

SPECT 均匀衰减投影数据的反演公式

常生明, 王金平*

(宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 依据近年来公开发表的有关单光子发射断层成像(SPECT)成像技术的文献, 探索 SPECT 均匀衰减投影数据的反投影问题. 主要采用指数型拉动变换的性质和构造特殊函数—— δ 函数的方法, 进而应用 δ 函数的特殊性得到了一个精确的反演公式. 结果表明, 由这种方法得到的反演公式能够更加有效和精确地实现图像的重建.

关键词: 单光子发射断层成像; 指数型拉动变换; 反演公式; δ 函数

中图分类号: Q819

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2015) 02-0056-04

单光子发射断层成像(Single-Photon Emission Computed Tomography, SPECT)是获取体内脏器功能信息较为常用的一种成像系统, 可重建人体内放射性示踪剂的分布图像和活动状况. 由 SPECT 获取的断层成像可以得到人体组织功能活性和新陈代谢的活动状况, 在现代核医学的临床诊断和治疗中都得到了广泛的应用. 因此, 由于这种技术在功能方面的优势, 在近几十年被广泛应用在核医学临床诊断和治疗的应用中^[1-2].

目前广泛采用的 SPECT 重建算法以迭代算法和解析算法为主. 迭代算法可以根据已知一个小区域的值迭代得到整个感兴趣区域的图像值, 并将此归结到内问题中去; 但迭代算法需要大量的计算, 因此需要很长的重建时间, 在临床应用上还有一定不足. 而解析算法可根据已知的解析重建公式快速得到所重建的图像, 在临床上更实用. 大量的研究表明 SPECT 的精确重建是真正成为可能的. 近些年, 大量的学者对 SPECT 的投影重建公式做了大量的研究, 得到了大量的 SPECT 图像解析精确重建的公式^[3-8].

一般而言, 由于人体组织对发射光子具有吸收作用, 因此在重建过程中要考虑衰减的因素, 文中所用到的 SPECT 数据假设是按均匀衰减的指数

型拉东变换得到的. SPECT 图像重建的目的是由置放在人体周围的准直器和接收器接收到的人体内部的发射光子发射出的数据来精确重建出人体组织功能活性和新陈代谢的活动状况, 即人体内部的分布图像. 由于人体对光子的吸收作用, 其衰减往往是不均匀的, 而当衰减是均匀时即是我们所需研究的指数型拉东变换. 笔者的主要目的是由均匀衰减的指数型拉东变换的投影数据得到 1 个精确重建的反演公式. 因此, 在前人研究的基础上, 通过构造 1 个特殊的 δ 函数, 并运用指数型拉东变换的性质得到了 1 个 SPECT 图像精确重建反演公式.

1 定义说明

设 $\mathbb{R}^2$ 为二维欧几里得空间, $\vec{x} = (x, y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的 1 个点. 由于所研究的是平面上的一组从不同方向上接受到的投影数据, 因此又会涉及到笛卡尔坐标系中的点和极坐标中的点 (r, φ) , 所以在平面上所有方向的直线可以理解为平面 $S^1 \times \mathbb{R}$ 上点 $(\theta, s) \in S^1 \times \mathbb{R}$ 的直线 $L(\theta, s) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2; \vec{x} \cdot \theta = s\}$. 这条直线的另一条参数定义为 $t \mapsto s\theta + t\theta^\perp$.

设 f 是 $\mathbb{R}^2$ 上光滑的紧支撑函数. 如果人体对光子的衰减吸收是均匀的, 即如果衰减系数 μ 是 1

个实常数, 则指数型拉动变换可定义为:

$$T_\mu(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s\theta + t\theta^\perp) e^{it\mu} dt, \quad (1)$$

这里对各个不同的方向 $T_\mu f$ 是已知的, 唯一未知的是 f , 因此, 笔者主要目的是由(1)式求出未知函数 f .

2 主要结果

引理 1 假设 $a, b \in \mathbb{R}^1$, 且 $a^2 < b^2$, 则有:

$$J_0(\sqrt{b^2 - a^2}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-a \cos \varphi + i \sin \varphi} d\varphi.$$

证明 由贝塞尔函数的定义可得:

$$J_\nu(t) = \frac{1}{2\pi} \int_C e^{t(z-1/z)} z^{-\nu-1} dz, \quad (2)$$

式中, C 表示以原点为圆心, r 为半径的圆. 令 $z = re^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, 对于 $r=1$, 则(1)式可表示为:

$$\begin{aligned} J_\nu(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{t/2(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) - i\nu\varphi} d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{it \sin \varphi - i\nu\varphi} d\varphi = \frac{i^{-\nu}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{it \cos \varphi - i\nu\varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

令 $t = \sqrt{b^2 - a^2}$, $r = (b-a)/\sqrt{b+a}$, 则对于 $\nu=0$, 可得:

$$J_0(\sqrt{b^2 - a^2}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-a \cos \varphi + i \sin \varphi} d\varphi.$$

证毕.

引理 2 设 $\nu > 0, z > 0$, 则有:

$$\int_0^z t^\nu J_{\nu-1}(t) dt = z^\nu J_\nu(z), \quad (3)$$

其中, $J_\nu(z)$ 表示贝塞尔函数.

证明 由贝塞尔函数 $J_\nu(t)$ 的级数展开, 有:

$$\begin{aligned} t^\nu J_{\nu-1}(t) &= t^\nu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(\nu+k)} \left(\frac{t}{2}\right)^{\nu-1+2k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(\nu+k)} t^\nu \frac{t^{\nu+2k-1}}{2^{\nu+2k-1}} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(\nu+k)} \frac{1}{2^{\nu+2k-1}} t^{2(\nu+k)-1}, \end{aligned}$$

然后, 可得:

$$\begin{aligned} \int_0^z t^\nu J_{\nu-1}(t) dt &= \\ \int_0^z \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(\nu+k)} \frac{1}{2^{\nu+2k-1}} t^{2(\nu+k)-1} dt &= \\ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(\nu+k)} \frac{1}{2^{\nu+2k-1}} \int_0^z t^{2(\nu+k)-1} dt &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(\nu+k)} \frac{1}{2^{\nu+2k-1}} \frac{1}{2(\nu+k)} z^{2(\nu+k)} &= \\ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(\nu+k)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k} \frac{z^\nu}{\nu+k}. \end{aligned}$$

由 Γ 函数的性质 $\Gamma(\nu+k+1) = (\nu+k)\Gamma(\nu+k)$ 可得:

$$\begin{aligned} \int_0^z t^\nu J_{\nu-1}(t) dt &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\nu+k}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k} \frac{z^\nu}{\nu+k} = \\ z^\nu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k} &= z^\nu J_\nu(z). \end{aligned}$$

证毕.

引理 3 设 $b > 0$, 则在欧几里得空间中有:

$$\delta^b(\vec{x}) = (2\pi)^{-1} b |\vec{x}|^{-1} J(b|\vec{x}|). \quad (4)$$

证明 由 $\delta^b(\vec{x})$ 的定义, 有:

$$\begin{aligned} \delta^b(\vec{x}) &= (2\pi)^{-2} \int_0^b e^{i\vec{x} \cdot \vec{\xi}} d\xi = \\ &= (2\pi)^{-2} \int_0^b \int_{S^1} e^{i\vec{x} \cdot \vec{\xi}} d\theta d\xi = \\ &= (2\pi)^{-1} |\vec{x}|^{-\frac{2-2}{2}} \int_0^b J_0(\xi|\vec{x}|) d\xi. \end{aligned}$$

由引理 1 和引理 2 可得:

$$\delta^b(\vec{x}) = (2\pi)^{-1} b |\vec{x}|^{-1} J(b|\vec{x}|).$$

证毕.

引理 4 设 $\delta^b(\vec{x})$ 满足引理 2 条件且 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, 则有:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \delta^b(\vec{x}) = \delta(\vec{x}). \quad (5)$$

证明 对于任意的 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, 有:

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} \delta^b(\vec{x}) f(\vec{x}) d\vec{x} &= \\ \int_{\mathbb{R}^2} \lim_{b \rightarrow \infty} \delta^b(\vec{x}) f(\vec{x}) d\vec{x} &= f(0), \end{aligned}$$

则根据 δ 函数的定义可得:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \delta^b(\vec{x}) = \delta(\vec{x}).$$

证毕.

引理 5 设 $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, 则有:

$$(T_{-\mu}^* g) * f = T_{-\mu}^* (g * T_\mu f), \quad (6)$$

其中, T_μ^* 表示 T_μ 的共轭算子, 定义为:

$$T_\mu^* g = \int_{S^1} e^{i\vec{\mu} \cdot \vec{\theta}^\perp} g(\theta, \vec{x} \cdot \vec{\theta}) d\theta.$$

证明 由指数型拉动变换的定义可得:

$$\begin{aligned} T_{-\mu}^* (g * T_\mu f)(\vec{x}) &= \int_{S^1} e^{-i\vec{\mu} \cdot \vec{\theta}^\perp} g * T_\mu f(\theta, \vec{x} \cdot \vec{\theta}) d\theta = \\ \int_{S^1} e^{-i\vec{\mu} \cdot \vec{\theta}^\perp} \int_{\mathbb{R}^1} g(\theta, \vec{x} \cdot \vec{\theta} - \xi) T_\mu f(\theta, \xi) d\xi d\theta &= \end{aligned}$$

$$\int_{S^1} e^{-\mu \vec{x} \cdot \theta^\perp} \int_{\mathbb{R}^1} g(\theta, \vec{x} \cdot \theta - \xi) \int_{\mathbb{R}^1} e^{\mu t} f \cdot$$

$$(\xi \theta + t \theta^\perp) dt d\xi d\theta = \int_{S^1} \int_{\mathbb{R}^1} \int_{\mathbb{R}^1} g(\theta, \vec{x} \cdot \theta -$$

$$\xi) f(\xi \theta + t \theta^\perp) e^{-\mu \vec{x} \cdot \theta^\perp} e^{\mu t} dt d\xi d\theta.$$

令新变量 $\vec{y} = \xi \theta + t \theta^\perp$, 则 $t = \vec{y} \cdot \theta^\perp, \xi = \vec{y} \cdot \theta$, $d\vec{y} = dt d\xi$, 从而,

$$T_{-\mu}^*(g * T_\mu f)(\vec{x}) = \int_{S^1} \int_{\mathbb{R}^2} f(\vec{y}) g(\theta, (\vec{x} - \vec{y}) \cdot \theta) e^{-\mu(\vec{x} - \vec{y}) \cdot \theta^\perp} d\vec{y} d\theta = \int_{\mathbb{R}^2} f(\vec{y}) d\vec{y} \int_{S^1} g(\theta, (\vec{x} - \vec{y}) \cdot \theta) e^{-\mu(\vec{x} - \vec{y}) \cdot \theta^\perp} d\theta = \int_{\mathbb{R}^2} f(\vec{y}) d\vec{y} (T_{-\mu}^* g) \cdot$$

$$(\vec{x} - \vec{y}) d\vec{y} = (T_{-\mu}^* g) * f(\vec{x}),$$

即得到:

$$(T_{-\mu}^* g) * f = T_{-\mu}^*(g * T_\mu f).$$

证毕.

引理 6 设 $b > |\mu|$, 则有:

$$\frac{1}{2}(2\pi)^{-\frac{3}{2}} T_{-\mu}^* \bar{G}_b = \delta^{\sqrt{b^2 - \mu^2}}, \quad (7)$$

其中, $\bar{G}_b$ 定义为:

$$\hat{\bar{G}}_b(\theta, \sigma) = \begin{cases} \sigma, & |\mu| < |\sigma| < b, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

证明 由共轭算子的定义可知:

$$T_{-\mu}^* \bar{G}_b(\vec{x}) = \int_{S^1} e^{-\mu \vec{x} \cdot \theta^\perp} \bar{G}_b(\theta, \vec{x} \cdot \theta) d\theta =$$

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{S^1} e^{-\mu \vec{x} \cdot \theta^\perp} \int_{\mathbb{R}^1} e^{i\sigma \vec{x} \cdot \theta} \hat{\bar{G}}_b(\theta, \vec{x} \cdot \theta) d\theta d\sigma =$$

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{|\mu| < |\sigma| < b} |\sigma| \int_{S^1} e^{-\mu \vec{x} \cdot \theta^\perp + i\sigma \vec{x} \cdot \theta} d\theta d\sigma.$$

在上式积分中, 运用引理 1 且假设 $\vec{x} = r(\cos \varphi, \sin \varphi)$, 则,

$$\int_{S^1} e^{-\mu \vec{x} \cdot \theta^\perp + i\sigma \vec{x} \cdot \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\mu r \sin \varphi + i\sigma r \cos \varphi} d\varphi =$$

$$2\pi J_0(r(\sigma^2 - \mu^2)^{1/2}),$$

从而,

$$T_{-\mu}^* \bar{G}_b(\vec{x}) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \int_{|\mu| < |\sigma| < b} |\sigma| J_0(r(\sigma^2 - \mu^2)^{1/2}) d\sigma =$$

$$(2\pi)^{\frac{1}{2}} \int_{|\mu| < |\sigma| < b} |\sigma| J_0(|\vec{x}|(\sigma^2 - \mu^2)^{1/2}) d\sigma =$$

$$2(2\pi)^{\frac{1}{2}} \int_\mu^b \sigma J_0(|\vec{x}|(\sigma^2 - \mu^2)^{1/2}) d\sigma =$$

$$2(2\pi)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\sqrt{b^2 - \mu^2}} t J_0(|\vec{x}|t) dt.$$

令 $t = \sqrt{\sigma^2 - \mu^2}$, 然后应用引理 2 有:

$$T_{-\mu}^* \bar{G}_b(\vec{x}) = 2(2\pi)^{\frac{1}{2}} (b^2 - \mu^2)^{\frac{1}{2}} |\vec{x}|^{-1}.$$

$$J_1(|\vec{x}|(b^2 - \mu^2)^{\frac{1}{2}}),$$

再应用引理 3 可得:

$$\frac{1}{2}(2\pi)^{-\frac{3}{2}} T_{-\mu}^* \bar{G}_b = \delta^{\sqrt{b^2 - \mu^2}}.$$

证毕.

定理 1 设 $T_{-\mu}^* G_b = \kappa_b$ 且 G_b 满足上述引理的条件和结论, 则下面等式恒成立:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(\vec{y}) \kappa_b(\vec{x} - \vec{y}) d\vec{y} = \int_{S^1} e^{-\mu \vec{x} \cdot \theta^\perp} \int_{-\infty}^{\infty} G(\theta, \vec{x} \cdot \theta -$$

$$p) T_\mu f(\theta, p) dp d\theta. \quad (8)$$

证明 由卷积的定义可得:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(\vec{y}) \kappa_b(\vec{x} - \vec{y}) d\vec{y} = \kappa_b(\vec{x}) * f(\vec{x}) =$$

$$T_{-\mu}^* G_b(\vec{x}) * f(\vec{x}),$$

然后应用引理 5 得到:

$$T_{-\mu}^* G_b(\vec{x}) * f(\vec{x}) = T_{-\mu}^*(G_b(\vec{x}) * T_\mu f(\vec{x})) =$$

$$\int_{S^1} e^{-\mu \vec{x} \cdot \theta^\perp} (G_b(\theta, \vec{x} \cdot \theta) * T_\mu f(\theta, \vec{x} \cdot \theta)) d\theta =$$

$$\int_{S^1} e^{-\mu \vec{x} \cdot \theta^\perp} \int_{-\infty}^{\infty} G(\theta, \vec{x} \cdot \theta - p) T_\mu f(p, \theta) dp d\theta,$$

即,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(\vec{y}) \kappa_b(\vec{x} - \vec{y}) d\vec{y} =$$

$$\int_{S^1} G(\theta, \vec{x} \cdot \theta - p) T_\mu f(p, \theta) dp d\theta.$$

证毕.

$$\text{定理 2 设 } T_{-\mu}^* G_b = \frac{1}{2}(2\pi)^{-\frac{3}{2}} T_{-\mu}^* \bar{G}_b \text{ 且 } \kappa_b = \delta^{\sqrt{b^2 - \mu^2}}$$

都满足引理 1~6 和定理 1 的条件和结论, 则,

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{2}(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{S^1} e^{-\mu \vec{x} \cdot \theta^\perp} \int_{-\infty}^{\infty} T_{-\mu}^* \bar{G}_b(\theta, \vec{x} \cdot \theta -$$

$$p) T_\mu f(\theta, p) dp d\theta. \quad (9)$$

证明 首先, 由定理 1 可得:

$$f(\vec{x}) * \delta^{\sqrt{b^2 - \mu^2}}(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\vec{y}) \kappa_b(\vec{x} - \vec{y}) d\vec{y} =$$

$$\int_{S^1} e^{-\mu \vec{x} \cdot \theta^\perp} \int_{-\infty}^{\infty} G(\theta, \vec{x} \cdot \theta - p) T_\mu f(\theta, p) dp d\theta =$$

$$\frac{1}{2}(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{S^1} e^{-\mu \vec{x} \cdot \theta^\perp} \int_{-\infty}^{\infty} T_{-\mu}^* \bar{G}_b(\theta, \vec{x} \cdot \theta -$$

$$p) T_\mu f(\theta, p) dp d\theta.$$

然后由引理 4, 等式两边对 $b \rightarrow \infty$ 取极限可得:

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{2}(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{S^1} e^{-\mu \vec{x} \cdot \theta^\perp} \int_{-\infty}^{\infty} T_{-\mu}^* \bar{G}_b(\theta, \vec{x} \cdot \theta -$$

$$p) T_\mu f(\theta, p) dp d\theta.$$

证毕.

3 结论

在实际的医学图像重建过程中, 可根据不同算法的优缺点选取合理的重建方法, 但解析算法具有速度快和重建比较精确的特点, 所以能够选择合适的重建公式可大大提升重建速度, 因此应用得到的精确 SPECT 均匀衰减投影数据的反演公式(9)就能采用同样多的投影数据快速精确地重建出较好的图像。

参考文献:

- [1] Natterer F. The mathematic of computerized tomography [M]. New York: John Wiley & Sons, 1986:86-95.
- [2] Zeng G L, Gullberg G. T. Exact intertive reconstruction for the interior problem[J]. Phys Med Biol, 2009, 54: 5805-5814.
- [3] Huang Q, You J S, Zeng G L, et al. Reconstruction from uniformly attenuated SPECT projection data using the DBH method[J]. IEEE Trans Med Imaging, 2009, 28(1): 17-29.
- [4] Kunyansky L. A new SPECT reconstruction algorithm based on the Novikovs explicit inversion formula[J]. Inverse problems, 2001, 17:293-306.
- [5] Wang J P. Inversion and property characterization on generalized transform of Radon type[J]. Acta Mathematica Scientia, 2011, 31(3):636-643.
- [6] Shi T T, Wang J P. A Fourier reconstruction algorithm in π -scheme short-scan SPECT[J]. Wuhan University Journal of Natural Sciences, 2013, 18(2):97-101.
- [7] Natterer F. Inversion of the attenuated Radon transform[J]. Inverse problems, 2001, 17:113-119.
- [8] Inouye T, Kose K, Hasegawa A. Image reconstruction algorithm for single-photon-emission computed tomography with uniform attenuation[J]. Phys Med Biol, 1989, 34:299-304.
- [9] 刘式适, 刘式达. 特殊函数[M]. 北京: 气象出版社, 1988:66-81.

Inversion Formula from Uniformly Attenuated SPECT Projection Data

CHANG Sheng-ming, WANG Jin-ping^{*}

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: Based on the recently published literature on SPECT imaging technology, the projection problem of the SPECT homogeneous attenuation projection data is explored in a bid to obtain a more accurate inversion formula. Based on the nature of the exponential transform and the method of constructing special function $-\delta$ function, an accurate inversion formula is attained by further applying the particularity of the function. The results show that the obtained inversion formula can implement image reconstruction in a more effective and accurate way.

Key words: SPECT; exponential radon transform; inversion formula; δ -function

(责任编辑 章践立)