

基于穷举法的三值 FPRM 电路功耗最佳极性搜索

厉康平, 汪鹏君*, 张会红

(宁波大学 电路与系统研究所, 浙江 宁波 315211)

摘要: 鉴于 n 变量三值逻辑函数在不同极性下的 FPRM(Fixed-polarity Reed-Muller)表达式繁简不一, 与之对应的 FPRM 电路功耗不同. 通过对三值 FPRM 逻辑表达式的研究, 提出一种基于穷举法的三值 FPRM 电路功耗最佳极性搜索方法. 首先根据三值逻辑函数表达式和开关信号传递理论, 建立三值 FPRM 电路功耗估计模型; 然后利用穷举法对三值 FPRM 电路进行功耗最佳极性搜索, 得到功耗最优的 FPRM 电路; 最后对 13 个 MCNC Benchmark 电路进行仿真验证. 结果表明: 与 0 极性相比, 搜索到的最佳极性功耗平均节省 72.72%.

关键词: 三值逻辑函数; FPRM 电路; 功耗; 极性搜索

中图分类号: TN79

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2015) 04-0031-05

随着集成电路规模和集成度的不断发展, 数字电路必定会遭遇功耗、面积与速度等问题^[1]. 传统的数字电路大都采用二值逻辑, 但是二值信号信息含量低已成为制约集成电路发展的主要因素. 而多值逻辑电路增加了单线携带信息的能力, 能有效提高空间或时间的利用率, 减少数字系统的连线, 节省电路面积与成本^[2]. 基数为 3 的三值逻辑在多值逻辑代数系统中基数最小, 容易实现, 因此极具有代表性.

任意逻辑函数均可以用布尔逻辑和 Reed-Muller(RM)逻辑来表示^[3], 与传统的布尔逻辑电路相比, 基于 RM 逻辑的电路具有以下三个方面的优势^[4-5]. 首先, 在某些功能电路(如通信电路、奇偶校验电路、运算电路等)中, 用 RM 逻辑表示的电路在功耗、面积和速度等方面体现出了巨大的优势; 其次, 用 RM 逻辑表示的电路可测性强; 最后, 用 RM 逻辑表示的电路结构更加紧凑.

由于多值逻辑和 RM 逻辑的诸多优点, 国内外许多专家学者对多值 RM 逻辑进行了研究, 尤其在 RM 逻辑极性转换方面^[6-8]. 极性转换包括 Boolean 逻辑展开式到 RM 逻辑展开式的极性转换以及 RM

逻辑展开式不同极性间的极性转换. Boolean 逻辑展开式到 RM 逻辑展开式的极性转换方法主要有矩阵转换法、代数法、图形转换法、FDDs 转换技术以及列表技术等, RM 逻辑展开式不同极性间的极性转换方法主要包括代数法、K 图法和列表技术. 在三值 FPRM 逻辑函数中, n 变量函数有 3^n 个固定极性, 对应 3^n 个不同的三值 FPRM 表达式. 笔者通过对三值 FPRM 逻辑表达式的研究, 结合三值 FPRM 极性转换技术, 提出一种基于穷举法的三值 FPRM 电路功耗最佳极性搜索方法.

1 三值 FPRM 表达式及其极性转换技术

1.1 三值 FPRM 表达式

当极性为 p 时, 任何 n 变量的三值 FPRM 表达式可表示为如下形式^[9]:

$$f^p(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1) = \oplus \sum_{i=0}^{3^n-1} a_i \cdot \prod_{j=0}^{n-1} \dot{x}_j^{i_j}, \quad (1)$$

其中, 极性 p 可用三进制形式表示为 $p_{n-1}p_{n-2} \dots p_0$; $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 表示 n 个输入变量; $\oplus \Sigma$ 表示模 3 加运算; 下标 $i = 0, 1, 2, \dots, 3^n - 1$ 可以表示为三进制形式 $i_1 i_2 \dots i_n$; a_i 为 FPRM 系数, $a_i \in \{0, 1, 2\}$; $\prod_{j=0}^{n-1} \dot{x}_j^{i_j}$

收稿日期: 2014-12-02.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journallg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(61234002, 61306041); 浙江省自然科学基金(LY13F040003).

第一作者: 厉康平(1991—), 男, 浙江东阳人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 逻辑电路. E-mail: 1151851357@qq.com

*通信作者: 汪鹏君(1966—), 男, 浙江奉化人, 博导/教授, 主要研究方向: 逻辑电路和低功耗集成电路. E-mail: wangpengjun@nbu.edu.cn

表示模 3 乘运算, 其展开式可以表示为:

$$\prod_{j=0}^{n-1} \dot{x}_j^{i_j} = \dot{x}_{n-1}^{i_{n-1}} \dot{x}_{n-2}^{i_{n-2}} \cdots \dot{x}_0^{i_0}, i_j \in \{0, 1, 2\}, \dot{x}_j^0 = 1,$$

$$\dot{x}_j^1 = \dot{x}_j, \dot{x}_j^2 = \dot{x}_j \cdot \dot{x}_j, j = 0, 1, 2, \cdots, n-1.$$

在三值 FPRM 展开式中, 极性 p 和下标 i 决定变量的表示形式. 在 $\prod_{j=0}^{n-1} \dot{x}_j^{i_j}$ 中, 当极性和权值为 p_m 和 i_m 时, $\dot{x}_m^{i_m}$ 可以根据表 1 确定, 其中 $\dot{x}_m^{i_m}$ 表示 $\dot{x}_m^{i_m}$ 的原变量, $(x_m \oplus k)^{i_m}$ 表示 $\dot{x}_m^{i_m}$ 的互补变量, $k \in \{1, 2\}$. 分析表 1 可知, 当 $p_m = 0$ 时, $\dot{x}_m^{i_m}$ 以原变量出现; 当 $p_m = 1$ 和 2 时, $\dot{x}_m^{i_m}$ 以互补变量出现.

表 1 $\dot{x}_m^{i_m}$ 查找表

p_m	i_m	$\dot{x}_m^{i_m}$	p_m	i_m	$\dot{x}_m^{i_m}$	p_m	i_m	$\dot{x}_m^{i_m}$
0	0	1	1	0	1	2	0	1
0	1	x_m	1	1	$x_m \oplus 1$	2	1	$x_m \oplus 2$
0	2	x_m^2	1	2	$(x_m \oplus 1)^2$	2	2	$(x_m \oplus 2)^2$

1.2 三值 FPRM 极性转换技术

矩阵转换法(Matrix Transformation Method)和图形转换法(Map Transformation Method)是常用的多值 FPRM 极性转换方法^[6-7]. 然而采用上述方法时, 极性转换速度慢, 时间复杂度大. 文献[8]提出了一种三值 FPRM 极性转换算法, 提高极性转换速度. 其基本过程表述如下:

(1)极性初始化: 随机产生 1 个极性 p , 并用三进制表示 $p = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$;

(2)根据 p_i 产生与之相应的固定极性 GF 转换矩阵 $G_3^{<p_i>}$ (表 2), $p_i \in \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$;

表 2 GF(3)互补变量和转换矩阵

变量	矩阵	变量	转换矩阵	变量	逆矩阵
x	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	G_3	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$	$(G_3)^{-1}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
$x_m \oplus 1$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$G_3^{<1>}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$	$(G_3^{<1>})^{-1}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$x_m \oplus 2$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$G_3^{<2>}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$	$(G_3^{<2>})^{-1}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(3)将最小项 m 表示成三进制序列 $m = (m_1, m_2, \cdots, m_n)$, 其相应的函数值为 $f(m)$;

(4)根据(2)式, 产生每个最小项的新项 π_i ;

(5)根据(3)式, 求出所产生的新项对 RM 系数所作的贡献 $v(\pi)$, 并在索引表中叠加其贡献值;

(6)对所有的最小项重复步骤(3)~(5), RM 表达式系数即为最后的累加值.

$$\pi_i \in \{j | G_3^{<p_i>}[j, m] \neq 0\}, \quad (2)$$

$$v(\pi) = (v_1 \cdot v_2 \cdots v_n) \cdot v(m), \quad (3)$$

其中, $\pi = (\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n)$, $v_i = G_3^{<p_i>}[\pi_i, m_i]$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

2 三值 FPRM 电路功耗估计模型

要实现三值 FPRM 电路功耗最佳极性搜索, 首先需要建立三值 FPRM 电路的功耗估计模型. 分析(1)式可知, 三值 FPRM 逻辑函数由多输入模 3 加和模 3 乘运算组成, 因此三值 FPRM 电路可以表示成由多输入模 3 加和模 3 乘门组成. 由于多输入门的输入输出关系复杂程度不同, 且在工艺上大多使用二输入门, 所以在电路映射之前, 往往需要将多输入模 3 加和模 3 乘门分解成一系列二输入模 3 加和模 3 乘门, 因此三值 FPRM 电路的功耗可看成由二输入模 3 加和模 3 乘门引起的.

CMOS 电路功耗以负载电容充放电引起的动态功耗为主, 动态功耗的求解公式如下^[10]:

$$P = \frac{1}{2} V_{dd}^2 f_{clk} \sum_{i=1}^n C_L^i E_{so}^i, \quad (4)$$

其中, V_{dd} 表示电路的供电电压; f_{clk} 表示电路的时钟频率; n 表示电路的门数量; C_L^i 表示电路第 i 个门的输出负载电容; E_{so}^i 称为开关活动性, 表示电路第 i 个门在每个时钟周期的平均跳变次数. 在逻辑综合过程中, 上述几个参数往往只有开关活动性是可控的, 且开关活动性与功耗成正比关系, 其大小直接反映电路功耗的大小, 因此可用开关活动性表示电路的功耗. 门电路的开关活动性可以用其输出端的信号概率表示.

假设信号 $x = 1$ 和 $x = 2$ 的概率为在一段足够长时间内测得信号 $x = 1$ 和 $x = 2$ 的时间与总测量时间之比, 记作 P_{x_1} 和 P_{x_2} . 根据模 3 加和模 3 乘运算的输入输出关系和信号概率传递规律, 可分别推出二输入模 3 加和模 3 乘门的输出信号概率. 模 3 加和模 3 乘运算的输入输出关系如图 1 和图 2 所示.

二输入模 3 加门输出信号概率:

$$P'_1 = P_{x_1} \cdot P_{y_0} + P_{x_0} \cdot P_{y_1} + P_{x_2} \cdot P_{y_2} =$$

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

图1 模3 加运算真值表

$\bullet$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

图2 模3 乘运算真值表

$$P_{X_1}(1 - P_{Y_1} - P_{Y_2}) + P_{X_2} \cdot P_{Y_2} + P_{Y_1}(1 - P_{X_1} - P_{X_2}), \quad (5)$$

$$P'_2 = P_{X_2} \cdot P_{Y_0} + P_{X_1} \cdot P_{Y_1} + P_{X_0} \cdot P_{Y_2} = P_{X_2}(1 - P_{Y_1} - P_{Y_2}) + P_{X_1} \cdot P_{Y_1} + P_{Y_2}(1 - P_{X_1} - P_{X_2}). \quad (6)$$

二输入模3 乘门输出信号概率:

$$P'_1 = P_{X_1} \cdot P_{Y_1} + P_{X_2} \cdot P_{Y_2}, \quad (7)$$

$$P'_2 = P_{X_1} \cdot P_{Y_2} + P_{X_2} \cdot P_{Y_1}, \quad (8)$$

式中, P'_1 和 P'_2 表示二输入门输出信号为 1 和 2 的概率, P_{X_i} 表示 x 输入信号为 i 的概率, P_{Y_i} 表示 y 输入信号为 i 的概率, $i \in \{0, 1, 2\}$.

电路的实现方式会影响开关活动性的具体计算方法, 本文主要研究动态电路的开关活动性. 动态逻辑电路通常采用“预充——求值”的工作方式, 在预充期间将输出预先充电到高电平或者放电到低电平. 以预充电到高电平为例, 电路的输出在发生跳变时需要一个预充阶段. 三值电路有 3 种预充方式——“0-1”“0-2”“1-2”. 在实际情况下, 3 种跳变方式所产生的功耗是不同的, 但是为了方便功耗计算, 笔者将其简化处理, 设置 3 种跳变方式的功耗相同. 虽然这种简化处理会对电路功耗的精确度产生影响, 但是由于这种处理针对的是每个极性, 因此对功耗最佳极性搜索产生的影响较少. 预放电到低电平时, 开关活动性与预充到高电平相同. 因此若输出信号概率为 P'_1 和 P'_2 , 开关活动性公式如下:

$$E_{\text{swd}}^i = 2(P'_1 + P'_2). \quad (9)$$

3 三值 FPRM 电路功耗优化

在 n 变量的三值 FPRM 逻辑函数中有 3^n 个固定极性, 对应 3^n 个不同的 FPRM 表达式, 表达式的简单与复杂程度由极性决定. 因此, 极性对三值 FPRM 电路的功耗、面积等性能指标产生很大的影响. 笔者利用穷举法依次搜索电路的每个极性, 计算其对应的电路功耗, 通过比较每个极性对应电

路的功耗大小, 得到功耗最佳极性, 从而达到电路功耗优化的目的.

按照三进制非循环格雷码规律^[8]来遍历每个极性能快速得到功耗最优的极性, 是一种比较理想的穷尽搜索策略. 在三值 FPRM 功耗最佳极性搜索中, 依次遍历的 2 个极性其格雷码只有 1 位不相同, 可以提高不同极性之间的转换效率. 当二输入函数的逻辑表达式极性变化规律为“22→20→21→01→00→02→12→10→11”时, 相邻极性间的香农距离为 1, 遍历极性的路径最短.

结合穷举法和极性转换技术, 三值 FPRM 电路功耗最佳极性搜索的基本步骤如下:

(1) 运用三值积之和表达式到三值 FPRM 表达式的转换技术, 将三值最小项表达式转换到最大极性下的三值 FPRM 表达式;

(2) 运用三值 FPRM 极性间转换技术, 将某一极性下的三值 FPRM 表达式转换到另一极性下的三值 FPRM 表达式;

(3) 按照三进制非循环格雷码规律遍历每个极

```

/*
* input:  benchmark name - BinaryBenchmarkName
* output:  best polarity and consumption - Best
*/
Begin Algorithm:
{
    Binary_Benchmark_to_Ternary_Benchmark();
    Read_Ternary_Benchmark_Name();
    current_polarity = Generate_gray();
    TFPRM = SOP_to_TFPRM(current_polarity, sop);
    best_power = power_test (TFPRM);
    element_count(Best,best_power,current_polarity);
    for ( i = 0; i < 3n-1; i++)
    {
        previous_polarity = current_polarity;
        current_polarity = Generate_gray();
        TFPRM_to_TFPRM(current_polarity,previous_polarity,TFPRM);
        t = power_test ( TFPRM );
        if ( t < best_power )
        {
            set_clean( Best );
            element_count(Best, t, current_polarity );
            best_power = temp;
        }
        else if ( t = best_power )
            element_count(Best, t, current_polarity );
    }
    return Best;
}

```

图3 三值 FPRM 电路功耗最佳极性搜索伪代码

性,以功耗最优为准则搜索出最佳极性,算法结束.

在进行最佳极性搜索前需读入 PLA 格式电路,然而目前只有标准的二值 PLA 格式电路,没有标准的三值 PLA 格式电路.因此首先用文献[11]所提方法将标准的二值 PLA 格式电路转换为三值 PLA 格式电路,然后运用上述所提算法进行最佳极性搜索.基于穷举法的三值 FPRM 电路功耗最佳极性搜索算法的伪代码如图 3 所示.

4 仿真结果与分析

文中所提算法在 Win7 64 位操作系统, Intel Core i3-2130 CPU 3.40 GHz, 4 G RAM 运行环境下,用 C 语言通过 VC 6.0 编译实现,随机采用 13 个 MCNC Benchmark 电路进行仿真验证搜索到的最佳极性与 0 极性比较.为计算三值 FPRM 电路的开关活动性,随机产生 15 组输入信号概率: $(P1, P2) = \{(0.21, 0.53), (0.49, 0.30), (0.33, 0.24), (0.68, 0.13), (0.15, 0.26), (0.57, 0.22), (0.18, 0.51), (0.71, 0.24), (0.08, 0.35), (0.57, 0.32), (0.46, 0.28), (0.17, 0.05), (0.32, 0.43), (0.14, 0.72), (0.25, 0.61)\}$.

三值 FPRM 电路功耗最佳极性搜索结果见表 3.表中,列 1 和列 2 分别为电路名称和输入/输出变量个数;列 3 (Mod3-A₀)、列 4 (Mod3-M₀)和列 5 (SA₀)分别表示 0 极性下二输入模 3 加的门数量、二输入模 3 乘的门数量和电路总的开关活动性;列

6 (Polarity_{BP})、列 7 (Mod3-A_{BP})、列 8 (Mod3-M_{BP})和列 9 (SA_{BP})分别表示搜索到的最佳极性以及最佳极性下三值 FPRM 电路二输入模 3 加的门数量、二输入模 3 乘的门数量和电路总的开关活动性;列 10 表示与 0 极性相比最佳极性在开关活动性上节省的百分比.与 0 极性相比,最佳极性在开关活动性节省上的百分比定义如下:

$$Z_{\text{Save,SA}} = \frac{Z_{\text{SA},0} - Z_{\text{SA,BP}}}{Z_{\text{SA},0}} \times 100\%, \quad (10)$$

其中, $Z_{\text{Save,SA}}$ 表示开关活动性节省的百分比; $Z_{\text{SA},0}$ 表示 0 极性下的开关活动性大小; $Z_{\text{SA,BP}}$ 表示最佳极性下的开关活动性大小.

分析数据可知,本文所提方法搜索到的最佳极性与 0 极性相比优化效果明显,其中, t4 电路的开关活动性节省了 95.02%, 13 个测试电路的开关活动性平均节省了 72.72%.

5 结论

通过对三值 FPRM 逻辑表达式的研究建立三值 FPRM 电路功耗估计模型,并结合三值 FPRM 极性转换技术,提出一种基于穷举法的三值 FPRM 电路功耗最佳极性搜索方法.通过对 13 个 MCNC Benchmark 电路进行仿真验证表明,所提方法具有明显的优化效果.本文采用穷举法遍历每个极性,然而随着变量的增加,搜索空间急剧增大,穷举法

表 3 三值 FPRM 电路功耗最佳极性搜索结果

电路名称	输入/输出变量	0 Polarity			Best Polarity				Power Save/%
		Mod3-A ₀	Mod3-M ₀	SA ₀	Polarity _{BP}	Mod3-A _{BP}	Mod3-M _{BP}	SA _{BP}	
con1	7/2	59	201	197.16	53	9	52	18.04	90.85
inc	7/9	52	201	176.06	53	25	103	53.85	69.41
dist	8/5	42	175	146.13	51	33	145	75.33	48.45
dc2	8/7	24	116	90.22	46	17	70	37.38	58.57
f51m	8/8	35	136	126.12	45	29	126	61.94	50.89
root	8/5	28	107	95.98	37	14	76	36.51	61.96
apla	10/12	34	128	123.55	85	11	60	32.55	73.65
clpl	11/5	20	51	72.08	479	3	15	5.73	92.05
newcond	11/2	396	2 228	1 574.96	419	182	1 182	456.25	71.03
br1	12/8	47	264	185.03	425	15	120	16.23	91.23
t4	12/8	65	223	255.69	343	8	47	12.73	95.02
cm162a	14/5	333	1 940	1 388.88	1285	114	791	242.75	82.52
table3	14/14	1 054	7 466	4 408.05	1363	721	5 209	1 773.36	59.77

很难在有限时间内得到搜索结果. 因此在今后的研究中将结合智能算法, 在保证精度的条件下, 减小搜索时间, 提高搜索效率.

参考文献:

- [1] 郑雪松, 汪鹏君, 杨乾坤. 基于绝热多米诺逻辑的三值移位寄存器设计[J]. 浙江大学学报: 理学版, 2014, 41(4): 427-431.
- [2] 汪鹏君, 杨乾坤, 郑雪松. 三值绝热多米诺加法器开关级设计[J]. 电子与信息学报, 2012, 34(10):2514-2519.
- [3] Rafiev A, Mokhov A, Burns F P, et al. Mixed radix Reed-Muller expansions[J]. IEEE Transactions on Computers, 2012, 61(8):1189-1202.
- [4] Al Jassani B A, Urquhart N, Almaini A E A. Manipulation and optimisation techniques for Boolean logic[J]. IET Computers & Digital Techniques, 2010, 4(3):227-239.
- [5] Rahaman H, Das D K, Bhattacharya B B. Testable design of AND-EXOR logic networks with universal test sets[J]. Computers & Electrical Engineering, 2009, 35(5):644-658.
- [6] Falkowski B J, Fu C. Fastest classes of linearly independent transforms over GF (3) and their properties [J]. IEE Proceedings Computers and Digital Techniques, 2005, 152(5):567-576.
- [7] Fu C, Falkowski B J. Ternary fixed polarity linear Kronecker transforms and their comparison with ternary Reed Muller transform[J]. Journal of Circuits, Systems, and Computers, 2005, 14(4):721-733.
- [8] 孙飞, 汪鹏君, 俞海珍. 三值 FPRM 电路极性间转换算法及其在面积优化中的应用[J]. 浙江大学学报: 理学版, 2014, 41(1):43-48.
- [9] Falkowski B J, Fu C. Polynomial expansions over GF (3) based on fastest transformation[C]//IEEE Proceedings 33rd International Symposium on Multiple-Valued Logic, 2003:40-45.
- [10] Nguyen D, Davare A, Orshansky M, et al. Minimization of dynamic and static power through joint assignment of threshold voltages and sizing optimization[C]//ACM Proceedings of the 2003 international symposium on Low Power Electronics and Design, 2003:158-163.
- [11] Falkowski B J, Lozano C C, Rahardja S. Column polarity matrix algorithm for ternary fixed polarity Reed-Muller expansions[J]. Journal of Circuits, Systems, and Computers, 2006, 15(2):243-262.

Search for the Best Power Polarity of Ternary FPRM Circuits Based on Exhaustive Method: Study

LI Kang-ping, WANG Peng-jun*, ZHANG Hui-hong

(Institute of Circuits and Systems, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: The complexity of expansion varies for the same ternary FPRM (Fixed-polarity Reed-Muller) logic function featuring n variables with different polarities. The power of ternary FPRM circuit also varies with different polarities. In this paper, a scheme searching for the best power polarity of ternary FPRM circuit is put forward based on the research of ternary FPRM expansions. Firstly, according to the ternary FPRM logic function expression and switch signal transmission theory, a ternary FPRM circuit power estimation model is established. Secondly, exhaustive method is used to search for the best polarity, so as to obtains the best power FPRM circuit. Finally, 13 MCNC benchmarks are used to verify the method presented in this paper. The results show that the power consumption of ternary FPRM circuits has achieved average saving 72.72% in comparison with those FPRM circuits under polarity 0.

Key words: ternary logic function; FPRM circuits; power consumption; polarity search

(责任编辑 章踐立)