

一类带跳的随机微分方程解的 Harnack 不等式

王彦涛, 朱全新*

(宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 针对一类带泊松跳的随机微分方程, 在一些合理的条件假设下研究了该类方程解的半群 $P_t^1 f(x) := E[f(X_t^x)I_{\tau_1 \leq t}]$ 的 Harnack 不等式和 Log-Harnack 不等式问题. 首先建立了两类半群之间的关系, 同时使用耦合方法, 结合 Girsanov 定理、Hölder 不等式、Young 不等式以及 Ito 公式, 先后获得了 Harnack 和 Log-Harnack 的 2 种不等式.

关键词: 耦合; Harnack 不等式; 测度变换; 泊松点过程

中图分类号: O211.63

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2015) 01-0070-06

Wang 首次建立了关于有下界曲率的扩散半群的有限维数的 Harnack 不等式^[1]. 随后, 此不等式在扩散半群中被广泛应用, 最终变成一种有用的工具. 在耦合方法出现后, Arnaudom 等^[2]考虑了无界曲率下的 Harnack 不等式. Wang 等^[3]利用耦合方法和 Girsanov 定理建立了泊松过程驱动的随机微分方程解的 Harnack 不等式. Wang 等^[4]克服了延迟和可乘噪音的困难, 改进原有耦合方法, 构造成功的耦合, 建立随机泛函微分方程解的 Log-Harnack 不等式. Wang 建立了带有可乘噪音的随机微分方程解的 Harnack 不等式^[5]; 此外, Wang 在文献[6]中使用修正的次马氏算子 $P_t^1 f(x) := E[f(X_t^x)I_{\tau_1 \leq t}]$ 建立了 Harnack 不等式, 其中 τ_1 是 L_t^0 复合泊松过程的首次跳; Wang 等还在文献[7]中给出了成功耦合的判定准则.

最近, Wang 研究了如下方程:

$$dX_t = AX_t dt + BdL_t,$$

其中, L_t 是 R^d 上的 Levy 过程, 最初也是在耦合时刻 τ 前, 发生多次跳时使用条件 Girsanov 定理, 即文献[6]中建立的 Harnack 不等式. 受此启发, 笔者研究如下带泊松跳形式的随机微分方程:

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)d\omega_t + \int_Z c(t, X_t, z)\tilde{N}_k(dt, dz), \quad t \in [0, T]. \quad (1)$$

在没有跳部分时, Wang 在文献[5]中利用半群 $p_t f(x) := E[f(X_t^x)]$ 建立了 2 种 Harnack 不等式; 但添加小跳后, 笔者用半群 $P_t^1 f(x) := E[f(X_t^x)I_{\tau_1 \leq t}]$ 建立了 2 种 Harnack 不等式, 其中 τ_1 是 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ 的首次跳, 并建立了 2 种半群之间的关系.

1 预备知识和主要结论

假设给定带有 σ 代数滤流 $\{F_t\}_{t \geq 0}$ 的概率空间 (Ω, F, P) , 笔者在 R^d 之中考虑(1)式方程, 其中 $\sigma: [0, \infty) \times R^d \rightarrow R^d \times R^d$, $b: [0, \infty) \times R^d \rightarrow R^d$ 是联合可测的, $F_t^{\omega, k}$ 为适应, 且关于第二变量连续; 进一步, $c: [0, \infty) \times R^d \times Z \rightarrow R^d$ 是可料的, 且关于第二变量可测. 其中 $F_t^{\omega, k}$ 是由 $\{\omega_s, k_s\}_{s \leq t}$ 生成的完备 σ 代数, $\omega_t = (\omega_t^1, \omega_t^2, \dots, \omega_t^d)$ 是 d 维 F_t 适应的标准实值布朗运动, $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ 是带有独立补偿子的 n 维 F_t 适应稳定的泊松点过程, 且具有拟左连续轨道, 其特征测度为 n . $\tilde{N}_{k_i}(dt, dz)$ 满足 $\tilde{N}_{k_i}(dt, dz) = N_{k_i}(dt, dz) - \pi(dz, dt)$, $i = 1, 2, \dots, n$ 的 k_i 生成的泊松鞅测度, 其中, $\pi(\cdot)$ 是 σ 有限的泊松补偿测度, $N_{k_i}(dt, dz)$ 是由 k_i 生成的泊松计数测度.

在本文中, 假设对 $\forall T > 0$, 用 X_t^x 标记初值为 $X_0 = x$ 的方程(1)式. 存在唯一的强解 $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$, 它是 R^d 上的适应过程, 且

收稿日期: 2013-10-19.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journallg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(60874088, 11101441); 浙江省自然科学基金(LY12F03010, LQ13A010020); 宁波大学王宽诚基金; 高等学校博士学科点新教师基金(20100171120041).

第一作者: 王彦涛(1985-), 男, 陕西商洛人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 随机微分方程. E-mail: wangyantao19850131@126.com

*通信作者: 朱全新(1975-), 男, 湖南郴州人, 博导/教授, 主要研究方向: 马氏过程与随机微分方程. E-mail: zhuquanxin@nbu.edu.cn

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) d\omega_s + \int_0^t \int_Z c(t, X_t, z) \tilde{N}_k(dt, dz), t \in [0, T],$$

成立, $\forall (t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$.

对此类方程, 笔者建立相应的 Harnack 不等式, 并给出半群 $(P_t^1)_{t \geq 0}$ 与通常半群 $(P_t)_{t \geq 0}$ 之间的关系, 它们的定义分别为:

$$P_t^1 f(x) := E[f(X_t^x) I_{\tau_1 \leq t}], t \in [0, T],$$

$$x \in R^d, f \in B_b^+(R^d),$$

$$P_t f(x) := E[f(X_t^x)], t \in [0, T],$$

$$x \in R^d, f \in B_b^+(R^d),$$

其中, $B_b^+(R^d)$ 是 R^d 上非负有界可测函数的全体.

为得到主要结果, 假设条件如下:

(A) 存在 $[0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 上的连续函数 c_t , 使得:

$$2\langle b(t, x) - b(t, y), x - y \rangle + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\|_{HS}^2 + \int_Z |c(t, x, z) - c(t, y, z)|^2 \pi(dz) \leq c_t |x - y|^2, (x, y, z \in R^d), t \in [0, T].$$

(B) 存在 $[0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 上的递增函数 δ_t , 使得:

$$\langle \sigma(t, x) - \sigma(t, y), x - y \rangle \leq \delta_t |x - y|, (x, y \in R^d), t \in [0, T].$$

(C) 存在 $[0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 上的递减函数 λ_t , 使得:

$$\sigma^{-1}(t, x)(\sigma^*)^{-1}(t, x) \leq \lambda_t^{-2} I, (x \in R^d), t \in [0, T].$$

(D) 存在常数 c_n , 使得 $n \geq 1$ 成立,

$$|b(t, x) - b(t, y)| + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\|_{HS} +$$

$$(\int_Z |c(t, x, z) - c(t, y, z)|^2 \pi(dz))^{1/2} \leq$$

$$c_n |x - y|, |x|, |y|, |z|, t \leq n,$$

$$(x, y, z \in R^d), t \in [0, T].$$

注 (1) 条件(A)可以保证方程(1)式解的唯一性, 条件(D)可推出方程(1)强解的存在唯一性; (2) 条件(A)、(B)和(C), 分别在引理 1 及引理 2 的证明中用到, 然而条件(D)将在定理 1 的证明中用到.

定义随机集合 $D = \{(t, \omega) : \tilde{N}_k(\omega; \{t\} \times Z) = 1\}$, 如果, $\tilde{N}_k$ 在点 (t, z) 处有 1 个跳(可查阅文献[8]), 则 $\Delta X_t(\omega) = I_D(t, \omega)c(t, X_t(\omega), z)$.

另外, 其他的几点假设如下:

(E) 建立 Harnack 不等式, 要求耦合时间 $\tau < \tau_1$, 其中, $\tau := \inf\{t \in [0, T] : X_t = Y_t\}$, 否则约定 $\inf \emptyset =$

∞ . 而 Y_t 联合 X_t 构成了 1 个耦合方程组, 具体为:

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)d\omega_t + \int_Z c(t, X_t, z) \tilde{N}_k(dt, dz), X_0 = x, \\ dY_t = (b(t, X_t) - \frac{X_t - Y_t}{\xi_t} \sigma(t, Y_t) \sigma^{-1}(t, X_t))dt + \sigma(t, Y_t)d\omega_t + \int_Z c(t, Y_t, z) \tilde{N}_k(dt, dz), Y_0 = y. \end{cases} \quad (2)$$

(F) 跳的幅度很小.

(G) $\tilde{N}_k$ 与 ω_t 相互独立.

在上述几点条件下, 笔者建立基于半群 P_t^1 有关的 Harnack 不等式和 Log-Harnack 不等式, 具体见如下定理.

定理 1 在条件(A)、(B)和(C)的假设下, 则对 $\forall T > 0, f \in B(R^d), p > (1 + \delta_T / \lambda_T)^2, p > (1 + \delta_T / \lambda_T)^2$ 而言, Harnack 不等式:

$$(P_T^1 f(y))^p \leq (P_T^1 f^p(x))(1 - \exp^{-\rho T})^{p-1} \cdot \exp\left[\frac{\sqrt{p}(\sqrt{p}-1)c^*|x-y|^2}{4\delta_T((\sqrt{p}-1)\lambda_T - \delta_T)(1 - \exp^{-c^*T})}\right], \quad (3)$$

成立, 其中, $\tau_1 \leq T, c^* := \max_{t \in [0, T]} c_t, \rho := n(R^d) \in (0, \infty)$, $n(\cdot)$ 是平稳泊松点过程 k 的特征测度.

定理 2 如果条件(A)和(B)成立, 则对 $\forall T > 0, f \geq 1$, Log-Harnack 不等式:

$$P_T^1 \log f(y) \leq (1 - \exp^{-\rho T}) \cdot$$

$$\left(\log \frac{P_T^1 f(x)}{1 - \exp^{-\rho T}} + \frac{c^*|x-y|^2}{2\lambda_T^2(1 - \exp^{-c^*T})}\right) \quad (4)$$

成立, 其中, $\tau_1 \leq T$.

2 主要引理和证明

2.1 建立 2 种半群之间的关系

对平稳泊松点过程 p_t 有重要命题^[9]. 其次, π 为 p_t 的补偿测度, 则它与特征测度 $n(\cdot)$ 的关系为 $\pi(t, A) = tn(A), A \in B(R^d)$.

由半群 P_t^1 和半群 P_t 的定义可知, 它们的差别在于前者与首次跳有关, 由于更需关心的是首次跳发生的大小的概率问题, 即 $P(\tau_1 \leq t)$. 假设平稳泊松点过程 p_t 满足在 $t=0$ 时刻, $p_0=0$, 经过一段时间, 突然在某时刻 τ_B 首次跳进集合 B 中, 这里 $A \subset B, A, B \in B(R^d)$. 因此给出下述定理.

定理 3 设 p_t 是特征测度为 $n(\cdot)$ 的泊松点过程, 定义 $\tau_B := \inf\{t \geq 0 : p_t \in B\}$, 其中 $B \in B(R^d)$ 使得

$n(B) \in (0, \infty)$. 则 τ_B 与 p_{τ_B} 是独立的随机变量, 且

$$p(\tau_B \leq t) = 1 - \exp^{-tn(B)}, p(p_{\tau_B} \in \cdot) = \frac{n(\cdot \cap B)}{n(B)}. \quad (5)$$

证明 设 $A \subset B$, 则跳在 τ_B 首次跳进 B 有 2 种途径, 第 1 种途径是首次进入 A , 则 $\tau_B = \tau_A$, 成立 $\tau_A \leq \tau_B$; 第 2 种途径是首次进入 $B \setminus A$, 则 $\tau_B = \tau_{B \setminus A}$. 因此, 结合两点有下面的关系:

$$P(\tau_B \leq t, p_{\tau_B} \in A) = P(\tau_A \leq \tau_{B \setminus A}, \tau_A \wedge \tau_{B \setminus A} \leq t).$$

另一方面, 这里 τ_A 是泊松过程 $N_t^A := \#\{s \leq t: p_s \in A\}$ 的首次跳. 因此 τ_A 服从参数为 $n(A)$ 的指数分布. 因为 A 与 $B \setminus A$ 互不相交, 则 τ_A 与 $\tau_{B \setminus A}$ 是相互独立的参数, 分别为 $n(A), n(B) - n(A)$ 的指数随机变量.

因此, 令 $X := \tau_A, Y := \tau_{B \setminus A}$, 得 $f_X(x) = n(A) \cdot \exp^{-n(A)x}, f_Y(y) = (n(B) - n(A)) \exp^{-(n(B) - n(A))y}, f(x, y)$ 为 (X, Y) 的联合密度函数: $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$. 则计算积分:

$$P(X \leq Y, X \wedge Y \leq t) = \iint_{x < y, x \wedge y \leq t} f(x, y) dx dy,$$

得到 $P(\tau_B \leq t, p_{\tau_B} \in A) = (1 - \exp^{-tn(B)})n(A)/n(B)$, 即为结果. 同时, 当 $A \cap B \neq \emptyset$, 上式也成立; 当 $A \cap B = \emptyset$, 上式的左右两边等于 0. 证毕.

定理 4 设 $P_t^1 f(x)$ 和 $p_t f(x)$ 都是 $[0, T]$ 上定义的 2 个半群, 则它们之间的关系为:

$$P_t^1 f(x) \leq (1 - \exp^{-tn(B)})P_t f(x), \quad (6)$$

其中, 集合 $B \in B(R^d)$ 包含着首次跳的随机区域, 满足 $n(B) \in (0, \infty)$.

证明 由 $P_t^1 f(x)$ 和 $p_t f(x)$ 各自的定义可知在 $[0, T]$ 上, 存在如下关系:

$$p_t^1 f(x) \leq p_t f(x). \quad (7)$$

另一方面,

$$E[f(X_t^x)I_{\tau_1 \leq t}] \leq E[f(X_t^x)p(\tau_1 \leq t)]. \quad (8)$$

由于方程的解 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ 在 τ_1 前连续, 且假设泊松点过程存在的跳都是小跳, 因此肯定存在 1 个随机区域, 使得该区域以一定概率包含着第 1 次跳. 记该区域为 B , 它是与 ΔX_t 和小跳的阈值(区分小跳和大跳的很小正数)有关. 则由定理 3 可知, 首次跳 τ_1 发生的概率为 $P(\tau_1 \leq t) = 1 - \exp^{-tn(B)}$, 代入(8)式, 就得到 2 个半群之间的关系. 证毕.

2.2 建立 Harnack 不等式

在证明主要定理之前, 笔者主要应用了(1)式

类型方程的 Girsanov 定理^[10].

注 Girsanov 定理中的 $b_0(t, X_t)$ 是有界的, 但此条件也可以变弱, 使得 $b_0(t, X_t)$ 成为局部有界, 结论成立. 此时, Girsanov 定理中的(1)式条件改变^[10].

根据减弱的 Girsanov 定理, 随后将定理 1 的证明中使用耦合方法构造新的概率测度 $Q := R_{T \wedge \zeta} P$ 和它相关的布朗运动 $\tilde{\omega}_t$, 在此新的布朗运动 $\tilde{\omega}_t$ 下, 方程(2)式变为:

$$\begin{cases} dX_t = (b(t, X_t) + \frac{X_t - Y_t}{\xi_t})dt + \sigma(t, X_t)d\tilde{\omega}_t \\ \int_Z c(t, X_t, z)\tilde{N}_k(dt, dz), X_0 = x, \\ dY_t = b(t, Y_t)dt + \sigma(t, Y_t)d\tilde{\omega}_t + \\ \int_Z c(t, Y_t, z)\tilde{N}_k(dt, dz), Y_0 = y. \end{cases} \quad (9)$$

如验证(9)式携带的耦合是否成功, 需要给出下面的引理 1 和引理 2.

引理 1 需验证下面两步: (1)由于 $\{R_{s \wedge \zeta}\}_{s \in [0, T]}$ 关于 P 是一致可积鞅, 因此 $R_{T \wedge \zeta} := \lim_{s \uparrow T} R_{s \wedge \zeta}$ 存在, 这点可表明在测度 Q 下, $\{\tilde{\omega}_t\}_{t \in [0, T]}$ 是布朗运动. (2)由于 $Q(\zeta = T) = 1$, s.t.. $Q := R_{T \wedge \zeta} P$, 当 ζ 为 Y_t 的爆破时, 即 $\zeta = \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n$, 其中 ζ_n 定义为 $\zeta_n := \inf\{t \in [0, T]: |Y_t| \geq n\}$, 否则, 设 $\inf \emptyset = T$. 即有以下引理.

引理 1 假设条件(A)和(B)成立, 对 $\theta \in (0, 2)$, 则有如下关系:

$$\sup_{s \in [0, T], s \geq 1} ER_{s \wedge \eta_n} \log R_{s \wedge \eta_n} \leq \frac{c^* |x - y|^2}{2\lambda_T^2 \theta(2 - \theta)(1 - \exp^{-c^* T})}. \quad (10)$$

进一步, $R_{s \wedge \zeta} := \lim_{n \rightarrow \infty} R_{s \wedge \eta_n \wedge (T - 1/n)}, s \in [0, T], R_{T \wedge \zeta}$ 存在且使得 $\{R_{s \wedge \zeta}\}_{s \in [0, T]}$ 是一致可积鞅. 其中,

$$\eta_n := \inf\{t \in [0, T]: |X_t| + |Y_t| \geq n\}, \quad (11)$$

设 $Q = R_{T \wedge \zeta} P$, 则 $Q(\zeta = T) = 1$, 即 $Q = R_T P$, a.s..

证明 (1)在 $[0, T]$ 的时间段内, 集合 $\{t: X_t \neq X_{t-} \text{ 或 } Y_t \neq Y_{t-}\}$ 所有时间点的集合, 也就是在耦合方程(9)式发生跳的时间集内, 由于它是 1 个可数集, 因此其 Lebesgue 测度为 0. 并且 c_t 在 $[0, T]$ 上连续, 故存在最大值, 记为 c^* .

给定 $s \in [0, T]$, 由(9)式、条件(A)和 Ito 公式, 可得:

$$|X_{s \wedge \eta_n} - Y_{s \wedge \eta_n}|^2 = |x - y|^2 + 2 \int_0^{s \wedge \eta_n} \langle X_t - Y_t,$$

$$\begin{aligned}
& (\sigma(t, X_t) - \sigma(t, Y_t)) d\tilde{\omega}_t \rangle + \int_0^{s \wedge \eta_n} \|\sigma(t, X_t) - \\
& \sigma(t, Y_t)\|_{HS}^2 dt + 2 \int_0^{s \wedge \eta_n} \int_Z \langle X_t - Y_t, c(t, X_t, z) - \\
& c(t, Y_t, z) \rangle \tilde{N}_k(dt, dz) + \int_0^{s \wedge \eta_n} \int_Z |c(t, X_t, z) - \\
& c(t, Y_t, z)|^2 \pi(dz) dt + 2 \int_0^{s \wedge \eta_n} \langle X_t - Y_t, b(t, X_t) - \\
& b(t, Y_t) - (X_t - Y_t) / \xi_t \rangle dt, t \leq s \wedge \eta_n.
\end{aligned}$$

由 Girsanov 定理可知, $\{\tilde{\omega}_t\}_{t \leq s \wedge \eta_n}$ 是概率测度 $R_{s \wedge \eta_n} P$ 下的新的布朗运动. 所以可有 $R_{s \wedge \eta_n} P$ 取期望 $E_{s,n}$ 和条件(A)可得:

$$\begin{aligned}
E_{s,n} [|X_{s \wedge \eta_n} - Y_{s \wedge \eta_n}|^2] & \leq |x - y|^2 + \\
E_{s,n} [\int_0^{s \wedge \eta_n} (\bar{c}^* - 2 / \xi_t) |X_t - Y_t|^2 dt], & t \leq s \wedge \eta_n.
\end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式可得:

$$\begin{aligned}
E_{s,n} [|X_{s \wedge \eta_n} - Y_{s \wedge \eta_n}|^2] & \leq |x - y|^2 \cdot \\
\exp \{ \int_0^{s \wedge \eta_n} (\bar{c}^* - 2 / \xi_t) dt \} & < \infty, t \leq s \wedge \eta_n.
\end{aligned}$$

由导数公式可得:

$$d \frac{|X_t - Y_t|^2}{\xi_t} = \frac{\xi_t d |X_t - Y_t|^2 - \xi_t' |X_t - Y_t|^2}{\xi_t^2},$$

且,

$$\begin{aligned}
d \frac{|X_t - Y_t|^2}{\xi_t} & \leq dN_t + \frac{1}{\xi_t} (\|\sigma(t, X_t) - \sigma(t, Y_t)\|_{HS}^2 + \\
& \int_Z |c(t, X_t, z) - c(t, Y_t, z)|^2 \pi(dz) + \\
& 2 \langle X_t - Y_t, b(t, X_t) - b(t, Y_t) - (X_t - \\
& Y_t) / \xi_t \rangle dt - \frac{\xi_t' |X_t - Y_t|^2 dt}{\xi_t^2}, t \leq s \wedge \eta_n.
\end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}
N_t & := \int_0^t \frac{2}{\xi_t} (\langle X_t - Y_t, (\sigma(t, X_t) - \sigma(t, Y_t)) d\tilde{\omega}_t \rangle + \\
& \int_Z \langle X_t - Y_t, c(t, X_t, z) - c(t, Y_t, z) \rangle \cdot \\
& \tilde{N}_k(dt, dz)).
\end{aligned}$$

两边求积分并取期望, 并结合 $2 + \xi_t' - \bar{c}^* \xi_t = \theta$, 得到:

$$\begin{aligned}
E_{s,n} [\int_0^{s \wedge \eta_n} \frac{|X_t - Y_t|^2}{\xi_t^2} dt] & \leq - \frac{E_{s,n} [|X_{s \wedge \eta_n} - Y_{s \wedge \eta_n}|^2]}{\theta \xi_{s \wedge \eta_n}} + \\
\frac{|x - y|^2}{\theta \xi_0}, & t \leq s \wedge \eta_n.
\end{aligned}$$

由 $\theta \in [0, 2], \xi_{s \wedge \eta_n} > 0$, 得到:

$$\begin{aligned}
E_{s,n} [\int_0^{s \wedge \eta_n} \frac{|X_t - Y_t|^2}{\xi_t^2} dt] & \leq \frac{|x - y|^2}{\theta \xi_0}, \\
t \leq s \wedge \eta_n, & s \in [0, T], n \geq 1.
\end{aligned} \quad (12)$$

余下证明和部分(2)式的证明与文献[5]中的引理 2.1 的证明类似, 在此省略.

在引理 1 中, 表明在测度 Q 下由(9)式构造的耦合 $(X_t, Y_t)_{t \in [0, T]}$ 直到时间 T 是成功的, 所以 $X_T = Y_T, Q, a.s.$

引理 2 假设条件(A)、(B)和(C)成立, 当取 $\theta = \theta_T$ 时, R_t, ξ_t 固定, 其中 R_t 的定义为:

$$\begin{aligned}
R_t & := \exp [\int_0^t - \frac{\langle \sigma^{-1}(u, X_u)(X_u - Y_u), d\tilde{\omega}_u \rangle}{\xi_u} + \\
& \frac{1}{2} \int_0^t \frac{|\sigma^{-1}(u, X_u)(X_u - Y_u)|^2}{\xi_u^2} du], t \in [0, T].
\end{aligned}$$

对 $\theta \in (0, 2)$, 设:

$$\xi_t = \frac{2 - \theta}{c^*} (1 - \exp^{c^*(t-T)}), t \in [0, T]. \quad (13)$$

可以验证 ξ_t 是 $[0, T]$ 上的常微分方程 $2 + \xi_t' - c^* \xi_t = \theta$ 的正光滑解, 且 $\xi_t(T) = 0, \xi_t' < 0$. 则有:

$$\begin{aligned}
\sup_{s \in [0, T]} ER_{s \wedge \xi} \exp [\frac{\theta^2}{8\delta_T^2} \int_0^{s \wedge \xi} \frac{|X_t - Y_t|^2}{\xi_t^2} dt] & \leq \\
\exp [\frac{\theta_T c^* |x - y|^2}{4\delta_T^2 (2 - \theta_T) (1 - \exp^{-c^* T})}]. & \quad (14)
\end{aligned}$$

进一步, 记 $r_T = \lambda_T^2 \theta_T^2 / (4\delta_T (\delta_T + \lambda_T \theta_T))$ 时, 成立不等式:

$$\begin{aligned}
\sup_{s \in [0, T]} ER_{s \wedge \xi}^{1+r_T} & \leq \\
\exp [\frac{\theta_T c^* (2\delta_T + \lambda_T \theta_T) |x - y|^2}{8\delta_T^2 (2 - \theta_T) (\delta_T + \lambda_T \theta_T) (1 - \exp^{-c^* T})}]. & \quad (15)
\end{aligned}$$

证明 过程与文献[5]中引理 2.2 的证明类似, 故在此省略. 另一方面, 由于给出与半群 P_t^i 有关的 Harnack 不等式, 引理 2 提供 $R_{s \wedge \xi}$ 的 $p / (p - 1)$ 矩的显式上界, 也就证明 $R_{s \wedge \xi}$ 存在有限 $p / (p - 1)$ 矩.

3 主要结果的证明

定理 1 的证明 取 $x, y \in R^d$ 且 $x \neq y$, 给定 $T > 0$, 并且设 $p > (1 + \delta_T / \lambda_T)^2$, 得到 $0 < \delta_T / ((\sqrt{p} - 1)\lambda_T) < 1$. 设:

$$\theta_T := \frac{2\delta_T}{(\sqrt{p} - 1)\lambda_T} \in (0, 2). \quad (16)$$

记(2)式的添加漂移项为 $F(t, X_t, Y_t) := -(X_t - Y_t | \xi_t) \sigma(t, Y_t) \sigma^{-1}(t, X_t)$, 因为条件(D)满足, 所以多元函数:

$$F(t, x, y) = \frac{x - y}{\xi_t} \sigma(t, y) \sigma^{-1}(t, x),$$

关于 y 是局部 Lipschitz 的, 因此 $F(t, X_t, Y_t)$ 是局部有界的, 满足文中所注的函数 $b_0(t, x)$ 的条件, 得到 $t < T \wedge \zeta$, (X_t, Y_t) 是 a.e. 连续的耦合过程.

构造新的布朗运动, 设:

$$\tilde{\omega}_t = \omega_t - \int_0^t \frac{\sigma^{-1}(s, X_s)(X_s - Y_s)}{\xi_s} ds, t < T \wedge \zeta.$$

如果 $T = \zeta$, 且能证明 R_s 是一致可积鞅, 则由鞅收敛定理可得, $R_T = \lim_{t \uparrow T} R_t$ 存在且 $\{R_t\}_{t \in [0, T]}$ 是鞅, 由 Girsanov 定理可知, $\{\tilde{\omega}_t\}_{t \in [0, T]}$ 是概率测度 $R_T P$ 下的布朗运动.

由方程(9)式, 根据 $\int_0^T \xi_t^{-1} dt = \infty$ 推出在 $[0, T]$ 上, 耦合 (X_t, Y_t) 在测度 Q 下是有定义的.

由于 X_t 是非爆破的, 由(11)式 η_n 的定义, 可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = \zeta$. 由引理 2 可知, Y_t 是直到时刻 T 的解. 这样就可以定义耦合时间 τ , 条件如假设(E).

取 $\theta = \theta_T$, 由于 $X_T = Y_T$ 和 $\{\tilde{\omega}_t\}_{t \in [0, T]}$ 是测度 Q 下的布朗运动. 使用 Hölder 不等式得到:

$$(P_T f(y))^p = (E_Q[f(Y_T)])^p = (E_{R_T \wedge \zeta} f(X_T))^p \leq (P_T f^p(x))(E_{R_T \wedge \zeta}^{p/(p-1)})^{p-1}. \quad (17)$$

由(16)式则有:

$$\frac{p}{p-1} = 1 + \frac{\lambda_T^2 \theta_T^2}{4\delta_T(\delta_T + \lambda_T \theta_T)} = 1 + r_T,$$

$$p-1 = \frac{4\delta_T(\delta_T + \lambda_T \theta_T)}{\lambda_T^2 \theta_T^2}.$$

由引理 2 可得:

$$(E_{R_T \wedge \zeta}^{p/(p-1)})^{p-1} = (E_{R_T \wedge \zeta}^{1+r_T})^{p-1} \leq \exp\left[\frac{(2\delta_T + \theta_T \lambda_T) c^* |x-y|^2}{2\lambda_T^2 \delta_T \theta_T (2-\theta_T)(1-\exp^{-c^* T})}\right] = \exp\left[\frac{\sqrt{p}(\sqrt{p}-1) c^* |x-y|^2}{4\delta_T((\sqrt{p}-1)\lambda_T - \delta_T)(1-\exp^{-c^* T})}\right]. \quad (18)$$

结合(17)式和(6)式以及关系式 $1 - \exp^{-n(B)T} \leq 1 - \exp^{-n(R^d)T} = 1 - \exp^{-\rho T}$. 证毕.

定理 2 的证明 对于 Young 不等式而言, 任意的 R^d 上的概率测度 ν , 如存在满足 $\nu(g_1) = 1$ 的非

负函数 g_1, g_2 , 则不等式 $\nu(g_1 g_2) \leq \nu(g_1 \log g_1) + \log \nu(\exp^{g_2})$ 成立^[11].

对 $f \geq 1$, 应用相应不等式, 取 $g_1 = R_{T \wedge \zeta}, g_2 = \log f(X_T)$, 则需要验证 $\nu(R_{T \wedge \zeta}) = 1$.

验证如下: 对 $U \subset R^d$ 而言, μ 是 R^d 上的概率测度, 则有:

$$P_t f(x) = \int_U p_t(x, y) f(y) \mu dy = \int_U f(y) p_t(x, dy).$$

取 $\nu = p_t(x, dy)$, 则有:

$$\nu(R_{T \wedge \zeta}) = \int_U R_{T \wedge \zeta}(y) p_t(x, dy) = P_t R_{T \wedge \zeta}(x) \leq 1.$$

又因 $R_{T \wedge \zeta}$ 是一致可积鞅, 故有 $\nu(R_{T \wedge \zeta}) = 1$. 因此结合引理 1 以及 $X_T = Y_T$ 和 Young 不等式的条件, 对 $f \geq 1$ 可得:

$$\begin{aligned} P_T \log f(y) &= E_Q[\log f(Y_T)] = \\ &E[R_{T \wedge \zeta} \log f(X_T)] \leq E[R_{T \wedge \zeta} \log R_{T \wedge \zeta}] + \\ &\log E[f(X_T)] \leq \log P_T f(x) + \\ &\frac{c^* |x-y|^2}{2\lambda_T^2 \theta(2-\theta)(1-\exp^{-c^* T})}. \end{aligned} \quad (19)$$

最后, 结合(6)式和对数函数(这里的对数函数取无理数 e 为底)的关系式 $\log P_T^1 f(x) \leq \log(1 - \exp^{-\rho T}) + \log P_T f(x)$. 得到

$$\begin{aligned} P_T^1 \log f(y) &\leq (1 - \exp^{-\rho T})(\log \frac{P_T^1 f(x)}{1 - \exp^{-\rho T}} + \\ &\frac{c^* |x-y|^2}{2\lambda_{T_0}^2 \theta(2-\theta)(1-\exp^{-c^* T})}). \end{aligned} \quad (20)$$

取 $\theta = 1$, 就得到结果. 证毕.

4 总结

在半群 $(P_t^1)_{t \geq 0}$ 的 2 种 Harnack 不等式建立后, 借助 $P_t^1 f(x)$ 与 $P_t f(x)$ 的关系, 可以得到它的很多性质, 例如半群 $(P_t^1)_{t \geq 0}$ 的强 Feller 性质、超有界性以及热核的上界估计等性质.

此外, 此半群的不变测度的存在唯一性等问题已成为研究所关注的问题, 也激发了这类方程的进一步研究.

参考文献:

- [1] Wang Fengyu. Logarithmic Sobolev inequalities on noncompact Riemannian manifolds[J]. Probability Theorey and Related Fleds, 1997, 109(3): 417-424.
- [2] Arnaudom M, Thalmaier A, Wang Fengyu. Harnack

- inequality and heat kernel estimates on manifolds with curvature unbounded below[J]. Bulletin des Sciences Mathématiques, 2006, 130(3):223-233.
- [3] Wang Fengyu, Yuan Ciguang. Harnack inequality and applications for stochastic differential equations with jumps[J]. 2008, Available at arXiv:0801.2668.
- [4] Wang Fengyu Yuan Ciguang. Harnack inequalities for functional SDEs with multiplicative noise and applications[J]. Appl Stochastic Process, 2011, 121(11):2692-2710.
- [5] Wang Fengyu. Harnack inequality for SDE with multiplicative noise and extension to Neumann semigroup on noncompact Riemannian manifolds[J]. The Annals of probability, 2011, 39(4):1449-1467.
- [6] Wang Fengyu. Coupling for Ornstein-Uhlenbeck process with jumps[J]. Brenoulli, 2011, 17(4):1136-1158.
- [7] Wang Fengyu, Wang Jian. coupling and strong feller for jump process on banach space[J]. Probability Theorey and Related Fleds, 2013, 123(5):1588- 1615.
- [8] Krystul J. Modeling of stochastic hybird systems with applications to accident risk assessment[M]. Netherland: Wöhrmann Printing Service, 2006:56-68.
- [9] 龚光鲁. 随机微分方程引论[M]. 2 版. 北京: 北京大学出版社, 1995:486.
- [10] Rong Situ. Theorey of stochastic differential with jumps and applications[M]. 北京: 世界图书出版公司北京公司, 2012:96.
- [11] Wang Fengyu. Harnack inequalities on manifolds with boundary and applications[J]. J Math Pures Appl, 2010, 94(3):304-321.

Harnack Inequality for the Solution of a Class of Stochastic Differential Equations with Jumps

WANG Yan-tao, ZHU Quan-xin*

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: In this paper, we study a class of stochastic differential equations with Poission jumps. Under some reasonable conditions, we deal with the issue of the Harnack inequalities and the Log-Harnack inequalities for the semigroup $P_t^1 f(x) := E[f(X_t^x)I_{\tau_1 \leq t}]$ of the solutions of such equations. We establish the relationship between the two kinds of semigroup. We also obtain two inequalities such as Harnack and Log-Harnack using the coupling argument, along with Girsanov theorem, Hölder inequality, Young inequality and Ito formula.

Key words: coupling; Harnack inequality; the change of measure; poisson point process

(责任编辑 章践立)