 值强鞅.

(I) 若 $\tilde{\sigma}^{(p)}(f) < \infty$, a.e., 则 f_n , a.e. 收敛;

(II) 令 $d_n \bar{f} = d_n f / \|n\|$, $\bar{f}_n = \sum_{m \leq n} d_m \bar{f}$. 若 $\tilde{\sigma}^{(p)}(\bar{f}) < \infty$, a.e., 则 $f_n / \|n\| \rightarrow 0$, a.e..

证明 (I) 对任一 $k \in Z$, 令 $F_k = \{\tilde{\sigma}^{(p)}(f) > 2^k\}$ 及 $v_k = \inf\{n \in N^2 : E_n^+ \chi(F_k) > 1/2\}$, 其中, $\chi(\cdot)$ 是示性函数. 显然 F_k 关于 k 是不增的, v_k 是一个关于 k 非降的 $(\mathcal{F}_n^+)$ 停时, 且当 $k \rightarrow \infty$ 时 $v_k \rightarrow \infty$.

$\forall n \in N^2$ 再令 $f_n^{(v_k)} = \sum_{m \leq n} \chi(v_k \not\leq m) d_m f$, 则对

固定的 k , $(f_n^{(v_k)}, n \in N^2)$ 为鞅. 记

$$(J) = \sum_{n \in N^2} E(E_n^- \|d_n f\|^p \chi(v_k \not\leq n) \chi(F_k^c)),$$

$$(K) = \sum_{n \in N^2} E(E_n^- \|d_n f\|^p \chi(v_k \not\leq n) \chi(F_k)).$$

则 $(J) \leq 2^{p^k}$, 而由 v_k 的定义, 若 $v_k \not\leq n$, 则 $E_n^- \chi(F_k) \leq 1/2$, 从而

$$(K) \leq \frac{1}{2} \sum_{n \in N^2} E(E_n^- \|d_n f\|^p \chi(v_k \not\leq n)).$$

于是,

$$\sum_{n \in N^2} E \|d_n f^{(v_k)}\|^p = \sum_{n \in N^2} E(E_n^- \|d_n f^{(v_k)}\|^p) =$$

$$(J) + (K) \leq 2^{p^k} + \frac{1}{2} E \|d_n f^{(v_k)}\|^p.$$

$$\text{进而 } \sum_{n \in N^2} E \|d_n f^{(v_k)}\|^p \leq 2^{p^k+1}.$$

由两指标 B 值强鞅收敛性^[5]得知当 $n \rightarrow \infty$ 时, $f_n^{(v_k)}$, a.e. 收敛. 而当 $v_k = \infty$ 时, $f_n^{(v_k)} = f_n$. 故在 $(v_k = \infty)$ 上 f_n , a.e. 收敛. 由于 $\tilde{\sigma}^{(p)}(f) < \infty$, a.e., 所以最终得到当 $n \rightarrow \infty$ 时, f_n , a.e. 收敛.

(II) 由于证明过程类似于(I), 在此略述.

对任一 $k \in Z$, 令 $F_k = \{\tilde{\sigma}^{(p)}(\vec{f}) > 2^k\}$ 及 $v_k = \inf\{n \in N^2 : E_n^+ \chi(F_k) > 1/2\}$, 其中, $\chi(\cdot)$ 是示性函数. 显然 F_k 关于 k 是不增的, v_k 是一个关于 k 非降的 $(\mathcal{F}_n^+)$ 停时, 且当 $k \rightarrow \infty$ 时, $v_k \rightarrow \infty$.

$\forall n \in N^2$ 再令 $\vec{f}_n^{(v_k)} = \sum_{m \leq n} \chi(v_k \not\leq m) d_m \vec{f}$, 则对

固定的 k , $(\vec{f}_n^{(v_k)}, n \in N^2)$ 为鞅.

根据上面证明, 则有 $\sum_{n \in N^2} E \|d_n \vec{f}^{(v_k)}\|^p \leq 2^{p^k+1}$,

此即 $\sum_{n \in N^2} \|n\|^{-p} E \|d_n f^{(v_k)}\|^p \leq 2^{p^k+1}$. 应用定理 1 可以得到, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $f_n^{(v_k)} / \|n\|$, a.e. 收敛于 0, 从而 $f_n / \|n\|$, a.e. 收敛于 0.

定理 2 得证.

参考文献:

- [1] 赵兴球. B 值鞅的强大数定律[J]. 数学杂志, 1991, 10(1): 85-92.
- [2] 甘师信. Banach 空间值鞅不等式与弱大数定律[J]. 数学杂志, 1994, 14(3): 387-395.
- [3] 翟富菊, 吴海燕. B 值极限鞅及 L_1 极限鞅差序列的大数定律[J]. 青岛科技大学学报: 自然科学版, 2010, 31(5): 539-541.
- [4] Chen Rian, Gan Shixin. Two-parameter vector-valued martingales and geometrical properties of Banach spaces[J]. Wuhan University Journal of Natural Sciences, 1999, 4(2): 135-142.
- [5] 李宏, 叶臣. 两指标 B 值强鞅的收敛性与 Banach 空间几何性质[J]. 宁波大学学报: 理工版, 2011, 24(4): 41-44.
- [6] Pisier G. Martingales with values in uniformly convex spaces[J]. Israel J Math, 1995, 20: 326-356.

Laws of Large Numbers for the Two-parameter Banach Space Valued Strong Martingales

YE Chen

(College of Science and Technology, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: Some important results of the strong and weak laws of large numbers for two-parameter Banach space valued strong martingale are certificated, and obtained two characterizations of p uniform smoothness of Banach spaces, the relative results of one-parameter and two-parameter Banach space valued martingales are generalized and ameliorated.

Key words: two-parameter Banach space valued strong martingales; laws of large numbers; p uniform smoothness

(责任编辑 章践立)