

一个(3+1)维非线性偏微分方程的有限对称变换群和精确解

王美丽, 李彪*

(宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 基于符号计算与对称群直接法研究了一个(3+1)维非线性偏微分方程 $3w_{xz} - (2w_t - 2ww_x + w_{xxx})_y + 2(w_x \partial_x^{-1} w_y)_x = 0$ 的对称群与精确解, 获得该方程的李点对称群和非李对称群. 最后通过广义射影 Riccati 展开法研究方程的精确解, 并由获得的有限对称变换群构造了相应新的一般解.

关键词: 对称群; 精确解; 符号计算; (3+1)维 NEE 方程; 广义射影 Riccati 展开法

中图分类号: O175.29

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2015) 04-0096-04

近几年来, 非线性偏微分方程的对称性、对称群、对称约化、守恒律和群不变解的研究受到数学物理学家的广泛关注^[1-3]. 有许多方法可以获得给定偏微分方程的相似约化, 例如经典李群法^[4]、非经典李群法^[5]、没有使用任何群论思想的 CK 直接法^[6-7]以及改进的对称群直接方法^[8-11]等. 值得指出的是, 利用改进的直接方法不仅可以得到所研究非线性系统的李点对称变换群和非李对称群, 而且能得到的有限对称变换群的最后表达式, 比采用经典李群方法更加简单, 从而被数学物理学家广泛应用到实际的物理现象中.

文献[10]的主要思想是寻找一个给定偏微分方程的相似约化, 其形式如下:

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = W(x_1, x_2, \dots, x_n, U(X_1, X_2, \dots, X_n)), X_i = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n), i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

给定的偏微分方程为:

$$F(x_i, u, u_{x_i}, u_{x_i x_j}, \dots; i, j = 1, 2, \dots, n) = 0, \quad (2)$$

将(1)式代入(2)式, 要求在变换 $\{u, x_1, x_2, \dots, x_n\} \rightarrow \{U, X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 下, U 满足同样偏微分方程, 即:

$$F(X_i, U, U_{X_i}, U_{X_i X_j}, \dots; i, j = 1, 2, \dots, n) = 0.$$

值得注意的是, 对于一些物理系统而言, 我们只需通过寻找以下简单形式的群变换即可:

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) + \beta(x_1, x_2, \dots, x_n)U(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (3)$$

从而对于各种非线性系统解形式的设法, 我

们一般用简单的(3)式来代替复杂的(1)式.

用改进的对称群直接方法研究如下(3+1)维非线性发展方程 NEE (Nonlinear Evolution Equation):

$$3w_{xz} - (2w_t - 2ww_x + w_{xxx})_y + 2(w_x \partial_x^{-1} w_y)_x = 0, \quad (4)$$

的对称约化, 下标代表求偏导数, w 是 4 个独立变量 x, y, z, t 的函数, ∂_x^{-1} 定义为 $\partial_x^{-1} f(x, t) = \int_{-\infty}^x f(x', t) dx'$.

(3+1)维非线性发展方程(4)首先在文献[12]中被提及, 它是一个新的可积方程, 虽然此方程在物理和科学中的应用尚不明确, 但很容易发现此方程与著名 Korteweg-de Vries(KDV)方程有密切关系. 因(3+1)维 NEE 方程(4)中存在 KDV 方程的主要形式 $2w_t - 2ww_x + w_{xxx}$, 经变换 $w(x, t) \rightarrow u(x', t')$, $x' \rightarrow x/\sqrt{3}, t' \rightarrow t/6\sqrt{3}$ 变为 KDV: $u_t' - 6uu_x' + u_{x'x'x'} = 0$. 作为 KDV 方程的拓展, (3+1)维 NEE 可以用于研究非线性色散模型中的浅水波和短波. 通过使用 NEE 的双线性形式, 构造出了它的 N 孤子解和它的朗斯基形式^[13]. 文献[14]构造了达布变换和它的多孤子解, 文献[15]构造了(3+1)维 NEE 的 Rogue 波和有理解, 而(3+1)维 NEE 方程(4)在对称群方面的研究还未报道过.

1 (3+1)维 NEE 的有限对称变换群

1.1 (3+1)维 NEE 的李点对称

为得到(3+1)维 NEE 方程(4)的李点对称群, 首先假设 $w = u_x$, 从而(4)式可写成:

收稿日期: 2014-03-24.

宁波大学学报(理工版) 网址: <http://journal.lg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(11271211).

第一作者: 王美丽(1986—), 女, 河北廊坊人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 非线性偏微分方程. E-mail: fengli0210ai@163.com

*通信作者: 李彪(1971—), 男, 湖南会同人, 教授, 主要研究方向: 数学物理与数学机械化. E-mail: libiao@nbu.edu.cn

$$3u_{xxz} - 2u_{xyt} + 4u_{xy}u_{xx} + 2u_{xx}u_{xy} - u_{xxxx} + 2u_{xxx}u_y = 0. \quad (5)$$

将(5)式记作 $\Delta(x, y, z, t, u) = 0$, 设 $\xi, \eta, \zeta, \tau, \mu$ 分别是 x, y, z, t, u 的无穷小, 进而将寻找的向量场设为如下形式:

$$V = \xi \partial_x + \eta \partial_y + \zeta \partial_z + \tau \partial_t + \mu \partial_u, \quad (6)$$

式中, 系数 $\xi, \eta, \zeta, \tau, \mu$ 分别是 $\{x, y, z, t, u\}$ 的函数. 依据微分方程的一般理论, 为了获得这些函数, 需要对向量场进行五阶导数延拓, 并要求把延拓后的向量场在(6)式的解流形限定下消去 Δ ,

$$pr^{(5)}V(\Delta(x, y, z, t, u))|_{\Delta(x, y, z, t, u)=0} = 0, \quad (7)$$

式中, $pr^{(5)}V$ 是向量场 V 的五阶延拓. 利用李群理论与符号计算系统 maple, 得到函数 $\xi, \eta, \zeta, \tau, \mu$ 的复杂的决定微分方程系统, 解此微分方程可得:

$$\begin{aligned} \xi &= c_1 x / 3 + f, \eta = (-2c_1 / 3 + c_3) y + g, \\ \zeta &= c_3 z + c_4, \tau = c_1 t + c_2, \\ \mu &= (-f_t + 3g_z / 2) x - c_1 u / 3 + 3f_z y / 2 + h, \end{aligned} \quad (8)$$

式中, $f = f(z, t), h = h(z, t)$ 和 $g = g(z)$ 都是 $C^\infty(I)$, $I \in R$ 上的任意实值函数, 下标表示求偏导数.

因此, 能够通过解特征线方程:

$$dx / \xi = dy / \eta = dz / \zeta = dt / \tau = du / \mu, \quad (9)$$

可得方程的对称约化与精确解. 由于较难通过解特征方程得到完全对称群, 因此笔者采用改进的对称群直接法^[8-11]来研究方程的有限对称变换群.

1.2 (3+1)维 NEE 的有限对称变换群

依据改进的对称群直接法, 设(5)式有如下解:

$$u = \alpha + \beta U(\xi, \eta, \zeta, \tau), \quad (10)$$

式中, $\alpha, \beta, \xi, \eta, \zeta, \tau$ 都是 $\{x, y, z, t\}$ 的函数. 其中 $U(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ 满足与(5)式形式相同的方程, 即:

$$3U_{\xi\xi\xi} - 2U_{\xi\eta\tau} + 4U_{\xi\eta}U_{\xi\xi} + 2U_{\xi}U_{\xi\xi\eta} - U_{\xi\xi\xi\eta} + 2U_{\xi\xi\xi}U_{\eta} = 0. \quad (11)$$

将(10)式代入(5)式, 利用(11)式消去 $U_{\xi\xi\xi\xi\eta}$, 就可得到 U 及 U 的各阶导数的多项式微分方程:

$$G(x, y, z, t, U, U_{\xi}, U_{\eta}, U_{\zeta}, U_{\tau}, \dots) = 0. \quad (12)$$

因为 $U(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ 是(11)式的任意解, 因此可以通过消去 U 及 U 的各阶导数系数.

$$\begin{aligned} \xi &= cc_1^{1/3} x + \xi_0, \eta = \frac{\zeta_1}{c^2 c_1^{2/3}} y + \eta_0, \\ \zeta &= \zeta_1 z + \zeta_2, \tau = c_1 t + c_2, \\ \alpha &= \frac{2\zeta_1 \xi_0 - 3c^3 c_1 \eta_0}{2c_1^{1/3} \zeta_1 c} x - \frac{3\xi_0}{2cc_1^{1/3}} y + \alpha_0, \\ \beta &= cc_1^{1/3}, \end{aligned} \quad (13)$$

式中, $c_1, c_2, \zeta_1, \zeta_2$ 是任意实数, $\xi_0 = \xi_0(z, t)$, $\eta_0 = \eta_0(z)$, $\alpha_0 = \alpha_0(z, t)$ 都是 $C^\infty(I)$, $I \in R$ 上的任意实值函数, 下标表示求偏导数. 然而, c 有离散值:

$$c = 1, -(1 \pm i\sqrt{3}) / 2, i = \sqrt{-1}. \quad (14)$$

由以上的计算可得以下解定理:

定理 1 如果 $U = U(x, y, z, t)$ 是(3+1)维 NEE (5)的 1 个解, 则:

$$\begin{aligned} u &= \frac{2\zeta_1 \xi_0 - 3c^3 c_1 \eta_0}{2c_1^{1/3} \zeta_1 c} x - \frac{3\xi_0}{2cc_1^{1/3}} y + \alpha_0 + \\ &cc_1^{1/3} U(\xi, \eta, \zeta, \tau), \end{aligned} \quad (15)$$

也是方程(5)式的解, 其中 $\xi, \eta, \zeta, \tau, c$ 的值由(13)式和(14)式决定. 进一步, 如果限定群理论中的任意函数与参数只要满足以下条件:

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 + \varepsilon C_1, c_2 = \varepsilon C_2, \zeta_1 = 1 + \varepsilon C_3, \zeta_2 = \varepsilon C_4, \\ \xi_0 &= \varepsilon m, \eta_0 = \varepsilon q, \alpha_0 = -\varepsilon k, c = 1, \end{aligned}$$

式中, C_1, C_2, C_3, C_4 是任意实数, $m = m(z, t)$, $q = q(z)$, $k = k(z, t)$ 都是 $C^\infty(I)$, $I \in R$ 上的任意实值函数, ε 是无穷小参数, 则(15)式可写为:

$$\begin{aligned} \sigma(U) &= (C_1 x / 3 + m) U_x + (-2C_1 y / 3 + C_3 y + \\ &q) U_y + (C_3 z + C_4) U_z + (C_1 t + C_2) U_t + \\ &xm_t - 3q_z x / 2 - 3m_z y / 2 + C_1 u / 3 - k. \end{aligned} \quad (16)$$

上述对称等价的向量场为:

$$\begin{aligned} V &= (C_1 x / 3 + m) \partial / \partial x + (-2C_1 y / 3 + C_3 y + \\ &q) \partial / \partial y + (C_3 z + C_4) \partial / \partial z + (C_1 t + \\ &C_2) \partial / \partial t + (k - xm_t + 3q_z x / 2 + \\ &3m_z y / 2 - C_1 u / 3) \partial / \partial U. \end{aligned} \quad (17)$$

这与用标准李群方法得到的结果一致.

2 (3+1)维 NEE 的精确解

由于高维非线性偏微分方程的求解较为困难, 笔者利用广义射影 Riccati 方法研究(3+1)维 NEE 方程(5)的精确解. 通过平衡 NEE 方程(5)的最高阶导数项与最高阶非线性项, 则(5)式有如下形式的解:

$$u = a_0 + a_1 \sigma(\bar{\xi}) + b_1 \tau(\bar{\xi}), \quad (18)$$

$$\bar{\xi} = x + \bar{k}y + \bar{l}z + \bar{m}t, \quad (19)$$

式中, $\bar{k}, \bar{l}, \bar{m}$ 是待定系数, $\sigma(\bar{\xi})$ 和 $\tau(\bar{\xi})$ 满足 Riccati 方程:

$$\begin{aligned} \sigma'(\bar{\xi}) &= \varepsilon \sigma(\bar{\xi}) \tau(\bar{\xi}), \varepsilon = \pm 1, \tau'(\bar{\xi}) = R + \\ &\varepsilon \tau^2(\bar{\xi}) - \mu \sigma(\bar{\xi}), R \neq 0, \end{aligned} \quad (20)$$

式中, R, μ 是常数, 并且 $\sigma(\bar{\xi})$ 和 $\tau(\bar{\xi})$ 同时满足:

$$\tau^2(\bar{\xi}) = -\varepsilon(R - 2\mu\sigma(\bar{\xi}) + (\mu^2 - 1)\sigma^2(\bar{\xi})/R). \quad (21)$$

由于 Riccati 方程(20)有如下形式解:

当 $\varepsilon = -1$ 时,

$$\tau_1(\bar{\xi}) = \frac{\sqrt{R} \tanh(\sqrt{R}\bar{\xi})}{1 + \mu \operatorname{sech}(\sqrt{R}\bar{\xi})}, \sigma_1(\bar{\xi}) = \frac{\sqrt{R} \operatorname{sech}(\sqrt{R}\bar{\xi})}{1 + \mu \operatorname{sech}(\sqrt{R}\bar{\xi})}, \quad (22)$$

$$\tau_2(\bar{\xi}) = \frac{\sqrt{R} \coth(\sqrt{R}\bar{\xi})}{1 + \mu \operatorname{csch}(\sqrt{R}\bar{\xi})}, \sigma_2(\bar{\xi}) = \frac{\sqrt{R} \operatorname{csch}(\sqrt{R}\bar{\xi})}{1 + \mu \operatorname{csch}(\sqrt{R}\bar{\xi})}. \quad (23)$$

当 $\varepsilon = 1$ 时,

$$\tau_3(\bar{\xi}) = \frac{\sqrt{R} \tan(\sqrt{R}\bar{\xi})}{1 + \mu \sec(\sqrt{R}\bar{\xi})}, \sigma_3(\bar{\xi}) = \frac{\sqrt{R} \sec(\sqrt{R}\bar{\xi})}{1 + \mu \sec(\sqrt{R}\bar{\xi})}, \quad (24)$$

$$\tau_4(\bar{\xi}) = -\frac{\sqrt{R} \cot(\sqrt{R}\bar{\xi})}{1 + \mu \csc(\sqrt{R}\bar{\xi})}, \sigma_4(\bar{\xi}) = \frac{\sqrt{R} \csc(\sqrt{R}\bar{\xi})}{1 + \mu \csc(\sqrt{R}\bar{\xi})}, \quad (25)$$

利用符号计算系统 maple, 将(18)~(21)式代入(5)式, 然后通过收集所得系统的分子关于 $\{\sigma(\bar{\xi}), \tau(\bar{\xi})\}$ 多项式的系数, 就能得到关于 $a_0, a_1, b_1, \bar{k}, \bar{l}, \bar{m}, \mu$ 的超定代数方程组. 因此, 通过解该超定代数方程组, 得到以下几组解:

当 $\varepsilon = -1$ 时,

情况 1:

$$a_0 = a_0, a_1 = \mu = 0, b_1 = -3, \bar{k} = \frac{3\bar{l}}{2(\bar{m} + 2R)}. \quad (26)$$

情况 2:

$$a_0 = a_0, a_1 = \pm 3\sqrt{\frac{\mu^2 - 1}{4R}}, b_1 = -\frac{3}{2}, \bar{k} = \frac{3\bar{l}}{2\bar{m} + R}. \quad (27)$$

当 $\varepsilon = 1$ 时,

情况 3:

$$a_0 = a_0, a_1 = \mu = 0, b_1 = 3, \bar{k} = \frac{3\bar{l}}{2(\bar{m} - 2R)}. \quad (28)$$

情况 4:

$$a_0 = a_0, a_1 = \pm 3\sqrt{\frac{1 - \mu^2}{4R}}, b_1 = \frac{3}{2}, \bar{k} = \frac{3\bar{l}}{2\bar{m} - R}. \quad (29)$$

由(18)~(27)式, 可得(5)式的解如下:

当 $\varepsilon = -1$ 时,

情况 1:

$$u_{11} = -3\sqrt{R} \tanh(\sqrt{R}\bar{\xi}), u_{12} = -3\sqrt{R} \coth(\sqrt{R}\bar{\xi}), \quad (30)$$

这里, 取 $a_0 = 0, \bar{\xi} = x + \frac{3\bar{l}}{2(\bar{m} + 2R)}y + \bar{l}z + \bar{m}t$.

情况 2:

$$u_{21} = \pm 3\sqrt{\frac{\mu^2 - 1}{4R}} \frac{\sqrt{R} \operatorname{sech}(\sqrt{R}\bar{\xi})}{1 + \mu \operatorname{sech}(\sqrt{R}\bar{\xi})} -$$

$$\frac{3}{2} \frac{\sqrt{R} \tanh(\sqrt{R}\bar{\xi})}{1 + \mu \operatorname{sech}(\sqrt{R}\bar{\xi})}, \quad (31)$$

$$u_{22} = \pm 3\sqrt{\frac{\mu^2 - 1}{4R}} \frac{\sqrt{R} \operatorname{csch}(\sqrt{R}\bar{\xi})}{1 + \mu \operatorname{csch}(\sqrt{R}\bar{\xi})} - \frac{3}{2} \frac{\sqrt{R} \coth(\sqrt{R}\bar{\xi})}{1 + \mu \operatorname{csch}(\sqrt{R}\bar{\xi})}, \quad (32)$$

这里, 取 $a_0 = 0, \bar{\xi} = x + 3\bar{l}y / (2\bar{m} + R) + \bar{l}z + \bar{m}t$.

当 $\varepsilon = 1$ 时,

情况 3:

$$u_{31} = 3\sqrt{R} \tan(\sqrt{R}\bar{\xi}), u_{32} = -3\sqrt{R} \cot(\sqrt{R}\bar{\xi}), \quad (33)$$

这里, 取 $a_0 = 0, \bar{\xi} = x + \frac{3\bar{l}}{2(\bar{m} - 2R)}y + \bar{l}z + \bar{m}t$.

情况 4:

$$u_{41} = \pm 3\sqrt{\frac{1 - \mu^2}{4R}} \frac{\sqrt{R} \sec(\sqrt{R}\bar{\xi})}{1 + \mu \sec(\sqrt{R}\bar{\xi})} + \frac{3}{2} \frac{\sqrt{R} \tan(\sqrt{R}\bar{\xi})}{1 + \mu \sec(\sqrt{R}\bar{\xi})} -$$

$$u_{42} = \pm 3\sqrt{\frac{1 - \mu^2}{4R}} \frac{\sqrt{R} \csc(\sqrt{R}\bar{\xi})}{1 + \mu \csc(\sqrt{R}\bar{\xi})} - \frac{3}{2} \frac{\sqrt{R} \cot(\sqrt{R}\bar{\xi})}{1 + \mu \csc(\sqrt{R}\bar{\xi})} \quad (34)$$

这里, 取 $a_0 = 0, \bar{\xi} = x + 3\bar{l}y / (2\bar{m} - R) + \bar{l}z + \bar{m}t$.

以上得到的精确解, 可通过使用定理 1 构造出相应的新解. 为简便起见, 笔者仅构造 2 种类型的孤子解:

$$U_1 = \frac{2\zeta_1 \xi_0 - 3c^3 c_1 \eta_0}{2c_1^{1/3} \zeta_1 c} x - \frac{3\xi_0}{2cc_1^{1/3}} y + \alpha_0 + cc_1^{1/3} u_{11}, \quad (35)$$

$$U_2 = \frac{2\zeta_1 \xi_0 - 3c^3 c_1 \eta_0}{2c_1^{1/3} \zeta_1 c} x - \frac{3\xi_0}{2cc_1^{1/3}} y + \alpha_0 + cc_1^{1/3} u_{12}, \quad (36)$$

式中, $c_1, c_2, \zeta_1, \zeta_2$ 是任意实数, $\xi_0 = \xi_0(z, t), \eta_0 = \eta_0(z), \alpha_0 = \alpha_0(z, t)$ 都是 $C^\infty(I)$, $I \in \mathbb{R}$ 上的任意实值函数, 下标表示求偏导数, c 有离散值: $c = 1, -(1 \pm i\sqrt{3})/2, i = \sqrt{-1}$, u_{11} 和 u_{12} 由(30)式决定, 且

$$\bar{\xi} = cc_1^{1/3} x + \xi_0 + \frac{3\bar{l}}{2(\bar{m} + 2R)} \left(\frac{\zeta_1}{c^2 c_1^{2/3}} y + \eta_0 \right) + \bar{l}(\zeta_1 z + \zeta_2) + \bar{m}(c_1 t + c_2).$$

3 结语

通过对称群理论和符号计算, 我们获得了(3+1)维 NEE 方程的有限对称变换群; 并通过限定任意

函数与常量, 李点对称群得以构造出来; 通过验证, 结果与用标准李群方法得到的结果一致; 最后用广义射影 Riccati 展开法研究了方程的精确解, 并由获得的有限对称变换群构造了相应的新的一般解, 体现出两者之间的紧密联系.

参考文献:

- [1] Bluman G W, Cole J D. Similarity methods for differential equations[M]. New York: Springer Presses, 1974: 88-95.
- [2] Olver P J, Rosenau P. Group-invariant solutions of differential equations[J]. Phys Lett A, 1986, 114:107-112.
- [3] Tian C. Lie Group and its applications in differential equations[M]. Beijing: Science Press, 2001:96-104.
- [4] Olver P J. Applications of Lie Groups to Differential Equations[M]. 2nd ed. New York: Springer Presses, 1993: 55-71.
- [5] Bluman G W, Kumei S. Symmetries and differential equations[M]. Berlin: Springer Verlag Presses, 1989:2-15.
- [6] Clarkson P A, Kruskal M D, New similarity reductions of the Boussinesq equation[J]. J Math Phys, 1989, 30:2201-2213.
- [7] Clarkson P A. New similarity solutions for the modified Boussinesq equation[J]. J Phys A: Math Gen, 1989, 22 (13):2355-2367.
- [8] Lou Senyue. Symmetries and similarity reductions of the Dym equation[J]. Phys Scr, 1996, 54:428-435.
- [9] Lou Senyue, Ruan Hangyu, Chen Defang, et al. Similarity reductions of the KP equation by a direct method[J]. J Phys A, 1991, 24:1455-1458.
- [10] Lou Senyue, Ma Hongcai. Non-lie symmetry groups of (2+1)-dimensional nonlinear systems obtained from a simple direct method[J]. J Phys A: Math Gen, 2005, 38: 129-137.
- [11] Ma Hongcai, Lou Senyue. Finite symmetry transformation groups and exact solutions of Lax integrable systems [J]. Chin Phys B, 2005, 14(8):1495-1500.
- [12] Geng X G. Algebraic-geometrical solutions of some multidimensional nonlinear evolution equations[J]. J Phys A, 2003, 36:2289-2303.
- [13] Geng Xianguo, Ma Yunling. N-soliton solution and its Wronskian form of a (3+1)-dimensional nonlinear evolution equation [J]. Phys Lett A. 2007, 369:285-289.
- [14] Zha Qilao, Li Zhibin. Darboux transformation and various solutions for a nonlinear evolution equation in (3+1)-dimensions[J]. Mod Phys Lett B, 2008, 22:2945-2966.
- [15] Zha Qilao. Rogue waves and rational solutions of a (3+1)-dimensional nonlinear evolution equation[J]. Phys Lett A, 2013, 377:3021-3026.
- [16] Li Biao, Chen Yong. On exact solutions of the nonlinear Schrödinger equations[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2004, 21:241-247.

Finite Symmetry Transformation Groups and Some Exact Solutions of a (3+1)-dimensional Nonlinear Evolution Equation

WANG Mei-li, LI Biao*

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: Based on symbolic computation and the symmetry group direct method, we investigate symmetry groups and exact solution of a (3+1)-dimensional nonlinear evolution equation $3w_{xz} - (2w_t - 2ww_x + w_{xxx})_y + 2(w_x \partial_x^{-1} w_y)_x = 0$, both the Lie point symmetry groups and the non-Lie symmetry groups are obtained. Finally, using a generalized sub-equation expansion method, some exact solutions of the (3+1)-dimensional nonlinear evolution equation are derived, and the corresponding new solutions can be constructed through the finite symmetry transformation groups obtained.

Key words: symmetry groups; exact solutions; symbolic computation; (3+1)-dimensional NEE equation; the projective Riccati expansion method

(责任编辑 章践立)