

两类新型两指标 B 值鞅空间的相互嵌入关系

叶 臣, 舒启昂

(宁波大学 科学技术学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 证明了两类新型两指标 B 值鞅空间的 Fefferman 不等式, 讨论了两类新型两指标 B 值鞅空间相互嵌入关系与 Banach 空间几何性质间的联系: Banach 空间的几何性质决定着鞅空间的相互嵌入关系; 鞅空间的嵌入关系也可刻画 Banach 空间的几何性质.

关键词: 两指标 B 值鞅空间; Sharp 算子; Fefferman 不等式; p 一致光滑; q 一致凸

中图分类号: O211.6

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2015) 03-0042-06

鞅空间理论作为概率论与分析学两者结合而形成的交叉领域, 自 20 世纪 70 年代以来发展异常迅速. 鞅空间及其相互关系是 H_p 鞅论中饶有兴趣的问题之一. 对于实值鞅, Burkholder 等^[1]在 1970 年证明了著名的 Burkholder-Gundy 不等式, 说明鞅 Hardy 空间 H_p^s 和 H_p 相互等价; Garsia^[2]和 Herz^[3]在 1973 年引入了鞅的 BMO 空间并以此刻画了鞅 Hardy 空间 H_1^s 的共轭; 1977 年 Bernard 等^[4]在鞅论中引入了原子分解, 为鞅 Hardy 空间的研究提供了有力工具; 1994 年 Weisz^[5-6]对单指标实值鞅空间和两指标实值鞅空间的相互关系进行了深入全面的研究.

自 20 世纪 80 年代初以来, 人们将注意力逐渐集中于 Banach 空间值鞅的研究上. 1990 年刘培德^[7]对单指标 Banach 空间值鞅引入 p 均方算子和条件 p 均方算子, 研究了单指标 B 值鞅不等式和鞅空间的相互嵌入关系, 与单指标实值鞅结果不同的是单指标 B 值鞅不等式及鞅空间的相互嵌入关系都与 Banach 空间的凸性和光滑性有密切联系. 2001 年 Cheng 等^[8]研究了基本的两指标 B 值鞅空间的相互嵌入关系, 并刻画了取值的 Banach 空间的几何性质. 最近, Yu^[9-10]在研究单指标 B 值鞅空间的对偶空间时, 引入了两类与 Sharp 算子有关的新类型鞅空间. 笔者将这两类新型空间推广到两指标 B 值鞅情形, 首先证明了两类新型两指标 B 值鞅空间的

Fefferman 不等式, 其次研究了这两类新型两指标 B 值鞅空间的相互嵌入关系, 结果显示空间的相互嵌入关系与 Banach 空间的 p 一致光滑性和 q 一致凸性可相互刻画.

1 符号及定义

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为完备的概率空间, $(B, \|\cdot\|)$ 为维数不小于 2 的 Banach 空间, $\{\mathcal{F}_n, n \in N^2\}$ 为 $\mathcal{F}$ 的关于 N^2 中的偏序不降的子 σ 代数列且满足 F_4 条件. 对 $\forall n = (n_1, n_2) \in N^2$, 记 $\mathcal{F} = \sigma(\bigcup_{n \in N^2} \mathcal{F}_n)$ 及 $\mathcal{F}_n^- = \mathcal{F}_{n_1-1, n_2-1}$. 用 E, E_n 和 E_n^- 分别表示期望算子及关于 $\mathcal{F}_n$ 和 $\mathcal{F}_n^-$ 的条件期望算子.

若取值于 Banach 空间 B 且可积的随机变量序列 $f = (f_n, n \in N^2)$ 关于 $\{\mathcal{F}_n, n \in N^2\}$ 是适应的, 即对所有 $n \in N^2$, f_n 关于 $\mathcal{F}_n$ 可测, 且当 $n \leq m$ 时有 $E_n f_m = f_n$, 则称 $f = (f_n, n \in N^2)$ 为两指标 B 值鞅.

对于两指标 B 值鞅定义鞅差为:

$$d_n f = \begin{cases} 0, & n_1 n_2 = 0, \\ f_{n_1, n_2} - f_{n_1-1, n_2} - f_{n_1, n_2-1} + f_{n_1-1, n_2-1}, & n_1 n_2 \neq 0. \end{cases}$$

本文约定

$$\mathcal{F}_{-1} = \mathcal{F}_{-1, i} = \mathcal{F}_{i, -1} = \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\},$$

$$f_{-1} = f_{-1, i} = f_{i, -1} = f_0 = 0.$$

对定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上, 取值于 Banach 空间 B 上的两指标鞅 $f = (f_n, n \in N^2)$, 本文用 $f^*, S^{(p)}(f)$ 及 $\sigma^{(p)}(f)$ 表示极大算子, p 均方算子及条件 p 均方

算子:

$$f_n^* = \sup_{i \leq n} \|f_i\|, \quad f^* = \sup_{n \in \mathbb{N}^2} \|f_n\|,$$

$$S_n^{(p)}(f) = \left(\sum_{0 \leq i \leq n} \|d_i f\|^p \right)^{1/p},$$

$$S^{(p)}(f) = \sup_{n \in \mathbb{N}^2} S_n^{(p)}(f), \quad 0 < p < \infty,$$

$$\sigma_n^{(p)}(f) = \left(\sum_{0 \leq i \leq n} E_i^- \|d_i f\|^p \right)^{1/p},$$

$$\sigma^{(p)}(f) = \sup_{n \in \mathbb{N}^2} \sigma_n^{(p)}(f), \quad 0 < p < \infty.$$

此外, 两类 Sharp 算子分别表示为:

$$T_n^{(p)}(f) = \sup_{m \geq n} (E_n(\| \sum_{i=n}^m d_i f \|^p))^{1/p},$$

$$T^{(p)}(f) = \sup_{n \in \mathbb{N}^2} T_n^{(p)}(f), \quad 0 < p < \infty;$$

$$T_{n+}^{(p)}(f) = \sup_{m \geq n} (E_n(\| \sum_{i=n+1}^m d_i f \|^p))^{1/p},$$

$$T_+^{(p)}(f) = \sup_{n \in \mathbb{N}^2} T_{n+}^{(p)}(f), \quad 0 < p < \infty;$$

$$S_n^{(p)\#}(f) = (E_n(S^{(p)}(f)^p - S_{n-1}^{(p)}(f)^p))^{1/p},$$

$$S^{(p)\#}(f) = \sup_{n \in \mathbb{N}^2} S_n^{(p)\#}(f), \quad 0 < p < \infty;$$

$$\sigma_n^{(p)\#}(f) = (E_n(\sigma^{(p)}(f)^p - \sigma_n^{(p)}(f)^p))^{1/p},$$

$$\sigma^{(p)\#}(f) = \sup_{n \in \mathbb{N}^2} \sigma_n^{(p)\#}(f), \quad 0 < p < \infty.$$

我们用 $H_\alpha^*(B)$, ${}_p H_\alpha^S(B)$, ${}_p H_\alpha^\sigma(B)$, ${}_p K_\alpha(B)$, ${}_p K_\alpha^+(B)$, ${}_p K_\alpha^S(B)$ 及 ${}_p K_\alpha^\sigma(B)$ 表示下列两指标 B 值鞅空间:

$$H_\alpha^*(B) = \{f : \|f\|_{H_\alpha^*(B)} = \|f^*\|_\alpha < \infty\},$$

$$0 < \alpha \leq \infty;$$

$${}_p H_\alpha^S(B) = \{f : \|f\|_{{}_p H_\alpha^S(B)} = \|S^{(p)}(f)\|_\alpha < \infty\},$$

$$1 < p < \infty, 0 < \alpha \leq \infty;$$

$${}_p H_\alpha^\sigma(B) = \{f : \|f\|_{{}_p H_\alpha^\sigma(B)} = \|\sigma^{(p)}(f)\|_\alpha < \infty\},$$

$$1 < p < \infty, 0 < \alpha \leq \infty;$$

$${}_p K_\alpha(B) = \{f : \exists \gamma \in L_\alpha(R), \gamma \geq 0,$$

$$E_n(\| \sum_{i=n}^m d_i f \|^p) \leq E_n(\gamma^p), \forall 1 \leq n \leq m < \infty\},$$

$$\|f\|_{{}_p K_\alpha(B)} = \inf_\gamma \|\gamma\|_\alpha,$$

$$0 < p < \infty, p \leq \alpha \leq \infty;$$

$${}_p K_\alpha^+(B) = \{f : \exists \gamma \in L_\alpha(R), \gamma \geq 0,$$

$$E_n(\| \sum_{i=n+1}^m d_i f \|^p) \leq E_n(\gamma^p), \forall 1 \leq n \leq m < \infty\},$$

$$\|f\|_{{}_p K_\alpha^+(B)} = \inf_\gamma \|\gamma\|_\alpha,$$

$$0 < p < \infty, p \leq \alpha \leq \infty;$$

$${}_p K_\alpha^S(B) = \{f : \exists \gamma \in L_\alpha(R), \gamma \geq 0,$$

$$E_n(S^{(p)}(f)^p - S_{n-1}^{(p)}(f)^p) \leq E_n(\gamma^p), \forall n \geq 1\},$$

$$\|f\|_{{}_p K_\alpha^S(B)} = \inf_\gamma \|\gamma\|_\alpha,$$

$$0 < p < \infty, p \leq \alpha \leq \infty;$$

$${}_p K_\alpha^\sigma(B) = \{f : \exists \gamma \in L_\alpha(R), \gamma \geq 0,$$

$$E_n(\sigma^{(p)}(f)^p - \sigma_{n-1}^{(p)}(f)^p) \leq E_n(\gamma^p), \forall n \geq 1\},$$

$$\|f\|_{{}_p K_\alpha^\sigma(B)} = \inf_\gamma \|\gamma\|_\alpha,$$

$$0 < p < \infty, p \leq \alpha \leq \infty.$$

两个赋范或拟赋范空间 X 和 Y 被称为是等价的(简记为 $X \approx Y$)当且仅当 X 和 Y 是同构的并且它们的范数等价: 存在常数 $C_1, C_2 > 0$, 使得对所有 $f \in X$ 有 $C_1 \|f\|_X \leq \|f\|_Y \leq C_2 \|f\|_X$. 赋范空间 X 的对偶空间表示为 X^* , 如果 $X^* \approx Y$, 则称 Y 是 X 的对偶空间.

关于 Banach 空间 B 的凸性模和光滑模分别定义如下:

$$\delta_B(\varepsilon) = \inf\{1 - 1/2 \|x + y\|,$$

$$\|x\| = \|y\| = 1, \|x - y\| = \varepsilon\},$$

$$\rho_B(\tau) = \sup\{1/2(\|x + y\| + \|x - y\|) - 1,$$

$$\|x\| = 1, \|y\| = \tau\},$$

其中, $0 < \varepsilon \leq 2$, $\tau > 0$.

若存在常数 $C > 0$, 使得 $\delta_B(\varepsilon) \geq C\varepsilon^q$, $2 \leq q < \infty$, 则称 B 是 q 一致凸的; 若 $\rho_B(\tau) \leq C\tau^p$, $1 < p \leq 2$, 则称 B 是 p 一致光滑的.

2 主要结果和证明

引理 1 对于 Banach 空间 B , 设 $1 < p \leq 2$, 则以下条件等价:

(i) B 同构于 p 一致光滑空间.

(ii) 存在常数 $C = C_p > 0$, 使得对任一两指标 B 值鞅 $f = (f_n, n \in \mathbb{N}^2)$, 当 $0 \leq n \leq m$ 时, 有^[8]:

$$E_n(\| \sum_{k=n}^m d_k f \|^p) \leq C E_n(\sum_{k=n}^m \|d_k f\|^p). \quad (1)$$

(iii) 对任一两指标 B 值鞅 $f = (f_n, n \in \mathbb{N}^2)$, 若

$\sum_{n \in \mathbb{N}^2} \|d_n f\|^p < \infty$, 则 f_n 依概率收敛^[11].

引理 2 对于 Banach 空间 B , 设 $2 \leq q < \infty$, 则

以下条件等价:

(i) B 同构于 q -一致凸空间.

(ii) 存在常数 $C = C_q > 0$, 使得对任一两指标 B 值鞅 $f = (f_n, n \in N^2)$, 当 $0 \leq n \leq m$ 时, 有^[8]:

$$E_n \left(\sum_{k=n}^m \|d_k f\|^q \right) \leq C E_n \left(\left\| \sum_{k=n}^m d_k f \right\|^q \right). \quad (2)$$

(iii) 对任一两指标 B 值鞅 $f = (f_n, n \in N^2)$, 若 $\|f\|_\infty < \infty$, 则 $S^{(q)}(f) < \infty$, a.e.^[11].

定理 1 (Fefferman 不等式) 设 B 为 Banach 空间, $1 < p < \infty$, $1 \leq \alpha \leq p$, 则存在常数 $C = C_{p\alpha} > 0$ 使得:

(i) 对任一两指标 B 值鞅

$$f = (f_n, n \in N^2) \in {}_p H_\alpha^S(B),$$

$$\varphi = (\varphi_n, n \in N^2) \in {}_q K_\alpha^S(B^*),$$

有:

$$|E f_n \varphi_n| \leq C \|f\|_{{}_p H_\alpha^S(B)} \|\varphi\|_{{}_q K_\alpha^S(B^*)}, \quad n \geq 1.$$

(ii) 对任一两指标 B 值鞅

$$f = (f_n, n \in N^2) \in {}_p H_\alpha^\sigma(B),$$

$$\varphi = (\varphi_n, n \in N^2) \in {}_q K_\alpha^\sigma(B^*),$$

有:

$$|E f_n \varphi_n| \leq C \|f\|_{{}_p H_\alpha^\sigma(B)} \|\varphi\|_{{}_q K_\alpha^\sigma(B^*)}, \quad n \geq 1,$$

其中: $1/p + 1/q = 1$, $1/\alpha + 1/\alpha' = 1$.

证明 (i) 设 $f = (f_n, n \in N^2) \in {}_p H_\alpha^S(B)$, 则 $d_i f \in L_\alpha(B)$, 从而 $f_n = \sum_{i=1}^n d_i f \in L_\alpha(B)$. 当 $\varphi = (\varphi_n, n \in N^2) \in {}_q K_\alpha^S(B^*)$ 时, 由 ${}_q K_\alpha^S(B^*)$ 的定义知 $\exists \gamma \in L_{\alpha'}(R)$, $\gamma \geq 0$ 使得:

$$\|d\varphi_n\| = (E_n(S_n^{(q)}(\varphi)^q - S_{n-1}^{(q)}(\varphi)^q))^{1/q} \leq (E_n(\gamma^q))^{1/q},$$

进而

$$\|d\varphi_n\|_{\alpha'} \leq \| (E_n(\gamma^q))^{1/q} \|_{\alpha'} \leq \|\gamma\|_{\alpha'} < \infty,$$

因此 $\varphi_n \in L_{\alpha'}(B^*)$, 这说明积分 $E f_n \varphi_n$ 有意义. 对 $\forall n \geq 1$ 有:

$$E f_n \varphi_n = \sum_{i=1}^n E d_i f d_i \varphi, \quad (3)$$

从而

$$|E f_n \varphi_n| \leq \sum_{i=1}^n |E d_i f S_i^{(p)}(f)^{\alpha/p-1} d_i \varphi S_i^{(p)}(f)^{1-\alpha/p}| \leq$$

$$\left(\sum_{i=1}^n E \|d_i f\|^p S_i^{(p)}(f)^{\alpha-p} \right)^{1/p}.$$

$$\left(\sum_{i=1}^n E \|d_i \varphi\|^q S_i^{(p)}(f)^{q(1-\alpha/p)} \right)^{1/q} \triangleq (U)(V).$$

为估计 (U) , 利用不等式 $\rho^\beta - 1 \geq \beta(\rho - 1)\rho^{\beta-1}$, $\beta \leq 1 \leq \rho$, 取 $\beta = \alpha/p$, $\rho = S_i^{(p)}(f)^p S_{i-1}^{(p)}(f)^{-p}$ 则得到:

$$S_i^{(p)}(f)^\alpha - S_{i-1}^{(p)}(f)^\alpha \geq (\alpha/p)(S_i^{(p)}(f)^p - S_{i-1}^{(p)}(f)^p) S_{i-1}^{(p)}(f)^{\alpha-p},$$

这意味着

$$\begin{aligned} (U)^p &= \sum_{i=1}^n E \|d_i f\|^p S_i^{(p)}(f)^{\alpha-p} = \\ &E \sum_{i=1}^n (S_i^{(p)}(f)^p - S_{i-1}^{(p)}(f)^p) S_{i-1}^{(p)}(f)^{\alpha-p} \leq \\ &(p/\alpha) E S_n^{(p)}(f)^\alpha. \end{aligned} \quad (4)$$

对于 (V) , 可归纳定义为:

$$S_i^{(p)}(f)^{q(1-\alpha/p)} = \left(\sum_{j=1}^i \|d_j f\|^p \right)^{(q/p)(\alpha/p-1)} = \sum_{j=1}^i Q_j, \quad 0 \leq i \leq n,$$

使得 Q_j 关于 $\mathcal{F}_j$ 可测, 于是

$$\begin{aligned} (V)^q &= \sum_{i=1}^n E \|d_i \varphi\|^q S_i^{(p)}(f)^{q(1-\alpha/p)} = \\ &\sum_{i=1}^n E \|d_i \varphi\|^q \sum_{j=1}^i Q_j = E \left(\sum_{j=1}^n Q_j \sum_{i=j}^n E_j \|d_i \varphi\|^q \right) = \\ &E \left(\sum_{j=1}^n Q_j E_j ((S_n^{(q)}(\varphi)^q - S_{j-1}^{(q)}(\varphi)^q)) \leq \right. \\ &E \left(\sum_{j=1}^n Q_j E_j (S^{(q)}(\varphi)^q - S_{j-1}^{(q)}(\varphi)^q) \leq \right. \\ &E \left(\left(\sum_{j=1}^n Q_j \right) \gamma^q \right) = E S_n^{(p)}(f)^{q(1-\alpha/p)} \gamma^q. \end{aligned}$$

注意到 $q(1/\alpha - 1/p) + q/\alpha' = 1$, 由 Hölder 不等式可得:

$$\begin{aligned} (V) &\leq (E(S_n^{(p)}(f)^\alpha)^{q(1/\alpha-1/p)} (\gamma^q)^{q/\alpha'})^{1/q} \leq \\ &(E S_n^{(p)}(f)^\alpha)^{(1/\alpha-1/p)} (E \gamma^q)^{1/\alpha'}. \end{aligned} \quad (5)$$

由(3)~(5)式得:

$$\begin{aligned} |E f_n \varphi_n| &\leq (p/\alpha)^{1/p} (E S_n^{(p)}(f)^\alpha)^{1/\alpha} (E \gamma^q)^{1/\alpha'} = \\ &C \|S_n^{(p)}(f)\|_\alpha \|\gamma\|_{\alpha'}. \end{aligned} \quad (6)$$

根据 $\|f\|_{{}_p H_\alpha^S(B)}$ 以及 $\|\varphi\|_{{}_q K_\alpha^S(B^*)}$ 的定义, (6)式意味着

$$|Ef_n \varphi_n| \leq C \|f\|_{p, H_\alpha^S(B)} \|\varphi\|_{q, K_\alpha^S(B^*)},$$

从而(i)得证. (ii)的证明与(i)类似, 在此略去.

定理 1 证毕.

定理 2 设 B 为 Banach 空间, $1 < p \leq 2$, $p \leq \alpha \leq \infty$, 则以下条件等价:

(i) B 同构于 p 一致光滑空间.

(ii) ${}_p K_\alpha^S(B) \subset {}_p K_\alpha(B)$, 且存在常数 $C = C_{p\alpha} > 0$, 使得对任一两指标 B 值鞅

$$f = (f_n, n \in N^2) \in {}_p K_\alpha^S(B)$$

有:

$$\|f\|_{p, K_\alpha(B)} \leq C \|f\|_{p, K_\alpha^S(B)}. \quad (7)$$

(iii) ${}_p K_\alpha^\sigma(B) \subset {}_p K_\alpha^+(B)$, 且存在常数 $C = C_{p\alpha} > 0$, 使得对任一两指标 B 值鞅

$$f = (f_n, n \in N^2) \in {}_p K_\alpha^\sigma(B)$$

有:

$$\|f\|_{p, K_\alpha^+(B)} \leq C \|f\|_{p, K_\alpha^\sigma(B)}. \quad (8)$$

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii) 设 B 同构于 p 一致光滑空间, 两指标 B 值鞅 $f = (f_n, n \in N^2) \in {}_p K_\alpha^S(B)$, 则 $\exists \gamma \in L_\alpha(R)$, $\gamma > 0$, 使得:

$$E_n(\|\sum_{k=n}^{\infty} d_k f\|^p) = E_n(S^{(p)}(f)^p - S_{n-1}^{(p)}(f)^p) \leq E_n(\gamma^p), \quad \forall n \geq 1.$$

根据 B 空间的 p 一致光滑性, 由引理 1 的(1)式知, 存在常数 $C = C_{p\alpha} > 0$, 使得:

$$E_n(\|\sum_{k=n}^m d_k f\|^p) \leq C E_n(\sum_{k=n}^m \|d_k f\|^p) \leq C E_n(\gamma^p), \quad \forall 1 \leq n \leq m < \infty.$$

从而 $\|f\|_{p, K_\alpha(B)} \leq C^{1/p} \|f\|_{p, K_\alpha^S(B)}$, 即空间 ${}_p K_\alpha^S(B)$ 连续嵌入空间 ${}_p K_\alpha(B)$, (ii)得证.

(i) $\Rightarrow$ (iii) 证明类似于(i) $\Rightarrow$ (ii), 在此略去.

(ii) $\Rightarrow$ (i) 假定(7)式成立, 设两指标 B 值鞅 $f = (f_n, n \in N^2)$ 满足 $\sum_{n \in N^2} \|d_n f\|^p < \infty$, 则

$$f \in {}_p K_\infty^S(B) \subset {}_p K_\alpha^S(B) \subset {}_p K_\alpha(B),$$

由 ${}_p K_\alpha(B)$ 的定义知, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, $\exists \gamma \in L_\alpha(R)$, $\gamma > 0$, 使得:

$$E_n(\|\sum_{k=n}^m d_k f\|^p) \leq E_n(\gamma^p), \quad \forall 1 \leq n \leq m < \infty,$$

且

$$\|\gamma\|_\alpha \leq \|f\|_{p, K_\alpha(B)} + \varepsilon.$$

两边取期望, 并由(7)式得:

$$E(\|\sum_{k=n}^m d_k f\|^p) \leq E(\gamma^p) \leq (C \|f\|_{p, K_\alpha^S(B)} + \varepsilon)^p. \quad (9)$$

注意到

$$S^{(p)}(f)^p = \sum_{n \in N^2} \|d_n f\|^p < \infty,$$

及

$$E_n(S^{(p)}(f)^p - S_{n-1}^{(p)}(f)^p) \leq E_n(S^{(p)}(f)^p), \quad \forall n \geq 1,$$

由 ${}_p K_\alpha^S(B)$ 的定义有:

$$\|f\|_{p, K_\alpha^S(B)} \leq \|S^{(p)}(f)\|_\alpha = \left\| \left(\sum_{n \in N^2} \|d_n f\|^p \right)^{1/p} \right\|_\alpha,$$

因此

$$E_n(S^{(p)}(f)^p - S_{n-1}^{(p)}(f)^p) \leq E_n(\sum_{k=n}^{\infty} \|d_k f\|^p), \quad (10)$$

由(9)式及(10)式得:

$$E(\|\sum_{i=n}^m d_i f\|^p) \leq (C \left\| \left(\sum_{k=n}^{\infty} \|d_k f\|^p \right)^{1/p} \right\|_\alpha + \varepsilon)^p. \quad (11)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, (11)式右边极限为 0. 由 Fatou 引理可得 f_n 在 $L_p(B)$ 中收敛, 进而 f_n 依概率收敛, 因此由引理 1 可知 B 同构于 p 一致光滑空间.

(iii) $\Rightarrow$ (i) 证明类似于(ii) $\Rightarrow$ (i), 在此略去.

定理 2 证毕.

定理 3 设 B 为 Banach 空间, $2 \leq q < \infty$, $q \leq \alpha \leq \infty$, 则以下条件等价:

(i) B 同构于 q 一致凸空间.

(ii) ${}_q K_\alpha(B) \subset {}_q K_\alpha^S(B)$, 且存在常数 $C = C_{q\alpha} > 0$, 使得对任一两指标 B 值鞅 $f = (f_n, n \in N^2) \in {}_q K_\alpha(B)$ 有:

$$\|f\|_{q, K_\alpha^S(B)} \leq C \|f\|_{q, K_\alpha(B)}. \quad (12)$$

(iii) ${}_q K_\alpha^+(B) \subset {}_q K_\alpha^\sigma(B)$, 且存在常数 $C = C_{q\alpha} > 0$, 使得对任一两指标 B 值鞅 $f = (f_n, n \in N^2) \in {}_q K_\alpha^+(B)$ 有:

$$\|f\|_{q, K_\alpha^\sigma(B)} \leq C \|f\|_{q, K_\alpha^+(B)}. \quad (13)$$

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii) 设 B 同构于 q 一致凸空间, 两指标 B 值鞅 $f = (f_n, n \in N^2) \in {}_q K_\alpha(B)$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, $\exists \gamma \in L_\alpha(R)$, $\gamma > 0$, 使得:

$$E_n(\|\sum_{k=n}^m d_k f\|^q) \leq E_n(\gamma^q), \quad \forall 1 \leq n \leq m < \infty,$$

并且

$$\|\gamma\|_\alpha \leq \|f\|_{q, K_\alpha(B)} + \varepsilon.$$

由 B 空间的 q 一致凸性及引理 2 的(2)式可知存在常数 $C = C_{p\alpha} > 0$, 使得:

$$E_n(\sum_{k=n}^m \|d_k f\|^q) \leq C E_n(\sum_{k=n}^m d_k f\|^q) \leq C E_n(\gamma^q),$$

$$\forall 1 \leq n \leq m < \infty.$$

由 m 的任意性可得:

$$E_n(S^{(q)}(f)^q - S_{n-1}^{(q)}(f)^q) \leq C E_n(\gamma^q), \quad \forall n \geq 1,$$

故

$$\|f\|_{K_\alpha^S(B)} \leq C^{1/q} \|f\|_{K_\alpha(B)},$$

即空间 ${}_q K_\alpha(B)$ 连续嵌入空间 ${}_q K_\alpha^S(B)$, (ii)得证.

(i) $\Rightarrow$ (iii) 证明类似于(i) $\Rightarrow$ (ii), 在此略去.

(ii) $\Rightarrow$ (i) 假设(12)式成立, 设两指标 B 值鞅 $f = (f_n, n \in N^2)$ 满足 $\|f\|_\infty < \infty$. 则 $f \in {}_q K_\alpha(B)$, 且

$$E_n(\sum_{k=n}^m d_k f\|^q) \leq 2^q E_n(f^*)^q, \quad \forall 1 \leq n \leq m < \infty.$$

由 ${}_q K_\alpha^S(B)$ 的定义知, 对任意 $\varepsilon > 0$, $\exists \gamma \in L_\alpha(R)$, $\gamma > 0$, 使得:

$$E_n(S^{(q)}(f)^q - S_{n-1}^{(q)}(f)^q) \leq C E_n(\gamma^q),$$

且

$$\|\gamma\|_\alpha \leq \|f\|_{K_\alpha^S(B)} + \varepsilon.$$

当 $n = 0$ 时, 取期望得:

$$E(S^{(q)}(f)^q) \leq E_n(\gamma^q) \leq (C \|f\|_{K_\alpha^S(B)} + \varepsilon)^q < \infty,$$

于是 $S^{(q)}(f) < \infty$, a.e.. 由引理 2 知 B 同构于 q 一致凸空间.

(iii) $\Rightarrow$ (i) 证明类似于(ii) $\Rightarrow$ (i), 在此略去.

定理 3 证毕.

根据 Kwapien 定理^[12], B 同构于 Hilbert 空间时, B 既是 2 一致凸空间, 又是 2 一致光滑空间, 因此由定理 2 和定理 3 可得下面推论.

推论 1 设 B 为 Banach 空间, $2 \leq \alpha \leq \infty$, 则以下条件等价:

(i) B 同构于 Hilbert 空间.

(ii) ${}_2 K_\alpha(B) \approx {}_2 K_\alpha^S(B)$, 且存在常数 $C_\alpha > 0$ 和 $C'_\alpha > 0$ 使得对任一两指标 B 值鞅 $f = (f_n, n \in N^2)$ 有:

$$C_\alpha \|f\|_{K_\alpha(B)} \leq \|f\|_{K_\alpha^S(B)} \leq C'_\alpha \|f\|_{K_\alpha(B)}.$$

(iii) ${}_2 K_\alpha^+(B) \approx {}_2 K_\alpha^\sigma(B)$, 且存在常数 $C_\alpha > 0$ 和 $C'_\alpha > 0$, 使得对任一两指标 B 值鞅 $f = (f_n, n \in N^2)$ 有:

$$C_\alpha \|f\|_{K_\alpha^+(B)} \leq \|f\|_{K_\alpha^\sigma(B)} \leq C'_\alpha \|f\|_{K_\alpha^+(B)}.$$

对照几类 BMO 鞅空间的定义^[10] ($0 < p < \infty$, $0 < \alpha < \infty$):

$$BMO_\alpha(B) = \{f : \|f\|_{BMO_\alpha(B)} =$$

$$\sup_n \|(E_n \|f - f_{n-1}\|^\alpha)^{1/\alpha}\|_\infty < \infty\};$$

$$BMO_\alpha^+(B) = \{f : \|f\|_{BMO_\alpha^+(B)} =$$

$$\sup_n \|(E_n \|f - f_n\|^\alpha)^{1/\alpha}\|_\infty < \infty\};$$

$${}_p BMO_\alpha^S(B) = \{f : \|f\|_{{}_p BMO_\alpha^S(B)} =$$

$$\sup_n \|(E_n(S^{(p)}(f)^p - S_{n-1}^{(p)}(f)^p)^{\alpha/p})^{1/\alpha}\|_\infty < \infty\};$$

$${}_p BMO_\alpha^\sigma(B) = \{f : \|f\|_{{}_p BMO_\alpha^\sigma(B)} =$$

$$\sup_n \|(E_n(\sigma^{(p)}(f)^p - \sigma_n^{(p)}(f)^p)^{\alpha/p})^{1/\alpha}\|_\infty < \infty\}.$$

可以看到:

$${}_p K_\infty(B) = BMO_p(B), \quad {}_p K_\infty^+(B) = BMO_p^+(B),$$

$${}_p K_\infty^S(B) = {}_p BMO_p^S(B), \quad {}_p K_\infty^\sigma(B) = {}_p BMO_p^\sigma(B),$$

即两类新型空间是这几类 BMO 鞅空间的推广.

当定理 2、定理 3 中 $\alpha = \infty$ 时, 可得下面推论.

推论 2 设 B 为 Banach 空间, $1 < p \leq 2$, 则以下条件等价:

(i) B 同构于 p 一致光滑空间.

(ii) ${}_p BMO_p^S(B) \subset BMO_p(B)$, 且存在常数 $C = C_p > 0$, 使得对任一两指标 B 值鞅 $f = (f_n, n \in N^2) \in {}_p BMO_p^S(B)$ 有:

$$\|f\|_{BMO_p(B)} \leq C \|f\|_{{}_p BMO_p^S(B)}.$$

(iii) ${}_p BMO_p^\sigma(B) \subset BMO_p^+(B)$, 且存在常数 $C = C_p > 0$, 使得对任一两指标 B 值鞅 $f = (f_n, n \in N^2) \in {}_p BMO_p^\sigma(B)$ 有:

$$\|f\|_{BMO_p^+(B)} \leq C \|f\|_{{}_p BMO_p^\sigma(B)}.$$

推论 3 设 B 为 Banach 空间, $2 \leq q < \infty$, 则以下条件等价:

(i) B 同构于 q 一致凸空间.

(ii) $BMO_q(B) \subset {}_q BMO_q^S(B)$, 且存在常数 $C = C_q > 0$, 使得对任一两指标 B 值鞅

$$f = (f_n, n \in N^2) \in BMO_q(B)$$

有:

$$\|f\|_{{}_q BMO_q^S(B)} \leq C \|f\|_{BMO_q(B)}.$$

(iii) $BMO_q^+(B) \subset {}_q BMO_q^\sigma(B)$, 且存在常数 $C =$

$C_q > 0$, 使得对任一两指标 B 值鞅 $f = (f_n, n \in N^2) \in BMO_q^+(B)$ 有:

$$\|f\|_{q, BMO_q^\sigma(B)} \leq C \|f\|_{BMO_q^+(B)}.$$

由 Kwapien 定理^[12]及推论 2、推论 3 可得下面推论.

推论 4 设 B 为 Banach 空间, 则以下条件等价:

(i) B 同构于 Hilbert 空间.

(ii) $BMO_2(B) \approx {}_2BMO_2^s(B)$, 且存在常数 $C > 0$, 使得对任一两指标 B 值鞅 $f = (f_n, n \in N^2)$ 有:

$$C^{-1} \|f\|_{BMO_2(B)} \leq \|f\|_{{}_2BMO_2^s(B)} \leq C \|f\|_{BMO_2(B)}.$$

(iii) $BMO_2^+(B) \approx {}_2BMO_2^\sigma(B)$, 且存在常数 $C > 0$, 使得对任一两指标 B 值鞅 $f = (f_n, n \in N^2)$ 有:

$$C^{-1} \|f\|_{BMO_2^+(B)} \leq \|f\|_{{}_2BMO_2^\sigma(B)} \leq C \|f\|_{BMO_2^+(B)}.$$

参考文献:

- [1] Burkholder D L, Gundy R F. Extrapolation and interpolation of quasi linear operator on martingales[J]. Acta Math, 1970, 124:249-304.
- [2] Garsia A M. Martingale inequalities[C]//Seminar Notes on Recent Progress Math, Lecture Notes Series, New York: Benjamin Inc, 1973:196-212.
- [3] Herz C S. Bounded mean oscillation and regulated martingales[J]. Trans Amer Math Soci, 1974, 193:199-215.
- [4] Bernard A, Muisonneuve B. Decomposition atomique de martingale de la class H_1 (LNM581)[M]. New York: Springer-Verlag Press, 1977:303-323.
- [5] Weisz F. Martingale Hardy space for $0 < p \leq 1$ [J]. Probability Theory and Related Fields, 1990, 84:361-376.
- [6] Weisz F. Martingale hardy space and their applications in Fourier analysis(LNM1568)[M]. New York: Springer-Verlag Press, 1994:84-100.
- [7] 刘培德. 鞅空间与 Banach 空间的几何性质[J]. 中国科学: A 辑, 1990, 20(7):694-704.
- [8] Cheng Riyan, Gan Shixin. Atomic decomposition for two-parameter vector-valued martingales and two-parameter vector-valued martingale spaces[J]. Acta Math Hungar, 2001, 93(1/2):7-25.
- [9] Yu Lin. Duals of Banach-space-valued martingale hardy spaces[J]. Kyungpook Math J, 2001, 41:259-275.
- [10] Yu Lin. Duals of hardy spaces of B -valued martingales for $0 < r \leq 1$ [J]. Acta Mathematica Sinica, 2014, 30(8): 1365-1380.
- [11] Cheng Riyan, Gan Shixin. Two-parameter vector-valued martingales and geometrical properties of Banach spaces[J]. Wuhan University Journal of Natural Sciences, 1999, 4(2):135-142.
- [12] Kwapien S. Isomorphic characterization of inner product spaces by orthogonal series with vector valued coefficients[J]. Studia Math, 1972, 44:583-595.

Mutual Embedding Relation between Two New Types of Two-parameter Banach Space Valued Martingale Spaces

YE Chen, SHU Qi-ang

(College of Science and Technology, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: The Fefferman inequalities for two new types of two-parameter Banach space valued martingale spaces are proven. The relationship between the mutual embedding of two new types of two-parameter Banach space valued martingale spaces and the geometrical properties of Banach spaces are investigated. It is found that the geometrical properties of Banach spaces determine the embedding of martingale spaces which can in return characterize the geometrical properties conversely.

Key words: two-parameter Banach space valued martingale spaces; Sharp operator; Fefferman inequalities; p -uniform smoothness; q -uniform convexity

(责任编辑 史小丽)