

双曲空间中的双曲线

寿乐丽, 徐晨东

(宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 为了揭示双曲空间与欧氏空间的异同, 在双曲空间中引进了双曲线的概念, 并推导了双曲线的方程, 进而研究了双曲线图像、渐近线和对称性等几何性质, 最终所得结果较好地从一个侧面展示了双曲空间与欧氏空间的相异性.

关键词: 双曲空间; 双曲线; 对称性; 渐近线

中图分类号: O186.1

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2015) 02-0052-04

双曲空间^[1]是具有负常(截面)曲率的空间形式, 它属于非欧几何的范畴. 文献[2-3]分析论证了双曲空间中椭圆的方程及其几何性质, 用以反映双曲空间与欧氏空间的异同. 然而仅以椭圆为例, 只是展示了这两个空间相异性的一个方面. 为了更全面形象地揭示双曲空间与欧氏空间的异同, 笔者将在双曲空间中引进恰当的双曲线概念, 并详细探讨其几何性质, 考察其与欧氏空间中双曲线性质的异同, 从而更好地展示双曲空间与欧氏空间的相异性.

由于双曲空间的二维全测地子流形^[3]恰为双曲平面, 为方便起见, 以下将以常曲率为-1的双曲平面 $H^2(-1)$ 为例进行讨论.

根据欧氏平面上双曲线的几何定义自然地推广到双曲空间, 便有如下定义.

定义 1 在双曲平面 $H^2(-1)$ 上, 到两定点 F_1 和 F_2 距离之差为常数 $2a < |F_1F_2|$ 的点的轨迹称为双曲线, 其中, $|F_1F_2|$ 是两点 F_1 和 F_2 的双曲距离. 两定点 F_1 和 F_2 称为双曲线的焦点, $2a$ 称为双曲线的实轴长, $2c = |F_1F_2|$ 称为焦距, 满足:

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{sech} b, \quad b > 0, \quad (1)$$

其中, b 称为双曲线的半虚轴长, 其几何意义参见文中的注.

由于双曲线的定义只依赖于度量, 在不同的坐标系下将具有不同形式的方程, 因此利用双曲

余弦定理, 考察双曲线在典型坐标(测地极坐标)系下的方程和形态, 可得下列定理.

定理 1 在双曲平面 $H^2(-1)$ 上分别以 a, c 为半实轴长和半焦距长的双曲线, 在测地极坐标系 (δ, θ) 下, 当焦点在 x 轴上时, 其方程为:

$$\operatorname{sh} \delta \sqrt{\frac{\operatorname{th}^2 c}{\operatorname{th}^2 a} \cos^2 \theta - 1} = \sqrt{1 - \frac{\operatorname{ch}^2 a}{\operatorname{ch}^2 c}}, \quad (2)$$

其中, $|\cos \theta| > \operatorname{th} a / \operatorname{th} c, c > a > 0$.

当焦点在 y 轴上时, 其方程为:

$$\operatorname{sh} \delta \sqrt{\frac{\operatorname{th}^2 c}{\operatorname{th}^2 a} \sin^2 \theta - 1} = \sqrt{1 - \frac{\operatorname{ch}^2 a}{\operatorname{ch}^2 c}}, \quad (3)$$

其中, $|\sin \theta| > \operatorname{th} a / \operatorname{th} c, c > a > 0$.

定理 2 在双曲平面上, 双曲线具有对称中心, 并具有垂直相交于中心的2条对称轴.

推论 在双曲平面 $H^2(-1)$ 上分别以 a, b, c 为半实轴长、半虚轴长和半焦距长的双曲线方程(2), 有如下互相等价的方程形式:

$$\operatorname{sh} \delta = \frac{\operatorname{th} a \sqrt{\operatorname{th}^2 c - \operatorname{th}^2 a}}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 a} \sqrt{\operatorname{th}^2 c \cos^2 \theta - \operatorname{th}^2 a}}, \quad (4)$$

$$\operatorname{sh} \delta = \operatorname{sh} a / \sqrt{\cos^2 \theta - \operatorname{sh}^2 a \operatorname{csc}^2 b \sin^2 \theta}, \quad (5)$$

$$\operatorname{th} \delta = \operatorname{sh} a / \sqrt{\cos^2 \theta - \operatorname{sh}^2 a \operatorname{csc}^2 b \sin^2 \theta + \operatorname{sh}^2 a}, \quad (6)$$

$$1 / \operatorname{th} \delta = \sqrt{1 + \cos^2 \theta / \operatorname{sh}^2 a - \sin^2 \theta / \sin^2 b}. \quad (7)$$

可类似确定双曲线(3)的等价方程, 诸如:

$$\operatorname{sh} \delta = \operatorname{sh} a / \sqrt{\sin^2 \theta - \operatorname{sh}^2 a \operatorname{csc}^2 b \cos^2 \theta}. \quad (8)$$

定义 2 在双曲平面上, 双曲线与其对称轴的交点称为双曲线的顶点.

定理 3 在双曲平面上, 双曲线上的点到其中心的距离当且仅当在顶点上达到最小值.

定义 3 在双曲平面上, 若当双曲线上的动点 P 趋于无穷远时, 点 P 与某条测地线的距离趋于零, 则称该测地线为双曲线的一条渐近线.

定理 4 在双曲平面上双曲线有无数条渐近线.

1 预备知识及引理

以下讨论将采用双曲平面 $H^2(-1)$ 的 Poincaré 圆盘模型^[3], 即在单位圆盘上赋予 Poincaré 度量的 Riemann 流形 (M, g) :

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\},$$

$$g = 4(dx^2 + dy^2) / (1 - (x^2 + y^2))^2,$$

记:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \end{cases} \quad (9)$$

则 (ρ, θ) 是欧氏平面直角坐标系 (x, y) 所对应的极坐标系, 可由测地线微分方程求得其通解为^[4]:

$$\theta = \text{const}, \quad (10)$$

$$\rho^2 + 1 = 2\rho\rho_0 \cos(\theta - \theta_0), \quad (11)$$

其中, $\rho_0 = \text{const} > 1, \theta_0 = \text{const}$.

在欧氏空间中来看, 测地线方程(10)是过原点的直线, 测地线方程(11)是与单位圆周正交的圆弧.

利用曲线弧长的计算公式及(9)式可知, 从原点 $O(0, 0)$ 到点 (x, y) 的内蕴距离(双曲距离):

$$\delta = \ln \frac{1+\rho}{1-\rho}, 0 \leq \rho < 1, \quad (12)$$

于是, (δ, θ) 即为 (M, g) 的测地极坐标系^[4], 它以原点 O 为极点、以 x 轴为极轴. 可进行直接计算:

$$\text{ch } \delta = \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2},$$

$$\text{sh } \delta = 2\rho / (1-\rho^2), \quad (13)$$

$$\text{th } \delta = 2\rho / (1+\rho^2),$$

反解(12)式, 得:

$$\rho = \text{th}(\delta/2), \quad (14)$$

该式明确了双曲距离与欧氏距离的对应关系.

再由双曲三角函数的半角公式:

$$\text{th}(x/2) = 1 / \text{th } x - 1 / \text{sh } x,$$

进一步可得:

$$\rho = \frac{1}{\text{th } \delta} - \frac{1}{\text{sh } \delta} = \frac{1}{\text{th } \delta} - \sqrt{\frac{1}{\text{th}^2 \delta} - 1}. \quad (15)$$

另外, 利用双曲距离以及双曲角度坐标表示式还可得到以下双曲余弦定理和双曲正弦定理.

引理^[5] 在 $H^2(-1)$ 中, 设 $\triangle ABC$ 的 3 个角 $\angle A, \angle B, \angle C$ 所对应边长分别为 α, β, γ , 则有双曲余弦定理:

$$\text{ch } \alpha = \text{ch } \beta \text{ch } \gamma - \text{sh } \beta \text{sh } \gamma \cos A. \quad (16)$$

双曲正弦定理:

$$\frac{\sin A}{\text{sh } \alpha} = \frac{\sin B}{\text{sh } \beta} = \frac{\sin C}{\text{sh } \gamma}. \quad (17)$$

2 定理的证明

定理 1 的证明 在 $H^2(-1)$ 的 Poincaré 圆盘模型中, 取 x 轴上对称于原点的 2 点 F_1 和 F_2 , 使它们到原点 $O(0, 0)$ 的距离均为 $c > 0$. 由(14)式知, 此时 F_1 和 F_2 在坐标系 $\{O; \partial / \partial x, \partial / \partial y\}$ 下的坐标分别为 $F_1(-\text{th}(c/2), 0), F_2(\text{th}(c/2), 0)$.

由此建立在 $H^2(-1)$ 上到 F_1 和 F_2 两点距离之差为常数 $2a < 2c$ 点的轨迹方程. 为此, 在 $H^2(-1)$ 的测地极坐标系中取异于 F_1 和 F_2 的点 $P(\delta, \theta)$. 记 P 到 F_i 的距离为 d_i , 由双曲余弦定理(16)式, 在 $\triangle OPF_1$ 和 $\triangle OPF_2$ 中分别有:

$$\text{ch } d_1 = \text{ch } \delta \text{ch } c - \text{sh } \delta \text{sh } c \cos(\pi - \theta), \quad (18)$$

$$\text{ch } d_2 = \text{ch } \delta \text{ch } c - \text{sh } \delta \text{sh } c \cos \theta. \quad (19)$$

另一方面, 由 $\text{ch}(d_1 - d_2) = \text{ch } d_1 \text{ch } d_2 - \text{sh } d_1 \text{sh } d_2$ 和 $\text{sh}^2 d_i = \text{ch}^2 d_i - 1$, 则有:

$$\begin{aligned} & \text{ch}^2(d_1 - d_2) - 2 \text{ch } d_1 \text{ch } d_2 \text{ch}(d_1 - d_2) + \\ & \text{ch}^2 d_1 + \text{ch}^2 d_2 - 1 = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

因对双曲线上的点 P , 成立 $|d_1 - d_2| = 2a$, 及(18)式和(19)式, 故(20)式可化为:

$$\frac{\text{ch}^2 c \text{ch}^2 \delta}{\text{ch}^2 a} - \frac{\text{sh}^2 c \text{sh}^2 \delta \cos^2 \theta}{\text{sh}^2 a} = 1.$$

再由双曲函数之间的关系式整理可得:

$$\left(\frac{\text{th}^2 c \cos^2 \theta}{\text{th}^2 a} - 1 \right) \text{sh}^2 \delta = 1 - \frac{\text{ch}^2 a}{\text{ch}^2 c}.$$

两端开方, 所求双曲线方程即为(2)式.

因 $0 < a < c$, 故此处有 $0 < \text{th } a < \text{th } c < 1$, 及

$$|\cos \theta| > \text{th } a / \text{th } c, \quad (21)$$

同理可建立焦点在 y 轴上的双曲线方程(3)式.

定理 2 的证明 由直角坐标系 (x, y) 和测地极

坐标系 (δ, θ) 的对称性, 从(2)式可见上述所建立的双曲线以 x 轴和 y 轴为对称轴, 以极点 $O(0, 0)$ 为对称中心.

推论的证明 由双曲函数关系式:

$$1/\operatorname{ch}^2 x = 1 - \operatorname{th}^2 x. \quad (22)$$

(2)式右端可化为:

$$\sqrt{1 - \frac{1 - \operatorname{th}^2 c}{1 - \operatorname{th}^2 a}} = \sqrt{\frac{\operatorname{th}^2 c - \operatorname{th}^2 a}{1 - \operatorname{th}^2 a}},$$

将其代入(2)式整理, 便得(4)式.

由(22)式和(1)式计算得到:

$$\frac{\operatorname{th}^2 c}{\operatorname{th}^2 a} = \frac{1 - 1/(\operatorname{ch}^2 a \sec^2 b)}{1 - 1/\operatorname{ch}^2 a} = 1 + \frac{\tan^2 b}{\operatorname{sh}^2 a \sec^2 b},$$

上式进一步可化为:

$$\operatorname{th}^2 c / \operatorname{th}^2 a = 1 + \sin^2 b / \operatorname{sh}^2 a. \quad (23)$$

将(23)式代入(2)式左端, 并将(1)式代入(2)式右端, 整理便得方程(5)式.

此外, 将(5)式化为:

$$\operatorname{sh}^2 \delta (\cos^2 \theta - \operatorname{sh}^2 a \csc^2 b \sin^2 \theta) = \operatorname{sh}^2 a,$$

两端同除以 $\operatorname{ch}^2 \delta$ 再利用(22)式, 整理即得(6)式. 由此直接导出方程(7)式.

对双曲线(3)式的相应方程只需在(4)~(7)式中 将 θ 换为 $\theta + \pi/2$ 即可, 诸如方程(8)式.

注 在(5)式中, 令 $\theta = \pm\pi/2$, 可得 $\operatorname{sh} \delta = \pm i \sin b = i \sin(\pm b)$. 由 $i \sin z = \operatorname{sh}(iz)$, 便有 $\delta = \pm bi$, 因此, $(bi, \pi/2)$ 和 $(-bi, -\pi/2)$ 可看成双曲线与 y 轴的 2 个虚交点, 故称 b 为双曲线的半虚轴长.

定理 3 的证明 由双曲线方程的等价性, 只需对双曲线(7)式加以证明.

在方程(7)式两端分别对 θ 求导并整理可得:

$$\frac{d\delta}{d\theta} = \frac{1}{2} \frac{(1/\operatorname{sh}^2 a + 1/\sin^2 b) \sin 2\theta \operatorname{sh}^2 \delta}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta / \operatorname{sh}^2 a - \sin^2 \theta / \sin^2 b}}.$$

注意到(13)式, 上式右端当且仅当 $\sin 2\theta = 0$ 时取零值. 另由(21)式可知, 此时 θ 只能取 0 和 π , 分别对应双曲线在 x 轴上的 2 个顶点. 进一步由正弦函数的性质可得, 双曲线上的点到其中心的距离当且仅当在顶点上达到最小值.

定理 4 的证明 由定义 3 可知, 双曲线的渐近线有两种情形: 过原点的直线(10)式, 以及与单位圆周正交的圆弧(11)式.

以下就这两种情形分别讨论.

情形 1 设双曲线(2)式的渐近线 L_1 的方程为 $\theta = \varphi_0$.

令双曲线上的动点 $P(\delta, \theta)$ 到渐近线 L_1 的距离 $d = |PQ|$, 则由定义 3 可知:

$$\lim_{\delta \rightarrow +\infty} d = 0. \quad (24)$$

在双曲直角三角形 $\triangle OQP$ 中, 利用双曲正弦定理(17)式可得:

$$\frac{\sin(\varphi_0 - \theta)}{\operatorname{sh} d} = \frac{\sin(\pi/2)}{\operatorname{sh} \delta},$$

进而,

$$\operatorname{sh} \delta \sin(\varphi_0 - \theta) = \operatorname{sh} d. \quad (25)$$

由(24)式和(25)式可得:

$$\lim_{\delta \rightarrow +\infty} \operatorname{sh} \delta \sin(\varphi_0 - \theta) = 0.$$

将(5)式代入上式化简可得:

$$\lim_{\delta \rightarrow +\infty} \frac{\sin \varphi_0 - \cos \varphi_0 \tan \theta}{\sqrt{1 - \operatorname{sh}^2 a \csc^2 b \tan^2 \theta}} = 0. \quad (26)$$

另由(2)式有:

$$\lim_{\delta \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\operatorname{th}^2 c}{\operatorname{th}^2 a} \cos^2 \theta - 1} = \lim_{\delta \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 - \operatorname{ch}^2 a / \operatorname{ch}^2 c}}{\operatorname{sh} \delta} = 0,$$

所以,

$$\lim_{\delta \rightarrow +\infty} \cos^2 \theta = \frac{\operatorname{th}^2 a}{\operatorname{th}^2 c}.$$

再利用(23)式, 有:

$$\lim_{\delta \rightarrow +\infty} |\tan \theta| = |\sin b / \operatorname{sh} a| \quad (27)$$

从而由(26)式可知,

$$\lim_{\delta \rightarrow +\infty} (\sin \varphi_0 - \cos \varphi_0 \tan \theta) = 0,$$

即,

$$\tan \varphi_0 = \lim_{\delta \rightarrow +\infty} \tan \theta = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{th}^2 c}{\operatorname{th}^2 a} - 1}. \quad (28)$$

最终得到渐近线 L_1 的方程为:

$$\theta = \varphi_0 = \arctan \sqrt{\frac{\operatorname{th}^2 c}{\operatorname{th}^2 a} - 1},$$

或

$$\pi - \arctan \sqrt{\frac{\operatorname{th}^2 c}{\operatorname{th}^2 a} - 1}.$$

情形 2 设双曲线(2)式的渐近线 L_2 的方程为(11)式. 由(28)式可知渐近线 L_1 ($\theta = \varphi_0$) 是与双曲线在无穷远处(即单位圆周上)相切的直线, 从而只要是在单位圆周上与直线 L_1 相切的圆弧测地线(11)

式也为双曲线的渐近线.

综上所述, 双曲线的渐近线有无数条.

3 双曲线在 Poincaré 圆盘模型下的图像

将推论中的(7)式对应代入(15)式进行整理, 可得双曲线(2)式在欧氏极坐标系 (ρ, θ) 下的方程为:

$$\rho = \sqrt{1 + \frac{\cos^2 \theta}{\operatorname{sh}^2 a} - \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 b}} - \sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{\operatorname{sh}^2 a} - \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 b}},$$

从而由(9)式知双曲线(2)式在直角坐标系 (x, y) 下的参数方程为:

$$\begin{cases} x = \cos \theta \left(\sqrt{1 + \frac{\cos^2 \theta}{\operatorname{sh}^2 a} - \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 b}} - \sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{\operatorname{sh}^2 a} - \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 b}} \right), \\ y = \sin \theta \left(\frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 b} - \sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{\operatorname{sh}^2 a} - \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 b}} \right). \end{cases}$$

图1为Poincaré圆盘模型下的一组焦点在 x 轴上的双曲线图像, 它们的半实轴长 $a=1$, 半虚轴长 $b=8, 4, 2, 1, 1/2, 1/4, 1/8$ (依次由内向外对应).

4 结论

通过以上的分析推导可知, 双曲空间中的双曲线和欧氏空间中的双曲线具有相类似的几何形

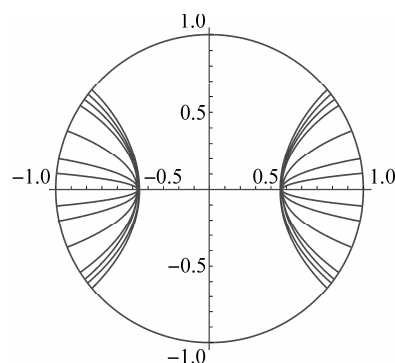


图1 焦点在 x 轴上具有相同半实轴长的双曲线族

态(譬如对称性), 而两者的区别主要体现在它们的渐近线的条数不同, 究其原因正是双曲几何与欧氏几何的平行公理的不同所引起的.

参考文献:

- [1] 伍鸿熙, 沈纯理, 虞言林. 黎曼几何初步[M]. 北京: 北京大学出版社, 1989:70-78.
- [2] 王幼宁, 吴英丽. 关于双曲空间中的椭圆[J]. 北京师范大学学报: 自然科学版, 2007, 43(1):6-9.
- [3] 王幼宁, 吴英丽. 关于双曲空间中椭圆的一些几何性质[J]. 北京师范大学学报: 自然科学版, 2007, 43(4): 371-177.
- [4] 陈维桓. 微分几何初步[M]. 北京: 北京大学出版社, 1997:182-187.
- [5] 周建伟. 高等几何[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003: 246-247.

On Hyperbola in Hyperbolic Spaces

SHOU Le-li, XU Chen-dong

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: In order to reveal the difference between the hyperbolic space and Euclidean space, the hyperbola concept is introduced for the hyperbolic space and its equations are derived. Furthermore, the geometric properties such as graphs, asymptotic lines and symmetry are investigated. The results obtained show the dissimilarity of the hyperbolic space and Euclidean space from an alternative perspective.

Key words: hyperbolic space; hyperbola; symmetry; asymptotes

(责任编辑 章践立)