

基于衰减 SPECT 投影数据的重建研究

叶丽颖^{1,2}, 王金平^{1*}

(1. 宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211; 2. 公安海警学院, 浙江 宁波 315801)

摘要: 基于 Novikov 反演公式针对扇形束投影得到了一种过滤背投影(FBP)算法, 利用欧拉公式预先完成了取实步骤, 使结果中不再需要取实, 大大简化了后期的数据处理计算. 同时采用坐标变换, 使该算法能分别从平行束和扇形束几何特征下获取投影数据中重建图像.

关键词: Novikov 反演公式; FBP 算法; 扇形束; 图像重建

中图分类号: O177.6; O175.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-5132 (2015) 01-0065-05

Radon 变换及其反演公式在图像重建中有着重要的作用, 对重建算法的讨论, 主要分为 2 大类: 迭代法和解析法. 迭代法由于运算量大, 处理时间过长, 未能在临床中广泛应用; 而解析算法由于能够快速得到重建图像而被普遍接受. 目前, 至少在医学图像领域中, FBP 重建算法是最重要的算法, 已被广泛应用于临床医学. 在平行几何扫描下, 人们已经对以 FBP 算法为基础的 Radon 变换的反演公式做了大量的研究^[1-3], 在此研究基础上, 2002 年 Novikov 得到了一种 FBP 型的明确的反演公式^[1]. 随后, 人们逐渐将 FBP 算法拓展到研究扇形束几何扫描投影数据下的重建问题^[4-5]. 尤江生等在 2005 年得到衰减扇形投影下的 FBP 算法^[6], 但是他们推导出的公式最终结果需要取实.

笔者在 Novikov 反演公式的基础上得到了一种新的 FBP 算法. 不同于尤江生的结果. 我们在运算过程之前已经完成了取实步骤, 在最终结果中不再需要取实, 这样就会使后期的计算处理变得简单.

1 相关定义及记号

在单光子发射断层成像(SPECT)中, $f(x, y)$ 表示人体内放射性示踪剂的浓度分布. 从位置 (x, y) 发射出的 γ 射线光子, 在它们到达探测器之前在

人体内以 $\mu(x, y)$ 为衰减系数进行衰减. 我们记单位向量 $\vec{\theta} = (\cos \theta, \sin \theta)$, $\vec{\theta}^\perp = (-\sin \theta, \cos \theta)$. 假设 $f(x, y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的一个二元函数, 为下面讨论方便, 我们记:

$$f_\theta(s, t) = f(s \cos \theta - t \sin \theta, s \sin \theta + t \cos \theta) = f(s\vec{\theta} + t\vec{\theta}^\perp),$$

自变量在直角坐标系 (x, y) 与 (s, t) 下的关系是通过沿逆时针方向旋转一个角度和平移后得到的. 在平行束扫描几何意义下, 我们用 $p(s, \theta)$ 表示沿探测器沿角度 θ , 位置 s 处收集的 γ 光子总数, 从而有下面表达式:

$$p(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-D_{\mu_\theta}(s, t)} f(s\vec{\theta} + t\vec{\theta}^\perp) dt, \quad (1)$$

其中: $D_{\mu_\theta}(s, t) = \int_t^\infty \mu_\theta(s, \tau) d\tau$.

函数 $p(s, \theta)$ 也叫 $f(x, y)$ 的衰减 Radon 变换数据, 用 $R_\mu f$ 表示. 在给出 Novikov 的反演公式前, 我们先给出几个数学变换的记号和定义.

R 表示 Radon 变换:

$$[Rf](s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s\vec{\theta} + t\vec{\theta}^\perp) dt,$$

H 表示 Hilbert 变换:

$$[Hg](s) = \frac{1}{\pi} p v \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(l)}{s-l} dl,$$

T 表示导数 Hilbert 变换:

收稿日期: 2013-12-13. 宁波大学学报(理工版) 网址: <http://journal.g.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金 (61271398).

第一作者: 叶丽颖 (1987-), 女, 浙江宁波人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 积分变换与图像处理. E-mail: yly_1987@163.com

*通信作者: 王金平 (1962-), 男, 湖北武汉人, 教授, 主要研究方向: 积分变换与图像处理. E-mail: wangjinping@nbu.edu.cn

$$[Tg](s) = \frac{1}{\pi} p v \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g'(l)}{s-l} dl.$$

显然在平行束扫描几何意义下, 利用 Novikov 的反演公式, 我们可以由 $p(s, \theta)$ 重建 $f(x, y)$ [6-7], 其反演公式为:

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi} \text{Rediv} \int_0^{2\pi} \bar{\theta} e^{D_{\mu\theta}(s, t)} [e^{-h} H e^h p](s, \theta) d\theta = \frac{1}{4\pi} \text{Re} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial s} (e^{D_{\mu\theta}(s, t)} [e^{-h} H e^h p](s, \theta)) d\theta, \quad (2)$$

这里 div 表示散度算子,

$$h(s, \theta) = \frac{1}{2} (I + iH) R\mu(s, \theta),$$

其中: i 是复数符号 $i = \sqrt{-1}$, I 是恒等算子.

2 主要结果

引理 1 假设

$$h_1(s, \theta) = \frac{1}{2} R\mu(s, \theta), h_2(s, \theta) = \frac{1}{2} HR\mu(s, \theta), p_a(s, \theta) = \text{Re}[e^{-h} H e^h p](s, \theta),$$

则有:

$$p_a(s, \theta) = e^{-h_1} [\cosh_2 H [e^{h_1} \cosh_2 p] + \sinh_2 H [e^{h_1} \sinh_2 p]](s, \theta). \quad (3)$$

证明 我们有:

$$h = \frac{1}{2} (I + iH) R\mu = \frac{1}{2} R\mu + \frac{1}{2} iHR\mu,$$

所以

$$h = h_1 + ih_2,$$

则有:

$$\begin{aligned} p_a(s, \theta) &= \text{Re}[e^{-h} H e^h p](s, \theta) = \\ &\text{Re}[e^{-h_1 - ih_2} H e^{h_1 + ih_2} p](s, \theta) = \\ &\text{Re} e^{-h_1} [(\cosh_2 - i \sinh_2) H e^{h_1} (\cosh_2 + \\ &i \sinh_2) p](s, \theta) = e^{-h_1} [\cosh_2 H [e^{h_1} \cosh_2 p] + \\ &\sinh_2 H [e^{h_1} \sinh_2 p]](s, \theta), \end{aligned}$$

证毕.

定理 1 设 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, 为使下面公式能够简洁表达, 我们记 $x \cos \theta + y \sin \theta = s$, 则有如下反演公式:

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial s} e^{D_{\mu\theta}(s, t)}.$$

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-h_1}}{\pi(s-l)} [\cosh_2(e^{h_1} \cosh_2 p)(s, \theta) + \\ &\sinh_2(e^{h_1} \sinh_2 p)(s, \theta)] dl d\theta + \\ &\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} e^{D_{\mu\theta}(s, t)} \frac{\partial}{\partial s} (e^{-h_1} \cosh_2) \cdot \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{h_1} \cosh_2 p(s, \theta)}{\pi(s-l)} dl d\theta + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} e^{D_{\mu\theta}(s, t)} \cdot \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-h_1} \cosh_2}{\pi(s-l)} \frac{\partial}{\partial l} (e^{h_1} \cosh_2 p)(l, \theta) dl d\theta + \\ &\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} e^{D_{\mu\theta}(s, t)} \frac{\partial}{\partial s} (e^{-h_1} \sinh_2) \cdot \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{h_1} \sinh_2 p(s, \theta)}{\pi(s-l)} dl d\theta + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} e^{D_{\mu\theta}(s, t)} \cdot \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-h_1} \sinh_2}{\pi(s-l)} \frac{\partial}{\partial l} (e^{h_1} \sinh_2 p)(l, \theta) dl d\theta. \quad (4) \end{aligned}$$

证明 从 Novikov 的反演公式出发, 由于只有 h 中包含有虚部, 利用引理 1 可得:

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (p_a(s, \theta) \frac{\partial}{\partial s} e^{D_{\mu\theta}(s, t)} + e^{D_{\mu\theta}(s, t)} \frac{\partial}{\partial s} p_a(s, \theta)) d\theta, \quad (5)$$

计算 $p_a(s, \theta)$ 和 $\frac{\partial}{\partial s} p_a(s, \theta)$, 得到:

$$\begin{aligned} p_a(s, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h_1} [\cosh_2 \frac{(e^{h_1} \cosh_2 p)(s, \theta)}{\pi(s-l)} dl + \\ &\sinh_2 \frac{(e^{h_1} \sinh_2 p)(s, \theta)}{\pi(s-l)} dl] = \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-h_1}}{\pi(s-l)} [\cosh_2 (e^{h_1} \cosh_2 p)(s, \theta) + \\ &\sinh_2 (e^{h_1} \sinh_2 p)(s, \theta)] dl, \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} p_a(s, \theta) &= \frac{\partial}{\partial s} (e^{-h_1} \cosh_2) \cdot \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{h_1} \cosh_2 p(s, \theta)}{\pi(s-l)} dl + \\ &e^{-h_1} \cosh_2 [Te^{h_1} \cosh_2 p](s, \theta) + \\ &\frac{\partial}{\partial s} (e^{-h_1} \sinh_2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{h_1} \sinh_2 p(s, \theta)}{\pi(s-l)} dl + \\ &e^{-h_1} \sinh_2 [Te^{h_1} \sinh_2 p](s, \theta) = \\ &\frac{\partial}{\partial s} (e^{-h_1} \cosh_2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{h_1} \cosh_2 p(s, \theta)}{\pi(s-l)} dl + \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-h_1} \cosh_2}{\pi(s-l)} \frac{\partial}{\partial l} (e^{h_1} \cosh_2 p)(l, \theta) dl + \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}(e^{-h_1} \sin h_2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{h_1} \sin h_2 p(s, \theta)}{\pi(s-l)} dl + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-h_1} \sin h_2}{\pi(s-l)} \frac{\partial}{\partial l}(e^{h_1} \sin h_2 p)(l, \theta) dl, \quad (7)$$

把(6)和(7)式代入(5)式, 即可得证.

在文中衰减函数 $\mu(x, y)$ 被认为是已知的, 因此 $D_{\mu_\theta}(s, t)$ 以及 $h_1(s, \theta)$, $h_2(s, \theta)$ 均可以进行预先计算, 从而它们在任何坐标系中都是存在的.

一种典型的以圆为发射源(焦点)点轨迹的扇形束数据采集几何结构如图1所示.

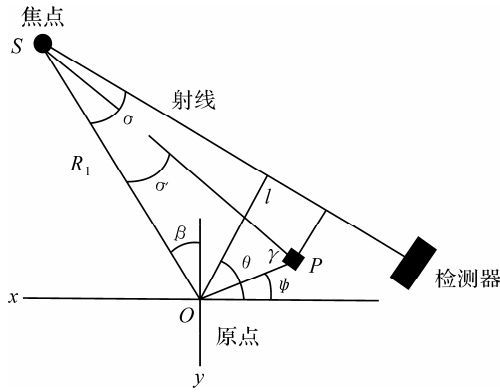


图1 典型的扇形束几何采集

每一条投影射线由 (σ, β) 唯一确定. 点 O 和点 S 分别表示坐标原点和焦点. P 是任意需要重建的点, σ 表示 OS 和投影射线之间的夹角, σ' 表示 OS 与 PS 之间的夹角, β 表示 OS 与 y 轴的夹角, R_1 是原点和焦点之间的距离.

我们引入2个记号, (σ, β) 表示扇形投影坐标, $(\rho, \sigma)_\beta$ 表示以 S 为原点的极坐标. 显然我们可以得到在平行几何与扇形几何坐标下的转化关系^[8]:

$$l = R_1 \sin \sigma, \quad \theta = \sigma + \beta, \quad (8)$$

(σ, β) 转化为 (l, θ) 的雅克比行列式值为 $R_1 \cos \sigma$, 且在 $-\pi/2 < \sigma < \pi/2$ 时始终为正.

引理2 令 $r = |\vec{r}|$, $\vec{r} = (x, y) = r(\cos \varphi, \sin \varphi)$, K 表示 SP 的长度, 则可以得到如下几何关系:

$$K = \sqrt{r^2 + R_1^2 + 2rR_1 \sin(\beta - \varphi)}, \quad (9)$$

$$r \cos(\theta - \varphi) - l = K \sin(\sigma' - \sigma), \quad (10)$$

$$K \sin \sigma' = r \cos(\beta - \varphi). \quad (11)$$

证明 由余弦定理得:

$$K^2 = R_1^2 + r^2 - 2R_1r \cos(\angle SOP) =$$

$$R_1^2 + r^2 - 2R_1r \sin\left(\frac{\pi}{2} - \angle SOP\right) =$$

$$R_1^2 + r^2 + 2R_1r \sin(\angle SOP - \frac{\pi}{2}) =$$

$$R_1^2 + r^2 + 2R_1r \sin(\beta - \varphi),$$

则(9)式成立. (10)式可以由直角三角形的关系得到. 过 P 点做 SO 的垂线交 SO 的延长线于 M , 由于

$$\angle OPM + \varphi + (\frac{\pi}{2} - \beta) = \frac{\pi}{2},$$

所以

$$\beta - \varphi = \angle OPM,$$

$$r \cos(\beta - \varphi) = r \cos(\angle OPM) = PM = K \sin \sigma',$$

证毕.

引理3 在扇形几何下定义加权的扇形投影 $g_1(\sigma, \beta)$, $g_2(\sigma, \beta)$ 为:

$$g_1(\sigma, \beta) = (e^{h_1} \cosh h_2 p)(R_1 \sin \sigma, \sigma + \beta),$$

$$g_2(\sigma, \beta) = (e^{h_1} \sinh h_2 p)(R_1 \sin \sigma, \sigma + \beta),$$

假设 $f(x, y)$ 与 $\mu(x, y)$ 均为光滑函数, 则有:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial l}(e^{h_1} \cosh h_2 p)(l, \theta) \Big|_{l=R_1 \sin \sigma, \theta=\sigma+\beta} = \\ \frac{1}{R_1 \cos \sigma} \left(\frac{\partial}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial \beta} \right) g_1(\sigma, \beta), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial l}(e^{h_1} \sinh h_2 p)(l, \theta) \Big|_{l=R_1 \sin \sigma, \theta=\sigma+\beta} = \\ \frac{1}{R_1 \cos \sigma} \left(\frac{\partial}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial \beta} \right) g_2(\sigma, \beta). \end{aligned} \quad (13)$$

证明 由链式法则得到:

$$\frac{\partial g_1(\sigma, \beta)}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial l}(e^{h_1} \cosh h_2 p)(l, \theta) \frac{\partial l}{\partial \sigma} +$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(e^{h_1} \cosh h_2 p)(l, \theta) \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} =$$

$$\frac{\partial}{\partial l}(e^{h_1} \cosh h_2 p)(l, \theta) R_1 \cos \sigma +$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(e^{h_1} \cosh h_2 p)(l, \theta),$$

$$\frac{\partial g_1(\sigma, \beta)}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial l}(e^{h_1} \cosh h_2 p)(l, \theta) \frac{\partial l}{\partial \beta} +$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(e^{h_1} \cosh h_2 p)(l, \theta) \frac{\partial \theta}{\partial \beta} =$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(e^{h_1} \cosh h_2 p)(l, \theta),$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial l}(e^{h_1} \cosh h_2 p)(l, \theta) = \frac{1}{R_1 \cos \sigma} \left(\frac{\partial}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial \beta} \right) g_1(\sigma, \beta),$$

同理可得另一个等式, 证毕.

对每个焦点位置 β 和一个固定点 (x, y) , 加权因子 $e^{D_{\mu\theta}(s,t)}$, $e^{-h_1(s,\theta)} \cos h_2(s,\theta)$, $e^{-h_1(s,\theta)} \sin h_2(s,\theta)$ 均为线 PS 上的函数. 从图 1 可知, 在坐标 (l, θ) 下 PS 的坐标表示为 $(r \cos(\beta - \varphi), \sigma' + \beta)$. 因此在扇形坐标系 (σ, β) 下, (4) 式中的加权因子可以表示为:

$$\begin{aligned} W(r, \varphi, \sigma') &= e^{D_{\mu\theta}(s,t)} \Big|_{\theta=\sigma'+\beta, s=r\cos(\theta-\varphi), t=r\sin(\theta-\varphi)}, \\ W^1(r, \varphi, \sigma') &= \frac{\partial e^{D_{\mu\theta}(s,t)}}{\partial s} \Big|_{\theta=\sigma'+\beta, s=r\cos(\theta-\varphi), t=r\sin(\theta-\varphi)}, \\ M(r, \varphi, \sigma') &= e^{-h_1(s,\theta)} \cos h_2(s,\theta) \Big|_{\theta=\sigma'+\beta, s=r\cos(\theta-\varphi)}, \\ M^1(r, \varphi, \sigma') &= \frac{\partial e^{-h_1(s,\theta)} \cos h_2(s,\theta)}{\partial s} \Big|_{\theta=\sigma'+\beta, s=r\cos(\theta-\varphi)}, \\ N(r, \varphi, \sigma') &= e^{-h_1(s,\theta)} \sin h_2(s,\theta) \Big|_{\theta=\sigma'+\beta, s=r\cos(\theta-\varphi)}, \\ N^1(r, \varphi, \sigma') &= \frac{\partial e^{-h_1(s,\theta)} \sin h_2(s,\theta)}{\partial s} \Big|_{\theta=\sigma'+\beta, s=r\cos(\theta-\varphi)}. \end{aligned}$$

定理 2 令 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, 则可以得到扇形投影下的反演公式:

$$\begin{aligned} f(r, \varphi) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{W^1(r, \varphi, \sigma')}{\pi K} d\beta \cdot \\ &\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{M(r, \varphi, \sigma') g_1(\sigma, \beta)}{\sin(\sigma' - \sigma)} + \frac{N(r, \varphi, \sigma') g_2(\sigma, \beta)}{\sin(\sigma' - \sigma)} \right] R_1 \cos \sigma d\sigma + \\ &\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{W(r, \varphi, \sigma') M^1(r, \varphi, \sigma')}{\pi K} d\beta \cdot \\ &\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{g_1(\sigma, \beta) R_1 \cos \sigma}{\sin(\sigma' - \sigma)} d\sigma + \\ &\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{W(r, \varphi, \sigma') M(r, \varphi, \sigma')}{\pi K} d\beta \cdot \\ &\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\frac{\partial}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial \beta}) g_1(\sigma, \beta)}{\sin(\sigma' - \sigma)} d\sigma + \\ &\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{W(r, \varphi, \sigma') N^1(r, \varphi, \sigma')}{\pi K} d\beta \cdot \\ &\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{g_2(\sigma, \beta) R_1 \cos \sigma}{\sin(\sigma' - \sigma)} d\sigma + \\ &\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{W(r, \varphi, \sigma') N(r, \varphi, \sigma')}{\pi K} d\beta \cdot \\ &\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\frac{\partial}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial \beta}) g_2(\sigma, \beta)}{\sin(\sigma' - \sigma)} d\sigma. \end{aligned} \quad (14)$$

其中: $\sigma' = \arcsin\left(\frac{r \cos(\beta - \varphi)}{K}\right)$.

证明 重新改写(5)式中的两部分为:

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} p_a(s, \theta) \frac{\partial}{\partial s} e^{D_{\mu\theta}(s,t)} d\theta = \\ &\int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-h_1}}{\pi(s-l)} [\cos h_2(e^{h_1} \cos h_2 p)(s, \theta) + \\ &\sin h_2(e^{h_1} \sin h_2 p)(s, \theta)] \frac{\partial}{\partial s} e^{D_{\mu\theta}(s,t)} dl d\theta = \\ &\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{M(r, \varphi, \sigma') g_1(\sigma, \beta)}{\pi K \sin(\sigma' - \sigma)} + \frac{N(r, \varphi, \sigma') g_2(\sigma, \beta)}{\pi K \sin(\sigma' - \sigma)} \right] \cdot \\ &W^1(r, \varphi, \sigma') R_1 \cos \sigma d\sigma d\beta = \\ &\int_0^{2\pi} \frac{W^1(r, \varphi, \sigma')}{\pi K} d\beta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R_1 \cos \sigma}{\sin(\sigma' - \sigma)} \cdot \\ &[M(r, \varphi, \sigma') g_1(\sigma, \beta) + N(r, \varphi, \sigma') g_2(\sigma, \beta)] d\sigma. \\ &\int_0^{2\pi} e^{D_{\mu\theta}(s,t)} \frac{\partial}{\partial s} p_a(s, \theta) d\theta = \\ &\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{W(r, \varphi, \sigma') M^1(r, \varphi, \sigma')}{\pi K \sin(\sigma' - \sigma)} \cdot \right. \\ &g_1(\sigma, \beta) R_1 \cos \sigma d\sigma d\beta + \\ &\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{W(r, \varphi, \sigma') M(r, \varphi, \sigma')}{\pi K \sin(\sigma' - \sigma)} \cdot \right. \\ &(\frac{\partial}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial \beta}) g_1(\sigma, \beta)] d\sigma d\beta + \\ &\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{W(r, \varphi, \sigma') N^1(r, \varphi, \sigma')}{\pi K \sin(\sigma' - \sigma)} \cdot \right. \\ &g_2(\sigma, \beta) R_1 \cos \sigma d\sigma d\beta + \\ &\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{W(r, \varphi, \sigma') N(r, \varphi, \sigma')}{\pi K \sin(\sigma' - \sigma)} \cdot \right. \\ &(\frac{\partial}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial \beta}) g_2(\sigma, \beta)] d\sigma d\beta = \\ &\int_0^{2\pi} \frac{W(r, \varphi, \sigma') M^1(r, \varphi, \sigma')}{\pi K} d\beta \cdot \\ &\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{g_1(\sigma, \beta) R_1 \cos \sigma}{\sin(\sigma' - \sigma)} d\sigma + \\ &\int_0^{2\pi} \frac{W(r, \varphi, \sigma') M(r, \varphi, \sigma')}{\pi K} \cdot \\ &\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\frac{\partial}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial \beta}) g_1(\sigma, \beta)}{\sin(\sigma' - \sigma)} d\sigma d\sigma + \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{W(r, \varphi, \sigma') N^1(r, \varphi, \sigma')}{\pi K} d\beta \cdot$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{g_2(\sigma, \beta) R_1 \cos \sigma}{\sin(\sigma' - \sigma)} d\sigma +$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{W(r, \varphi, \sigma') N(r, \varphi, \sigma')}{\pi K} d\beta \cdot$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\frac{\partial}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial \beta}) g_2(\sigma, \beta)}{\sin(\sigma' - \sigma)} d\sigma,$$

公式即可得证. 由引理 2 的(11)式可得:

$$\sin \sigma' = \frac{r \cos(\beta - \varphi)}{K},$$

所以有:

$$\sigma' = \arcsin\left(\frac{r \cos(\beta - \varphi)}{K}\right),$$

证毕.

3 总结

得到了一种不同于文献[6]中公式的扇形束投影的 FBP 算法, 本文的结果在最终公式中不再需要取实. FBP 算法使后期数据处理计算变得更为简单, 我们将在以后的工作中尝试计算机模拟.

参考文献:

- [1] Novikov R G. An inversion formula for the attenuated X-ray transformation[J]. Ark Math, 2002, 40(1):145-167.
- [2] Shepp L, Logan B. The Fourier reconstruction of a head section[J]. IEEE Trans Nucl Sci, 1974, 21(3):21-43.
- [3] Tretiak O, Metz C. The exponential Radon transform[J]. SIAM J Appl Math, 1980, 39(2):341-354.
- [4] Herman G T, Naparstek A V. Fast image reconstruction based on a Radon inversion formula appropriate for rapidly collected data[J]. SIAM J Appl Math, 1977, 33(3): 511-533.
- [5] Horn B K P. Fan-beam reconstruction methods[J]. Proc IEEE, 1979, 67(12):1616-1633.
- [6] You J, Zeng G L, Liang Z. FBP algorithms for attenuated fan-beam projections[J]. Inverse Problems, 2005, 21(3): 1179-1192.
- [7] Natterer F. Inversion of the attenuated Radon transform[J]. Inverse Problems, 2001, 17(1):113-119.
- [8] Huang Q, You J, Zeng G L. Reconstruction from uniformly attenuated SPECT projection data using the DBH method[J]. IEEE Trans Med Imag, 2009, 28(1):17-29.

Reconstruction from Attenuated SPECT Projection Data

YE Li-ying^{1,2}, WANG Jin-ping^{1*}

(1.Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China; 2.China Maritime Police Academy, Ningbo 315801, China)

Abstract: In this paper, we present a kind of filtered backprojection (FBP) algorithm for the attenuated fan-beam projection based on the Novikov's inversion formula. Our result does not need to take real part in the final formula as it did without using Euler's formula as found in our previous study, which may greatly simplify the data processing and calculating in the further work. Using coordinate transformation, the algorithm is able to reconstruct image from data for parallel-beam and fan-beam geometry, respectively.

Key words: Novikov's inversion formula; FBP algorithm; fan-beam; image reconstruction

(责任编辑 史小丽)