

马尔可夫机制转换模型下保险公司的最优投资及再保险策略

王 伟, 甘少波

(宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 研究了马尔可夫机制转换模型下保险公司的最优投资及再保险策略问题. 假定风险资产价格满足马尔可夫调制的几何布朗运动, 得到了最终财富的指数期望效用最大准则下的最优投资和最优再保险策略. 结果表明: 市场的经济状态对最优投资策略有很大影响, 并通过数值计算分析了模型中市场利率和绝对风险厌恶系数与最优投资策略和最优再保险策略的关系.

关键词: 机制转换; 再保险; 指数效用函数

中图分类号: O211.9

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2015) 01-0058-07

自 Markowitz^[1]开始采用均值方差投资组合以来, 有关投资组合优化的研究越来越受到关注. Browne^[2]利用带漂移的布朗运动来描述公司的盈余, 研究了最大化生存概率和最大化最终财富期望指数效用问题. Yang 等^[3]研究了在跳扩散模型下保险公司的最优投资问题, 并给出了效用函数是指数效用函数情况下, 最终财富期望效用最大的最优投资策略. 杨招军^[4]研究了部分信息下极大化终止时刻期望效用的最优投资策略问题. Bai 等^[5]考虑了在多种风险资产和非卖空限制情况和最大化最终财富的期望指数效用准则下的最优比例再保险和最优投资问题. 罗琰等^[6]得到了在最大化生存概率和最大化终止时刻期望效用准则下, 最优投资策略及最优比例再保险策略的闭解. Yi 等^[7]考虑了一个模糊厌恶的保险公司, 在 Heston^[8]随机波动率模型下的稳健最优再保险和最优投资问题. 上述文献均是在假定风险资产价格满足几何布朗运动或者跳扩散模型下考虑最优投资问题. 然而, 大量实证发现金融市场中存在机制转换的性质. Hardy^[9]提出了用机制转换模型来建模和预测长期的股票回报, 利用标准普尔 500 指数的数据分析发现用机制转换建立模型获得的数据比对数正态模型、ARCH 模型等其他经济模型更贴近实际数据.

Andrew 等^[10-11]基于美国、德国和英国的利率分析数据为市场利率中存在机制转换性质提供了实证证据.

目前, 马尔可夫机制转换模型在保险和金融领域有着广泛的应用. 模型中连续时间的马尔可夫链的状态被看作市场的经济状态, 其经济状态的转移是由于商业和经济周期的变化而引起的. 在投资组合领域, Bauerle 等^[12]假定市场中的无风险利率、风险资产的回报率与波动率都依赖于马尔可夫链的状态, 同时研究了不同效用函数下最大化终止时刻的期望效用问题. Elliott 等^[13]考虑了马尔可夫调制的几何布朗运动模型下的风险最小化投资问题, 有关这方面研究还可以参考文献 [14-15].

笔者在 Bauerle 等^[12]模型的基础上, 考虑了保险公司的再保险问题, 利用随机控制理论, 在最大化最终财富的期望效用准则下, 得到了保险公司的最优投资和最优再保险策略. 与文献[6]不同的是: 我们假定风险资产价格满足马尔可夫调制的几何布朗运动, 而文献[6]假定风险资产价格满足几何布朗运动. 本研究结果发现, 市场的经济状态对最优投资策略具有很大的影响, 因此我们考虑的问题是有益的.

收稿日期: 2013-12-07.

宁波大学学报(理工版) 网址: <http://journalg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 浙江省自然科学基金(LQ12A01006); 教育部人文社会科学研究项目(12YJC910009); 宁波市自然科学基金(2013A610106); 浙江省教育厅研究项目(Y201120129).

第一作者: 王伟(1982-), 男, 安徽安庆人, 博士/讲师, 主要研究方向: 金融数学. E-mail: wangwei2@nbu.edu.cn

1 模型假设

考虑一个无摩擦且无套利的金融市场, 市场中的所有不确定性用一带滤流的完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, P)$ 来描述. 假定市场中有2类可交易的资产, 一类是无风险债券 B , 另一类是风险资产 S , 且市场投资者在 $[0, T]$ 时间内可连续交易. 这2类资产都依赖于市场经济状态, 我们用一连续时齐马尔可夫链 $\varepsilon = \{\varepsilon_s\}_{0 \leq s \leq T}$ 来描述其经济状态, ε 的状态空间为 $X = \{e_1, e_2, \dots, e_N\}$, 其中 $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ 表示第 i 个元素为 1, 其他元素为 0 的列向量. 假定马尔可夫链的 Q 矩阵为 $(q_{ij})_{i, j=1, 2, \dots, N}$, 且是一个保守的 Q 矩阵. 假定无风险债券 B 和风险资产 S 的价格动态分别满足下式:

$$dB_t = rB_t dt, \quad (1)$$

$$dS_t = S_t(b_{\varepsilon_t} dt + \sigma_{\varepsilon_t} dW_{1t}), \quad (2)$$

其中: W_{1t} 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的标准布朗运动; $r > 0$ 是一个常数表示市场利率; b_{ε_t} , σ_{ε_t} 分别是 t 时刻风险资产的平均回报率和波动率, 依赖市场经济状态, 即如果 $\varepsilon_t = e_i$, 则 $b_{\varepsilon_t} = b_i$, $\sigma_{\varepsilon_t} = \sigma_i$. 此外, 为方便我们还假定 $B_0 = 1$. 在经典的风险理论中, 真实的净收益过程 $\hat{R}_t$ 满足下式:

$$\hat{R}_t = pt - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

其中: $p > 0$ 是常值, 表示单位时间内保费收入; N_t 是泊松过程, 其强度为 λ , N_t 表示 $[0, T]$ 这段时间内发生的总索赔次数; Y_i 表示第 i 次索赔的额度, 且 $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_N\}$ 是一列独立同分布的随机变量. 复合泊松过程 $\sum_{i=1}^{N_t} Y_i$ 与 ε_t , W_{1t} 是相互独立的.

假定 Y_i 的一阶矩为 μ , 二阶矩为 δ^2 , 由经典风险理论可知:

$$p = (1 + \theta)\lambda\mu,$$

其中: $\theta > 0$ 为相对安全负荷.

由于很多险种, 一旦损失发生, 对保险公司来说是灾难性的, 例如巨灾风险. 因此很多保险公司为了安全起见, 通常利用购买再保险来转移风险. 我们所考虑的保险公司假定会通过购买再保险的方式来减小保险索赔所带来的损失. 令 $0 \leq a_t \leq 1$ 表示 t 时刻再保险的分保率, 在 t 时刻, 一旦保险公司面临索赔额为 Y 的损失发生, 再保险公司将支付 $(1 - a_t)Y$ 给保险公司, 因此对于保险公司来说

面对这次索赔只需自己承担 $a_t Y$ 的损失. 假定再保险公司的相对安全负荷为 η , 这里 $\eta \geq \theta$, 则购买再保险后保险公司的净收益过程 R_t 满足下式:

$$dR_t = (1 + \theta)\lambda\mu dt - (1 + \eta)\lambda\mu(1 - a_t)dt - a_t d\sum_{i=1}^{N_t} Y_i. \quad (3)$$

本文利用扩散模型近似保险公司的净收益过程, 有关资料参见文献[2, 16], 则

$$dR_t = (1 + \theta)\lambda\mu dt - (1 + \eta)\lambda\mu(1 - a_t)dt - a_t \lambda \mu dt - \beta a_t dW_{2t}, \quad (4)$$

其中: $\beta^2 = \lambda\delta^2$, $\beta > 0$, 且假定 ε , W_1 , W_2 是相互独立的, 则(4)式可以化简为:

$$dR_t = \lambda\mu(\eta a_t - \eta + \theta)dt - \beta a_t dW_{2t}. \quad (5)$$

2 最大化最终财富的期望效用

采用动态规划原理获得值函数的 HJB 方程, 并研究投资者在最大化最终财富期望效用准则下寻求最优投资及再保险策略问题. 对任意的 $t \in [0, T]$, 令 π_t 表示保险公司在 t 时刻投资于风险资产 S 占整个财富的比例, $1 - \pi_t$ 为投资于无风险债券 B 占整个财富的比例. 假定保险公司采取的投资是自融资策略, $X^{\pi, a} = \{X^{\pi, a}(t), 0 \leq t \leq T\}$ 为保险公司采取投资策略 π 以及再保险策略 a 所对应的财富过程, 则

$$dX^{\pi, a}(t) = \frac{\pi_t X^{\pi, a}(t)}{S_t} dS_t + \frac{(1 - \pi_t) X^{\pi, a}(t)}{B_t} dB_t + dR_t,$$

再由(1), (2)和(5)式可知 $X^{\pi, a}(t)$ 满足下式:

$$dX^{\pi, a}(t) = [rX^{\pi, a}(t) + \pi_t X^{\pi, a}(t) \cdot (b_{\varepsilon_t} - r) + \lambda\mu(\eta a_t - \eta + \theta)]dt + \sigma_{\varepsilon_t} \pi_t X^{\pi, a}(t) dW_{1t} - \beta a_t dW_{2t}. \quad (6)$$

在文中假定保险公司所采取的投资和再保险策略 (π_t, a_t) 是可行的, 即 $\{\pi_t, a_t, 0 \leq t \leq T\}$ 是 $\mathcal{F}$ 循序可测的, $0 \leq a_t \leq 1$. 且 $E[\int_0^T \pi_t^2 dt < \infty]$. 令 $\mathfrak{M}$ 表示所有可行策略的集合, $U: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个效用函数, 并假定 U 是严格增的凹, 且一阶连续可导. 对于保险公司, 其目标是选择可行策略 (π_t, a_t) 使得最终财富的期望效用最大, 于是需要解决如下优化问题, 对任意的 $i \in [1, 2, \dots, N]$.

$$\sup_{(\pi_i, a_i) \in \mathfrak{M}} E[U(X^{\pi, a}(T)) | X^{\pi, a}(t) = x, \varepsilon_t = e_i], \quad (7)$$

其中: $X^{\pi, a}(t)$ 满足(6)式, $E[\bullet | X^{\pi, a}(t) = x, \varepsilon_t = e_i]$ 表示给定 $X^{\pi, a}(t) = x, \varepsilon_t = e_i$ 条件下的期望, 文中假定 t 时刻的财富 $x > 0$. 定义

$$V(t, x, i) = \sup_{(\pi_i, a_i) \in \mathfrak{M}} E[U(X^{\pi, a}(T)) | X^{\pi, a}(t) = x, \varepsilon_t = e_i], \quad (8)$$

由经典动态规划原理可得 HJB 方程如下:

$$\sup_{(\pi_i, a_i) \in \mathfrak{M}} \{V_t + [rx + \pi_i x(b_i - r) + \lambda\mu(\eta a_i - \eta + \theta)]V_x + 0.5(\sigma_i^2 \pi_i^2 x^2 + \beta^2 a_i^2)V_{xx} + \sum_{j \in [1, 2, \dots, N]} q_{ij}[V(t, x, j) - V(t, x, i)]\} = 0, \quad (9)$$

其边界条件: $V(T, x, i) = U(x)$, 其中 V_t , V_x 和 V_{xx} 分别是 $V(t, x, i)$ 关于变量 t 和 x 的一阶导数和二阶导数. 为表述方便, 令

$$h^{\pi, a}(t, x, i) = V_t + [rx + \pi_i x(b_i - r) + \lambda\mu(\eta a_i - \eta + \theta)]V_x + 1/2(\sigma_i^2 \pi_i^2 x^2 + \beta^2 a_i^2)V_{xx} + \sum_{j \in [1, 2, \dots, N]} q_{ij}(V(t, x, j) - V(t, x, i)). \quad (10)$$

下面的验证定理与文献[12]中的定理 1 有少许不同, 因为我们不仅考虑了投资问题, 还考虑了再保险问题, 但基本结果是相同的. 我们采取与文献[12]中定理 1 类似的证明, 得到在考虑再保险的情况下, 结果一样成立, 故这里不再给出证明过程.

定理 1 对所有 $i \in [1, 2, \dots, N]$, 假定 $G(\cdot, \cdot, i) \in C^{1,2}$ 是 HJB 方程(9)的解, 且存在 $K > 0$ 及 $l \in \mathbb{N}$, 和对任意的 $0 \leq t \leq T$ 有 $|G(t, x, i)| \leq K(1 + |x|^l)$, 则下面结果成立.

(1) 对所有的 $i \in [1, 2, \dots, N]$, $0 \leq t \leq T$ 和 $x \in R^+$, $G(t, x, i) \geq V(t, x, i)$.

(2) 对所有的 $i \in [1, 2, \dots, N]$, $0 \leq t \leq T$ 和 $x \in R^+$, 如果 (π^*, a^*) 使 $h^{\pi, a}(t, x, i)$ 达到最大, 则

$$G(t, x, i) = V(t, x, i) = V^{\pi^*, a^*}(t, x, i),$$

这里

$$V^{\pi^*, a^*}(t, x, i) = E[U(X^{\pi^*, a^*}(T)) | X^{\pi^*, a^*}(t) = x, \varepsilon_t = e_i].$$

此外, (π^*, a^*) 分别是最优投资策略和最优再保险策略.

假设 HJB 方程(9)的解 $G(t, x, i)$ 存在, 且满足 $G_x > 0$, $G_{xx} < 0$. 令(10)式右边关于 π, a 的一阶导数

为 0, 可得:

$$\pi^*(t, x, i) = -\frac{(b_i - r)G_x}{\sigma_i^2 x G_{xx}},$$

$$a^*(t, x, i) = -\frac{\lambda\mu\eta G_x}{\beta^2 G_{xx}},$$

将 $\pi^*(t, x, i)$ 和 $a^*(t, x, i)$ 代入 HJB 方程有:

$$G_t + rxG_x - \left[\frac{(b_i - r)^2}{2\sigma_i^2} + \frac{\lambda^2 \mu^2 \eta^2}{2\beta^2} \right] \frac{G_x^2}{G_{xx}} - \lambda\mu(\eta - \theta)G_x + \sum_{j \in [1, 2, \dots, N]} q_{ij}(G(t, x, j) - G(t, x, i)) = 0,$$

其边界条件为 $G(T, x, i) = U(x)$.

综上所述, 我们有如下定理.

定理 2 假设 HJB 方程的解 $G(t, x, i)$ 存在, 且存在 $K > 0$ 以及 $l \in \mathbb{N}$, 则对任意的 $0 \leq t \leq T$ 有 $|G(t, x, i)| \leq K(1 + |x|^l)$, 此外还满足 $G_x > 0$, $G_{xx} < 0$, 则由(8)式定义的值函数 $V(t, x, i) = G(t, x, i)$, 以及最优投资策略满足下式:

$$\pi^*(t, x, i) = -\frac{(b_i - r)V_x}{\sigma_i^2 x V_{xx}}, \quad (11)$$

另外, $-\frac{\lambda\mu\eta V_x}{\beta^2 V_{xx}} \leq 1$ 时, 最优再保险策略为:

$$a^*(t, x, i) = -\frac{\lambda\mu\eta V_x}{\beta^2 V_{xx}}, \quad (12)$$

且值函数满足方程:

$$V_t + rxV_x - \left[\frac{(b_i - r)^2}{2\sigma_i^2} + \frac{\lambda^2 \mu^2 \eta^2}{2\beta^2} \right] \frac{V_x^2}{V_{xx}} - \lambda\mu(\eta - \theta)V_x + \sum_{j \in [1, 2, \dots, N]} q_{ij}(V(t, x, j) - V(t, x, i)) = 0. \quad (13)$$

定理 2 的证明直接来自于验证定理 1, 条件 $-\frac{\lambda\mu\eta V_x}{\beta^2 V_{xx}} \leq 1$ 是为了保证 $0 \leq a^*(t, x, i) \leq 1$.

3 指数效用函数

考虑特定的效用函数, 即指数效用函数下保险公司的最优投资和再保险策略问题. 设指数效用函数满足下式:

$$U(x) = c - \frac{k}{\gamma} e^{-\gamma x},$$

其中: $\gamma > 0$, $k > 0$. 这类效用函数具有常值绝对风险厌恶参数 γ , 且

$$\gamma = -\frac{U''(x)}{U'(x)}.$$

为求 HJB 方程的解, 受文献[2]启发, 我们猜测其解满足如下形式:

$$G(t, x, i) = c - (k/\gamma)e^{-\gamma x e^{r(T-t)}} g(t, i), \quad (14)$$

因为边界条件 $G(T, x, i) = U(x)$, 有 $g(T, i) = 1$. 另外, 我们先假定存在 $K > 0$ 及 $l \in \mathbb{N}$, 对任意的 $0 \leq t \leq T$, 有 $|G(t, x, i)| \leq K(1 + |x|^l)$ 和 $G_x > 0$, $G_{xx} < 0$. 等求出 $G(t, x, i)$ 的具体表达式后, 将在定理 3 的证明中验证 $G(t, x, i)$ 满足这些假设. 对 $G(t, x, i)$ 关于变量 t 求一阶导数, 对变量 x 分别求一阶导数和二阶导数可得:

$$G_t = -(k/\gamma)e^{-\gamma x e^{r(T-t)}} g_t(t, i) - kx r e^{r(T-t)} e^{-\gamma x e^{r(T-t)}} g(t, i), \quad (15)$$

$$G_x = k e^{r(T-t)} e^{-\gamma x e^{r(T-t)}} g(t, i), \quad (16)$$

$$G_{xx} = (-k\gamma e^{2r(T-t)}) e^{-\gamma x e^{r(T-t)}} g(t, i), \quad (17)$$

将 G_t, G_x, G_{xx} 代入(13)式, 可得:

$$g_t(t, i) - \left[\frac{(b_i - r)^2}{2\sigma_i^2} + \frac{\lambda^2 \mu^2 \eta^2}{2\beta^2} \right] g(t, i) + \lambda\gamma\mu(\eta - \theta)e^{r(T-t)} g(t, i) + \sum_{j \in \{1, 2, \dots, N\}} q_{ij} [g(t, j) - g(t, i)] = 0, \quad (18)$$

令

$$m_{\varepsilon_i} = \frac{(b_{\varepsilon_i} - r)^2}{2\sigma_{\varepsilon_i}^2} + \frac{\lambda^2 \mu^2 \eta^2}{2\beta^2}, \quad (19)$$

则 $g(t, i)$ 满足如下方程:

$$g_t(t, i) - m_i g(t, i) + \lambda\gamma\mu(\eta - \theta)e^{r(T-t)} g(t, i) + \sum_{j \in \{1, 2, \dots, N\}} q_{ij} [g(t, j) - g(t, i)] = 0. \quad (20)$$

下面的引理给出了满足上述方程 $g(t, i)$ 的表达式. 我们采用文献[12]中的方法来证明下面引理. 由于我们的模型与文献[12]有所区别, 因此不考虑省略该引理的证明过程.

引理 1 函数 $g(t, i)$ 满足:

$$g(t, i) = \exp \left\{ \frac{\lambda\gamma\mu(\eta - \theta)(e^{r(T-t)} - 1)}{r} - \frac{\lambda^2 \mu^2 \eta^2 (T - t)}{2\beta^2} \right\} E \left[e^{\int_t^T \frac{-(b_{\varepsilon_u} - r)^2}{\sigma_{\varepsilon_u}^2} du} \mid \varepsilon_t = e_i \right]. \quad (21)$$

证明 利用 Ito's 公式可得:

$$g(T, \varepsilon_T) = g(t, i) + \int_t^T g_t(s, \varepsilon_s) ds + \sum_{t \leq s \leq T} [g(s, \varepsilon_{s+}) - g(s, \varepsilon_s)], \quad (22)$$

由(20)式可知:

$$g_t(s, \varepsilon_s) = m_{\varepsilon_s} g(s, \varepsilon_s) - \lambda\gamma\mu(\eta - \theta)e^{r(T-s)} g(s, \varepsilon_s) - \sum_{j \in \{1, 2, \dots, N\}} q_{\varepsilon_s j} [g(s, j) - g(s, \varepsilon_s)] = 0, \quad (23)$$

注意 $g(T, \varepsilon_T) = 1$ 和等式

$$E \left[\sum_{t \leq s \leq T} [g(s, \varepsilon_{s+}) - g(s, \varepsilon_s)] \mid \varepsilon_t = e_i \right] = E \left[\int_t^T \sum_{j \in \{1, 2, \dots, N\}} q_{\varepsilon_s j} [g(s, j) - g(s, \varepsilon_s)] ds \mid \varepsilon_t = e_i \right],$$

再将(23)式代入方程(22), 两边同时关于 $\varepsilon_t = e_i$ 求条件期望可得:

$$1 = g(t, i) + \int_t^T E[m_{\varepsilon_s} g(s, \varepsilon_s) \mid \varepsilon_t = e_i] ds - \int_t^T E[\lambda\gamma\mu(\eta - \theta)e^{r(T-s)} g(s, \varepsilon_s) \mid \varepsilon_t = e_i] ds,$$

则

$$g(t, i) = E[\exp \{ \int_t^T (-m_{\varepsilon_s} + \lambda\gamma\mu(\eta - \theta)e^{r(T-s)}) ds \} \mid \varepsilon_t = e_i] = \exp \left\{ \frac{\lambda\gamma\mu(\eta - \theta)(e^{r(T-t)} - 1)}{r} - \frac{\lambda^2 \mu^2 \eta^2 (T - t)}{2\beta^2} \right\} E \left[e^{\int_t^T \frac{-(b_{\varepsilon_u} - r)^2}{\sigma_{\varepsilon_u}^2} du} \mid \varepsilon_t = e_i \right].$$

在(21)式中 $g(t, i)$ 含有条件期望, 下面我们讨论这个条件期望的计算. 令

$$J_i = \int_t^T I_{\{\varepsilon_s = e_i\}} ds,$$

表示马尔可夫链 ε 在时间 $[t, T]$ 内的累积逗留时间, 这里 $I_{\{\cdot\}}$ 为示性函数, 则

$$E \left[e^{\int_t^T \frac{-(b_{\varepsilon_u} - r)^2}{\sigma_{\varepsilon_u}^2} du} \mid \varepsilon_t = e_i \right] = E \left[e^{\sum_{i=1}^N \frac{-(b_i - r)^2 J_i}{\sigma_i^2}} \mid \varepsilon_t = e_i \right], \quad (24)$$

由(24)式可以知道, 如果在给定条件 $\varepsilon_t = e_i$ 下, $J = (J_1, J_2, \dots, J_N)$ 的条件概率密度函数即可计算出(24)式. 由文献[17]可知, J 的条件特征函数, 再由富里埃反变换即可得到 J 的条件概率密度函数. 特

别的, 当马尔可夫链 ε 的状态空间只有 2 个状态时,

$$E \left[e^{\int_t^T \frac{-(b_{\varepsilon_t} - r)^2}{\sigma_{\varepsilon_t}^2} du} \mid \varepsilon_t = e_i \right] = E \left[e^{\frac{-(b_1 - r)^2 J_1}{\sigma_1^2} + \frac{(b_2 - r)^2 (T - t - J_1)}{\sigma_2^2}} \mid \varepsilon_t = e_i \right].$$

在给定条件 $\varepsilon_t = e_i$ 下, J_1 的条件概率密度函数有显解, 具体可参考文献[18].

定理 3 在指数效用函数下, 保险公司的最优投资策略为:

$$\pi^*(t, x, i) = \frac{(b_i - r)e^{-r(T-t)}}{x\gamma\sigma_i^2},$$

当 $\lambda\mu\eta \leq \gamma\beta^2 e^{r(T-t)}$ 时, 最优再保险策略为:

$$a^*(t, x, i) = \frac{\lambda\mu\eta e^{-r(T-t)}}{\gamma\beta^2},$$

且值函数为:

$$V(t, x, i) = c - \frac{k}{\gamma} e^{-\gamma x e^{r(T-t)}} g(t, i),$$

其中: $g(t, i)$ 满足方程(21).

证明 当 $g(t, i)$ 满足方程(21)时, 由引理 1 的证明可知(14)式所决定的 $G(t, x, i)$ 满足 HJB 方程的解. 因为 $g(t, i) > 0$, 再由(16)和(17)式可以知道 $G_x > 0$ 和 $G_{xx} < 0$. 由于

$$|G(t, x, i)| \leq \max \left\{ c, \frac{k}{\gamma} e^{-\gamma x e^{r(T-t)}} g(t, i) \right\} \leq \max \left\{ c, \frac{k}{\gamma} (1 + \gamma e^{r(T-t)} x) g(t, i) \right\},$$

且 $g(t, i)$ 是有界的, $x > 0$, 则肯定存在一个正常数 $K > 0$, 使得 $G(t, x, i) \leq K(1 + |x|)$. 于是由定理 2 知, $V(t, x, i) = G(t, x, i)$, 并将(16)和(17)式代入(11)和(12)式, 即可获得定理 3 的证明.

4 数值结果

我们利用 Matlab 软件得到一些数值结果, 并分析市场利率 r 和绝对风险厌恶参数 γ 对最优投资策略和最优再保险策略的影响. 下面图形所采用的参数假定如下: 当市场处于状态 e_1 时, 风险资产的平均回报率和波动率分别是 $b_1 = 0.1$, $\sigma_1 = 0.2$; 当市场处于状态 e_2 时, 风险资产的平均回报率和波动率分别是 $b_2 = 0.08$, $\sigma_2 = 0.1$; 保险公司的相对

安全负荷为 $\theta = 0.2$, 再保险公司的相对安全负荷 $\eta = 0.25$, 索赔额 Y_i 的均值 $\mu = 0.1$, 泊松过程的强度 $\lambda = 2$, 也就是年平均发生索赔的次数为 2, 二阶矩 $\delta^2 = 0.5$, 则 $\beta = \sqrt{\lambda\delta^2} = 1$, $T - t = 5$ 年, t 时刻保险公司的财富 $x = 10$.

在图 1 中我们考虑了市场利率和绝对风险厌恶系数对最优投资策略 $\pi^*(t, x, 1)$ 的影响, 这里 $\pi^*(t, x, 1)$ 表示当市场经济状态处于状态 e_1 时, 保险公司所采取的最优投资策略.

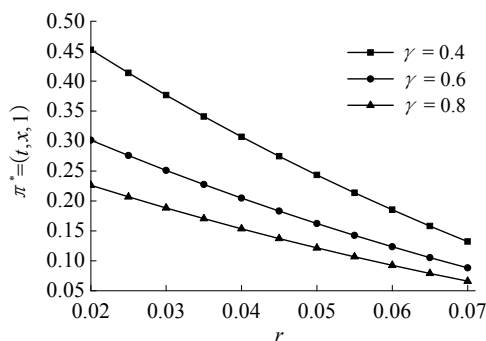


图 1 市场利率和绝对风险厌恶系数对最优投资策略 $\pi^*(t, x, 1)$ 的影响

从图 1 可看出, 市场利率越大, 保险公司投资于风险资产的比例越小, 这是因为当市场利率大时, 保险公司购买无风险资产获得的收益是增大的, 随着市场利率越接近风险资产的回报率, 公司更加没有兴趣购买风险资产, 因为购买风险资产没有带来比购买无风险资产更多超额的回报, 但是却要承担风险资产贬值的危险. 从图 1 还可以看出, 随着绝对风险厌恶系数 γ 的增大, 保险公司购买风险资产的比例也在减小. 这是因为风险厌恶系数 γ 越大, 保险公司更加厌恶风险, 因此购买风险资产的比例自然会减小.

在图 2 中我们考虑了市场利率和绝对风险厌恶系数对最优投资策略 $\pi^*(t, x, 2)$ 的影响, 这里 $\pi^*(t, x, 2)$ 表示当市场经济状态处于状态 e_2 时, 保险公司所采取的最优投资策略.

与图 1 类似, 市场利率和风险厌恶系数对最优投资策略 $\pi^*(t, x, 2)$ 有着负面影响, 即其值越大, $\pi^*(t, x, 2)$ 越小. 从图 2 可以发现 $\pi^*(t, x, 2)$ 并不是都小于 1 的, 当 $\pi^*(t, x, 2) > 1$ 时, 保险公司其实是从银行借钱来投资于风险资产的, 因为文中并没有假定保险公司是不能借贷的.

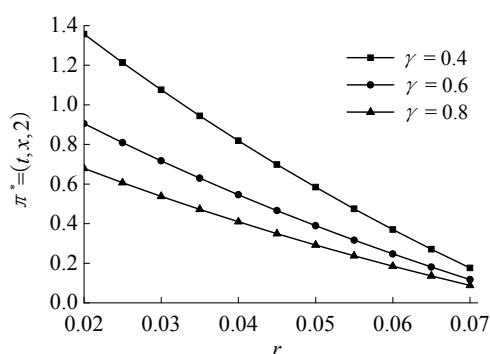


图2 市场利率和绝对风险厌恶系数对最优投资策略 $\pi^*(t, x, 2)$ 的影响

另外, 比较图1和图2数值可发现 $\pi^*(t, x, 2) > \pi^*(t, x, 1)$, 这表明当市场经济状态处于状态 e_2 时, 保险公司更愿意购买风险资产。但是, 在状态 e_2 时风险资产的平均回报率 $b_2 = 0.08$, 小于状态 e_1 时风险资产的平均回报率 $b_1 = 0.1$, 按道理说当经济状态在状态 e_1 时保险公司应该比在状态 e_2 时更愿意购买风险资产。而我们的结果却相反, 这主要是因为, 在状态 e_2 时假定风险资产的波动率为 $\sigma_2 = 0.1$, 在状态 e_1 时波动率为 $\sigma_1 = 0.2$, 波动率越大, 风险也越大, 所以尽管经济状态在状态 e_1 时风险资产的回报率超过状态 e_2 , 但保险公司更愿意在状态 e_2 时多购买风险资产。

市场利率和绝对风险厌恶系数对最优投资策略 $a^*(t, x, i)$ 的影响如图3所示。在图3中 $a^*(t, x, i)$ 表示当市场经济状态处于状态 e_i 时, 保险公司所采取的最优再保险策略, 注意我们假定 $a^*(t, x, i)$ 为自留额, 即当将来面临索赔时保险公司支付的比例为 $a^*(t, x, i)$, 再保险公司支付 $1 - a^*(t, x, i)$ 。

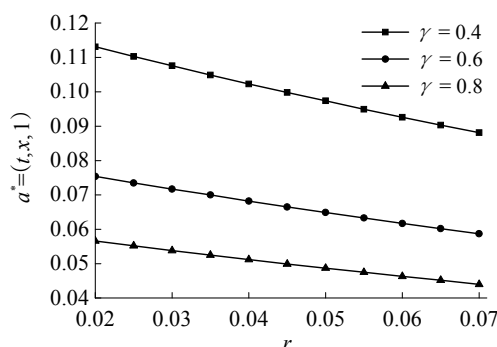


图3 市场利率和绝对风险厌恶系数对最优再保险策略 $a^*(t, x, i)$ 的影响

从定理3可以发现最优再保险策略不受经济

状态的影响, 所以我们没有再分别求 $a^*(t, x, 1)$ 和 $a^*(t, x, 2)$ 。市场利率越大, 保险公司投资于无风险资产获益越多, 因而会减少购买更高收益但风险较大的风险资产。但对保险公司来说, 如果把更多的钱放到银行而不去追求更高回报的投资, 可能将来面临索赔时风险很大, 所以为了转移风险, 保险公司购买更多的再保险, 这样就造成 $a^*(t, x, i)$ 减小。风险厌恶系数 γ 越大, 保险公司更加厌恶风险, 因此保险公司希望转移更多的风险给再保险公司, 使得 $a^*(t, x, i)$ 减小。

5 结语

本文假设风险资产的价格满足马尔可夫调制的几何布朗运动模型, 即风险资产的平均回报率、波动率都随着市场经济状态的不同而取不同的值, 使得模型更加贴合实际。此外, 文中还假定保险公司为了安全起见, 通过购买再保险来转移风险, 得到了最优投资策略及最优再保险策略。从文中的结果可以看出最优投资策略与保险公司在 t 时刻的财富和经济状态有关, 而最优再保险策略与经济状态和 t 时刻的财富无关。最后我们利用数值计算分析了模型中的参数对最优投资策略和最优再保险策略的影响。

参考文献:

- [1] Markowitz H. Portfolio selection[J]. Journal of Finance, 1952, 7:77-91.
- [2] Browne S. Optimal investment policies for a firm with a random risk process: Exponential utility and minimizing and probability of ruin[J]. Mathematics of Operations Research, 1995, 20(4):937-958.
- [3] Yang H L, Zhang L H. Optimal investment for insurer with jump diffusion risk process[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2005, 37(3):7615-7634.
- [4] 杨招军. 部分信息下极大化终止时刻期望效用[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(5):708-712.
- [5] Bai L H, Guo J Y. Optimal proportional reinsurance and investment with multiple risky assets and no-shorting constraint[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2008, 42(3):968-975.
- [6] 罗琰, 杨招军. 保险公司最优投资及再保险策略[J]. 财经理论与实践, 2009, 30(159):31-34.
- [7] Yi B, Li Z F, Viens F G. Robust optimal control for an

- insurer with reinsurance and investment under Heston's stochastic volatility model[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2013, 53:601-614.
- [8] Heston S L. A closed form solution for options with stochastic volatility with application to bond and currency options[J]. Review of Financial Studies, 1993, 6:293-326.
- [9] Hardy M R. A regime switching model of a long term stock returns[J]. North American Actuarial Journal, 2001, 3:185-211.
- [10] Andrew A, Bekaert G. Regime switches in interest rates[J]. Journal of Business and Economic Statistics, 2002, 20:163-182.
- [11] Andrew A, Bekaert G. Short rate nonlinearities and regime switches[J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 2002, 26:1243-1274.
- [12] Bauerle N, Rieder U. Portfolio optimization with Markov-modulated stock prices and interest rates[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49:442-447.
- [13] Elliott R J, Siu T K. On risk minimizing portfolios under a Markovian regime switching Black-Scholes economy[J]. Annals of Operations Research, 2010, 176(1):271-291.
- [14] Sotomayor L R, Cadenillas A. Explicit solutions of consumption investment in financial markets with regime switching[J]. Mathematical Finance, 2009, 19(2):251-279.
- [15] Rieder U, Bauerle N. Portfolio optimization with unobservable Markov-modulated drift process[J]. Journal of Applied Probability, 2005, 42(2):362-378.
- [16] Harrison M J. Ruin problems with compounding assets[J]. Stochastic Processes and their Applications, 1977, 5:67-79.
- [17] Buffington J, Elliott R J. American options with regime switching[J]. International Journal of Theoretical and Applied Finance, 2002, 5:497-514.
- [18] Yoon J H, Jang B G, Roh K H. An analytic valuation method for multivariate contingent claims with regime-switching volatilities[J]. Operations Research Letters, 2011, 39:180-187.

Optimal Policies on Investment and Reinsurance Based on a Markov Regime Switching Model

WANG Wei, GAN Shao-bo

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: The problem of optimal investment and reinsurance policies based on a Markov regime switching model is studied. The dynamics of a risky asset is assumed to follow a Markov-modulated geometry Brownian motion, and an optimal investment and reinsurance policy by maximizes the expected exponential utility of terminal wealth is obtained. The results indicate that regime switching has a significant effect on the optimal investment strategies. In the end, the numerical analysis is provided which presents the effect of the market interest rate and absolute risk aversion parameter on the optimal investment and reinsurance policies.

Key words: regime switching; reinsurance; exponential utility

(责任编辑 史小丽)