

关于一类指数 Diophantine 方程的解

何宗友

(宁波新芝生物科技股份有限公司, 浙江 宁波 315013)

摘要: 设 d 是 1 个给定的正整数且不是平方数, 利用 Pell 方程的解法和高次 Diophantine 方程的结果研究了 4 个指数 Diophantine 方程: (i) $x^2 - dp^{2n} = 1$, (ii) $p^{2n} - dx^2 = 1$, (iii) $x^2 - dp^{2n} = -1$, (iv) $p^{2n} - dx^2 = -1$ 的解 (x, p, n) , 其中 p 是素数, x, n 是正整数, 完整地解决了方程(i)和当 $n \geq 2$ 时方程(ii)、当 $d \neq t^2 + 1$ 时方程(iii)、当 $d > 2$ 时方程(iv)的求解问题.

关键词: 指数 Diophantine 方程; Pell 方程; 高次 Diophantine 方程; 解

中图分类号: O156.7

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2015) 02-0060-03

设 d 是 1 个给定的正整数且不是平方数, 对于以下 4 个指数 Diophantine 方程:

$$x^2 - dp^{2n} = 1, \quad (\text{i})$$

$$p^{2n} - dx^2 = 1, \quad (\text{ii})$$

$$x^2 - dp^{2n} = -1, \quad (\text{iii})$$

$$p^{2n} - dx^2 = -1, \quad (\text{iv})$$

的解 (x, p, n) , 其中 p 是素数, x, n 是正整数. 1997 年, 徐学文研究了当 $d = t^2 - 1$, $t > 1$ 是正整数时方程(i)的解 (x, p, n) [1]; 2008 年乐茂华研究了当 $n = 1$ 时方程(i)的解 (x, p, n) [2]; 2012 年, 作者研究了当 $x = 2^{n_0} q_1^{n_1} q_2^{n_2} \cdots q_r^{n_r}$, q_i 是奇素数, n_i 是正整数, $i = 0, 1, 2, \dots, r$ 时, 方程(ii)的解 (x, p, n) [3]; 2014 年, 王泉涵研究了当 p 是 1 个给定的素数时方程(ii)的解 (x, n) [4]; 作者则利用 Pell 方程的解法和高次 Diophantine 方程的结果, 研究了此 4 个方程的一般情形, 完整地解决了方程(i)和当 $n \geq 2$ 时方程(ii)、当 $d \neq t^2 + 1$ 时方程(iii)、当 $d > 2$ 时方程(iv)的求解问题.

1 几个引理

引理 1 [5] 设 $u_1 + v_1 \sqrt{d}$ 是 Pell 方程 $u^2 - dv^2 = 1$ 的基本解, 则 Pell 方程 $u^2 - dv^2 = 1$ 的全部正整数解 (u, v) 由 $u + v\sqrt{d} = u_k + v_k \sqrt{d} = (u_1 + v_1 \sqrt{d})^k$ 给出, 其中, k 是正整数.

引理 2 [5] 设 $u_1 + v_1 \sqrt{d}$ 是 Pell 方程 $u^2 - dv^2 = -1$

的基本解, 则 Pell 方程 $u^2 - dv^2 = -1$ 的全部正整数解 (u, v) 由 $u + v\sqrt{d} = u_k + v_k \sqrt{d} = (u_1 + v_1 \sqrt{d})^k$ 给出, 其中, k 是正奇数.

引理 3 [6] 设 $n > 2$ 是正整数, 则 Diophantine 方程 $2x^2 - 1 = y^n$ 仅有正整数解 $(x, y, n) = (1, 1, n), (78, 23, 3)$.

引理 4 [7] 设 d 是个给定的正整数且不是平方数, 则 Diophantine 方程 $x^4 - dy^2 = 1$ 除开 $d = 3 \times 5 \times 17d_0^2$, $d_0 \mid 4$, $d_0 e = 4$, d_0, e 是正整数时, 仅有 2 组正整数解 $(x, y) = (13, e), (239, 338e)$ 外, 最多只有 1 组正整数解 (x, y) 且满足 $x^2 = u_1$ 或 $x^2 = 2u_1^2 - 1$, 其中, $u_1 + v_1 \sqrt{d}$ 是 Pell 方程 $u^2 - dv^2 = 1$ 的基本解.

2 定理

定理 1 指数 Diophantine 方程(i)除开 $d = 2^{2t-2} - 1$, $t > 1$ 是正整数时, 仅有 1 组解 $(x, p, n) = (u_2, 2, t)$ 外, 最多只有 1 组解 (x, p, n) 且满足 $p^n = v_1$, 其中, $u_1 + v_1 \sqrt{d}$ 是 Pell 方程 $u^2 - dv^2 = 1$ 的基本解.

定理 2 当 $n > 2$ 时, 指数 Diophantine 方程(ii)除开 $d = 7 \times 11 \times 79d_0^2$, $d_0 \mid 156$, $d_0 e = 156$, d_0, e 是正整数时, 仅有 1 组解 $(x, p, n) = (e, 23, 3)$ 外, 最多只有 1 组解 (x, p, n) 且满足 $p^n = u_1$; 当 $n = 2$ 时, 指数 Diophantine 方程(ii)除开 $d = 3 \times 5 \times 7 \times 17d_0^2$, $d_0 \mid 4$, $d_0 e = 4$, d_0, e 是正整数时, 仅有 2 组解 $(x, p, n) = (e, 13, 2), (338e, 239, 2)$ 外, 最多只有 1 组解 (x, p, n)

且满足 $p^2 = u_1$ 或 $p^2 = 2u_1^2 - 1$, 其中, $u_1 + v_1\sqrt{d}$ 是 Pell 方程 $u^2 - dv^2 = 1$ 的基本解.

定理 3 当 $d \neq t^2 + 1$, t 是正整数时, 指数 Diophantine 方程(iii)最多只有 1 组解 (x, p, n) 且满足 $p^2 = v_1$, 其中, $u_1 + v_1\sqrt{d}$ 是 Pell 方程 $u^2 - dv^2 = -1$ 的基本解.

定理 4 当 $d > 2$ 时, 指数 Diophantine 方程(iv)最多只有 1 组解 (x, p, n) 且满足 $p^2 = u_1$, 其中, $u_1 + v_1\sqrt{d}$ 是 Pell 方程 $u^2 - dv^2 = -1$ 的基本解.

3 定理的证明

定理 1 的证明. 由文献[2]可得, 如果 $v_1 = 1$, 则仅有 $p = 2$, $d = 2^{2t-2} - 1$, $p^n = 2^t$, 其中 $t > 1$ 是正整数. 下设 $v_1 > 1$, 如果指数 Diophantine 方程(i)有解 (x, p, n) , 则由引理 1 可得, 存在正整数 k , 使得:

$$x + p^n\sqrt{d} = u_k + v_k\sqrt{d} = (u_1 + v_1\sqrt{d})^k. \quad (1)$$

如果 k 存在奇素数因子 q , 设 $k = ql$, l 是正整数, 则由(1)式可得: $x + p^n\sqrt{d} = u_k + v_k\sqrt{d} = u_{ql} + v_{ql}\sqrt{d} = (u_l + v_l\sqrt{d})^q$, 所以,

$$\frac{v_{ql}}{v_l} = \binom{q}{1} u_l^{q-1} + \binom{q}{3} u_l^{q-3} v_l^2 d + \cdots + \binom{q}{q-2} u_l^2 v_l^{q-3} d^{\frac{q-3}{2}} + v_l^{q-1} d^{\frac{q-1}{2}}. \quad (2)$$

由于 $v_k = v_{ql} = p^n$, $v_l | v_{ql}$, $v_l > 1$, 所以 $p | v_l$, 且

$$\frac{v_{ql}}{v_l} = p^{n_l}, n_l > n_1 \geq 1. \quad (3)$$

由 $p | v_l$ 和(2)式得 $p | qu_l^{q-1}$, 由 $\gcd(u_l, v_l) = 1$ 和 $p | v_l$ 得 $\gcd(u_l, p) = 1$, 所以 $p | q$, 即 $p = q$. 在(3)式中, 如果 $n_1 > 1$, 则由 $q | v_l$, $q \geq 3$ 和(2)式可得 $q^2 | qu_l^{q-1}$, 故由 $\gcd(u_l, q) = 1$ 可知 $q^2 | q$, 这是不可能的. 所以, 一方面在(3)式中 $n_1 = 1$, 故

$$\frac{v_{ql}}{v_l} = q. \quad (4)$$

另一方面, 由于 $q \geq 3$, $u_l > 1$, $v_l > 1$, 所以由(2)式可得:

$$\frac{v_{ql}}{v_l} > q + \frac{q(q-1)(q-2)}{6} > q. \quad (5)$$

由(4)式和(5)式可得 $q = v_{ql} / v_l > q$, 这是不可能的. 这就证明了当 $v_1 > 1$ 时, k 不含奇素数因子, 故 $k = 2^s$, $s \geq 0$ 是整数, 即 $p^n = v_{2^s}$, $s \geq 0$. 当 $s = 0$ 时, 得 $p^n = v_1$; 当 $s > 0$ 时, 得 $p^n = v_{2^s} = 2u_{2^{s-1}}v_{2^{s-1}}$,

故 $p | 2$, $p | u_{2^{s-1}}v_{2^{s-1}}$, 即 $p = 2$, $u_{2^{s-1}} = 2^{n_1}$, $v_{2^{s-1}} = 2^{n_2}$, $n_1 + n_2 = n - 1$, 由 $u_{2^{s-1}} > v_{2^{s-1}} \geq v_1 > 1$ 知, $n_1 > n_2 \geq 1$, 故 $\gcd(u_{2^{s-1}}, v_{2^{s-1}}) \geq 2$, 另一方面由 $u_{2^{s-1}}^2 - dv_{2^{s-1}}^2 = 1$ 得 $\gcd(u_{2^{s-1}}, v_{2^{s-1}}) = 1$, 从而使得 $1 = \gcd(u_{2^{s-1}}, v_{2^{s-1}}) \geq 2$ 的结论不可能成立. 这就证明了当 $v_1 > 1$ 时, 仅有 $p^n = v_1$. 所以, 由 Pell 方程最小正整数解的唯一性: 指数 Diophantine 方程(i)除开 $d = 2^{2t-2} - 1$, $t > 1$ 是正整数时, 仅有 1 组解 $(x, p, n) = (u_2, 2, t)$ 外, 最多只有 1 组解 (x, p, n) 且满足 $p^n = v_1$. 定理 1 证毕.

用相同方法由引理 1 可证明: 指数 Diophantine 方程(ii)的解 (x, p, n) 满足 $p^n + x\sqrt{d} = (u_1 + v_1\sqrt{d})^{2^s}$, $s \geq 0$ 是整数, 即 $p^n = u_{2^s}$, $s \geq 0$. 当 $s = 0$ 时, 得 $p^n = u_1$. 当 $s > 0$ 时, 得 $p^n = u_{2^s} = 2u_{2^{s-1}}^2 - 1$. 当 $n > 2$ 时, 由引理 3 得方程 $p^n = 2u_{2^{s-1}}^2 - 1$ 仅有 1 组解 $(u_{2^{s-1}}, p, n) = (78, 23, 3)$, 将 $p = 23$, $n = 3$ 代入方程(ii)得, $dx^2 = p^{2n} - 1 = 23^{2 \times 3} - 1 = 7 \times 11 \times 79 \times 156^2$, 故 $d = 7 \times 11 \times 79 d_0^2$, $x = e$, $d_0 e = 156$, 此时方程(ii)仅有 1 组解 $(x, p, n) = (e, 23, 3)$, 除此之外, 方程(ii)最多只有 1 组解 (x, p, n) 且满足 $p^n = u_1$; 当 $n = 2$ 时, 由引理 4 得, 指数 Diophantine 方程(ii)除开 $d = 3 \times 5 \times 7 \times 17 d_0^2$, $d_0 | 4$, $d_0 e = 4$, d_0, e 是正整数时, 仅有 2 组解 $(x, p, n) = (e, 13, 2), (338e, 239, 2)$ 外, 最多只有 1 组解 (x, p, n) , 且满足 $p^2 = u_1$, 或者 $p^2 = 2u_1^2 - 1$. 定理 2 证完.

用相同方法由引理 2 可证明定理 3 和定理 4.

4 有待解决的问题

由定理的证明可知: 当 $n=1$ 时, 方程(ii)的解 (x, p, n) 满足 $p^1 + x\sqrt{d} = (u_1 + v_1\sqrt{d})^{2^s}$, $s \geq 0$ 是整数; 当 $d = t^2 + 1$, t 是正整数时, 方程(iii)的解 (x, p, n) 满足 $x + p^n\sqrt{t^2 + 1} = (t + \sqrt{t^2 + 1})^q$, q 是奇素数; 特别地, 由 Ljunggren 证明了方程 $x^2 - 2y^4 = -1$ 仅有正整数解 $(x, y) = (1, 1), (239, 13)$ [5], Störmer 证明了方程 $x^2 - 2y^n = -1$, $2 \nmid n$, $n \geq 3$ 仅有正整数解 $(x, y) = (1, 1)$ [5] 得: 当 $d = 2$ 时, 方程(iii)除开 $(x, p, n) = (239, 13, 2)$ 外, 必有 $n = 1$; 当 $d = 2$ 时, 方程(iv)的解 (x, p, n) 满足 $p^n + x\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^q$, q 是奇素数, 由引理 3 得当 $d = 2$, $2n > 2$ 时, 方程(iv)没有解 (x, p, n) , 故当 $d = 2$ 时, 必有 $n = 1$. 所以, 可以提出以下有待解决的问题:

问题1 设 d 是 1 个给定的正整数且不是平方数, Diophantine 方程 $p^2 - dx^2 = 1$ 是否仅有有限组解 (x, p) ?

问题2 设 $t > 1$ 是 1 个给定的正整数, 指数 Diophantine 方程 $x^2 - (t^2 + 1)p^{2n} = -1$ 是否仅有有限组解 (x, p, n) ?

问题3 Diophantine 方程 $p^2 - 2x^2 = -1$ 是否仅有有限组解 (x, p) ?

根据 1986 年屈明华研究方程 $p^2 - 2q^2 = -1$ 的难度可知^[8], 以上 3 个问题都是非常困难的问题.

致谢 阿坝师范高等专科学校何波老师的热忱帮助!

参考文献:

[1] 徐学文. 关于不定方程 $y(y+1)(y+2)(y+3) = p^{2k}x(x+1)(x+2)(x+3)$ [J]. 华中师范大学学报: 自然科学版,

1997, 31(3):257-259.

[2] 乐茂华. 一类递推数列中的素数[J]. 曲靖师范学院学报, 2008, 27(6):13-14.

[3] 何宗友. 关于单 K_4 -群中的一个丢番图方程及其推广[J]. 宁波大学学报: 理工版, 2012, 25(2):76-78.

[4] 王泉涵. 关于 Diophantine 方程 $p^{2m} - Dx^2 = 1$ [J]. 纺织高校基础科学学报, 2014, 27(1):45-47.

[5] 曹珍富. 不定方程及其应用[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2000:1-141.

[6] Bennett M A, Skinner C M. Ternary diophantine equations via Galois representations and modular forms [J]. Canad J Math, 2004, 56(1):23-54.

[7] 孙琦, 袁平之. 关于不定方程 $x^4 - Dy^2 = 1$ 的一个注记 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 1997, 34(3):265-268.

[8] 屈明华. 关于丢番图方程 $p^2 - 2q^2 = -1$ [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 1986, 23(2):4-12.

On the Solutions of a Class of Exponential Diophantine Equation

HE Zong-you

(Ningbo Scientz Biotechnology Co. Ltd., Ningbo 315013, China)

Abstract: Let d be a given positive integer and not a square number, using the solutions of Pell equation and the results of high power Diophantine equation, the following four exponential Diophantine equations are studied: (i) $x^2 - dp^{2n} = 1$, (ii) $p^{2n} - dx^2 = 1$, (iii) $x^2 - dp^{2n} = -1$, (iv) $p^{2n} - dx^2 = -1$, where p are some prime numbers, both x and n are some positive integers. The complete solutions are obtained for the equation (i) and equation (ii) when $n \geq 2$, equation (iii) when $d \neq t^2 + 1$, equation (iv) when $d > 2$.

Key words: exponential Diophantine equation; Pell equation; high power Diophantine equation; solution

(责任编辑 章践立)