

SPS 参数化有理 Bézier 曲线的几何性质

朱如媛, 徐晨东*

(宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: SPS(Scalar Projection Scale)参数化有理 Bézier 曲线在几何造型中有重要应用. 为研究其几何性质, 首先分析了当 SPS 参数化有理 Bézier 曲线退化为 Bézier 曲线时, 其所具有的几何性质; 其次证明了 SPS 参数化有理 Bézier 曲线升阶后仍为 SPS 参数化; 最后在求导的基础上利用笛卡尔符号法则分析 SPS 参数化二次有理 Bézier 曲线曲率的单调性, 并得到了其曲率分布的规律.

关键词: 有理 Bézier 曲线; SPS 参数化; 升阶; 曲率

中图分类号: O183.1

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2016) 01-0059-05

几何造型中的曲线通常通过隐式形式、参数形式或离散化方法(如割角、补角等)来表示, 其中曲线的参数形式表示是使用最广的. 参数的选择不同, 曲线的表示形式往往也不相同, 因此对曲线参数的适当选择非常重要. 对于由曲线轨迹决定的几何参数, 已经有不少学者对其进行了深入和广泛的研究. 例如 Sharpe 等^[1]研究的弧长(arc-length)参数, Farin 研究的弦长(chord length)^[2-3]参数以及沈婉蕾研究的 SPS(Scalar Projection Scale)参数. 沈婉蕾给出了有理 Bézier 曲线是 SPS 参数化的充要条件, 并且研究了其所具有的一些性质^[4]. 本文将进一步研究 SPS 参数化有理 Bézier 曲线的若干几何性质.

二次有理 Bézier 曲线通常也被称作圆锥曲线, 由于其良好的性质, 在工业产品设计等领域中得到了广泛的应用^[3]. 在 CAD 中, 1 条圆弧曲线可以用二次有理 Bézier 曲线来表示, 却不能用任何多项式 Bézier 曲线来精确表示. 因此, 一些已经发表的关于二次有理 Bézier 曲线的文章考虑了在曲率连续下的插值问题^[5], 以及用多项式去逼近圆弧的问题^[6].

对于平面曲线而言, 曲率是曲线的内蕴几何量, 是曲线非常重要的几何特征之一. 曲线的曲率单调性是指其曲率单调增大或单调减少的性质,

与曲线的光顺性密切相关, 它是计算机辅助几何设计与图形学中的重要内容, 开展曲率单调性方面的研究, 有利于进一步认识曲线的性质.

Sapidis 等^[7]描述了二次多项式 Bézier 曲线曲率单调的充分必要条件. Frey 等^[8]、Katsuyuki 等^[9]以及王玉林等^[10]采用对二次有理 Bézier 曲线的曲率求导的方法, 来研究曲率的单调性. Ahn 等^[11]则是利用圆锥曲线的对称性去探讨其曲率的变化情况, 并刻画出了相应的图形来描述所得到的结果以便于进一步理解. 借鉴上述研究方法, 本文分析研究了 SPS 参数化二次有理 Bézier 曲线的曲率单调性.

1 预备知识

设 $R(t)(a \leq t \leq b, R(a) \neq R(b))$ 是 1 条开的参数曲线. 如图 1 所示, $\bar{R}(t)$ 是过点 $R(t)$ 垂直于直线 $R(a)R(b)$ 的垂足, 那么向量 $R(a)R(t)$ 在向量 $R(a)R(b)$ 上的 SP(Scalar Projection)为:

$$SP_{R(a)R(b)}(R(t)) = \frac{\|R(a)R(t)\| \cos \theta}{\|R(a)R(b)\|} = \text{sign} \left\| \frac{R(a)R(t)}{R(a)R(b)} \right\|, \quad (1)$$

式中, $\|a\|$ 表示向量 a 的模, θ 表示向量 $R(a)R(t)$ 与向量 $R(a)R(b)$ 的夹角, $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ 时 sign 为 1, 否则为 -1. 从而我们可以定义 SPS 参数化.

定义 1 对参数曲线 $R(t)(a \leq t \leq b, R(a) \neq R(b))$

收稿日期: 2014-09-22.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journallg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(11101230, 11371209); 浙江省自然科学基金(LY13A010013); 宁波大学学科项目(XKL11D2051).

第一作者: 朱如媛(1988-), 女, 江西萍乡人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 计算几何. E-mail: zhuruyuan1214@qq.com

*通信作者: 徐晨东(1977-), 男, 浙江慈溪人, 副教授, 主要研究方向: 计算机辅助几何设计及计算几何. E-mail: xuchendong@nbu.edu.cn

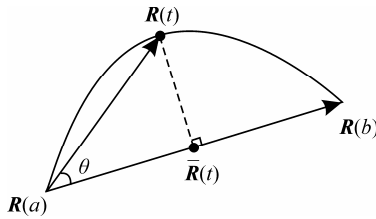


图1 关于 SP 和 SPS 的定义

上的点 $R(t)$, 令:

$$\text{SPS}(R(t)) = \frac{\text{SP}_{R(a)R(b)}(R(t))}{\|R(a)R(b)\|} = \frac{\text{sign} \frac{\|R(t) - R(a)\|}{\|R(b) - R(a)\|}}{\|R(a)R(b)\|}. \quad (2)$$

如果对任意的 $t \in [a, b]$ 都存在 $t = \text{SPS}(R(t))$, 则称曲线 $R(t)$ 是 SPS 参数化的.

n 次有理 Bézier 曲线的表达式为:

$$R(t) = \frac{\sum_{i=0}^n B_i^n(t) w_i Q_i}{\sum_{i=0}^n B_i^n(t) w_i}, \quad (3)$$

式中, $Q_i \in \mathbb{R}^2 / \mathbb{R}^3$ 为控制顶点, w_i 为权重, $B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i$, $t \in [0, 1]$ 为 Bernstein 多项式. 现考虑 $R(t)$ 是 1 条开的曲线, 即:

$$R(0) = Q_0, R(1) = Q_n, Q_0 \neq Q_n. \quad (4)$$

那么 $R(t)$ 是 SPS 参数化的当且仅当 $t \in [0, 1]$, 且存在:

$$t = \text{SPS}(R(t)) = \text{sign} \frac{\|R(t) - Q_0\|}{\|Q_n - Q_0\|}. \quad (5)$$

定理 1^[4] 形如(3)式的开的有理 Bézier 曲线是 SPS 参数化, 当且仅当下式成立:

$$(n-i)w_{i+1}(Q_0 Q_{i+1} \cdot Q_0 Q_n) = (i+1)w_i(Q_i Q_n \cdot Q_0 Q_n), \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (6)$$

2 SPS 参数化有理 Bézier 曲线的性质

当有理 Bézier 曲线所有的权值都相等时, 其就退化为一般的 Bézier 曲线.

定理 2 n 次开的 Bézier 曲线是 SPS 参数化的充要条件为:

$$(n-i)(Q_0 Q_{i+1} \cdot Q_0 Q_n) = (i+1)(Q_i Q_n \cdot Q_0 Q_n), \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (7)$$

性质 1 一条开的 SPS 参数化的 Bézier 曲线必有 $\|\bar{Q}_i \bar{Q}_{i-1}\| = \|\bar{Q}_i \bar{Q}_0\|$, $i = 1, 2, \dots, n$, 其中, $\bar{Q}_i$ 表示点

Q_i 在直线 $Q_0 Q_n$ 上的投影.

证明 因为 Bézier 曲线具有几何不变性和仿射不变性, 所以可设 2 个端点坐标分别为 $Q_0(0, 0)$ 和 $Q_n(a_n, 0)$, 其余控制顶点坐标为 $Q_i(a_i, b_i)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. 则只需要证明 $a_i = i a_1$. 由假设, (7)式可写为 $(n-i)a_{i+1} = (i+1)a_n - (i+1)a_i$, 因此用数学归纳法很容易得出结论.

2.1 SPS 参数化有理 Bézier 曲线升阶不变性

性质 2 n 次 SPS 参数化有理 Bézier 曲线, 升阶后仍是 SPS 参数化的.

若 n 次有理 Bézier 曲线 $R(t)$ 是 SPS 参数化的, 由定理 1 可知其满足(6)式. 利用有理 Bezier 曲线的 de Casteljau 算法, $R(t)$ 升一阶后表达式记为 $R^*(t)$,

$$R^*(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n+1} B_i^{n+1}(t) w_i^* Q_i^*}{\sum_{i=0}^{n+1} B_i^{n+1}(t) w_i^*},$$

$w_i^* = i w_{i-1} / (n+1) + (1-i) / (n+1) w_i$ 表示升阶之后的权值, $Q_i^* = (i w_i Q_{i-1} / (n+1) + (1-i) / (n+1) w_i Q_i) / w_i^*$ 表示升阶之后的控制顶点的坐标. 要证明 $R^*(t)$ 仍为 SPS 参数化的, 只需证明下式成立即可.

$$(n+1-i)w_{i+1}^*(Q_0^* Q_{i+1}^* \cdot Q_0^* Q_{n+1}^*) = (i+1)w_i^* \cdot (Q_i^* Q_{n+1}^* \cdot Q_0^* Q_{n+1}^*), i = 0, 1, \dots, n. \quad (8)$$

证明 (8)式左边 =

$$\begin{aligned} (n+1-i)w_{i+1}^*(Q_0 Q_{i+1} \cdot Q_0 Q_n) &= \\ (n+1-i)w_{i+1}^* \cdot (Q_0 (\frac{i+1}{n+1} w_i Q_i + \frac{n+1-i}{n+1} w_{i+1} Q_{i+1}) / w_{i+1}^* \cdot Q_0 Q_n) &= \\ (n+1-i)w_{i+1}^* [(\frac{i+1}{n+1} w_i Q_i + \frac{n+1-i}{n+1} w_{i+1} Q_{i+1}) / w_{i+1}^* - Q_0] \cdot Q_0 Q_n &= \\ (n+1-i)w_{i+1}^* ((\frac{i+1}{n+1} w_i Q_i + \frac{n-i}{n+1} w_{i+1} Q_{i+1} - \frac{i+1}{n+1} w_i Q_0 - \frac{n-i}{n+1} w_{i+1} Q_0) \cdot Q_0 Q_n) &= \\ (n+1-i) \frac{i+1}{n+1} w_i (Q_0 Q_i \cdot Q_0 Q_n) + (n+1-i) \frac{n-i}{n+1} w_{i+1} (Q_0 Q_{i+1} \cdot Q_0 Q_n). \end{aligned}$$

(8)式右边 =

$$\begin{aligned} (i+1)w_i^*(Q_i^* Q_{n+1}^* \cdot Q_0^* Q_{n+1}^*) &= \\ (i+1)w_i^*(Q_i^* Q_n \cdot Q_0 Q_n) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (i+1)w_i^* \left(\left(\frac{i}{n+1} w_{i-1}^* Q_{i-1} + \frac{n+1-i}{n+1} \right. \right. \\
& \left. \left. w_i^* Q_i \right) / w_i^* \cdot Q_n \cdot Q_0 Q_n \right) = \\
& (i+1) \left(\left(\frac{i}{n+1} w_{i-1}^* \cdot Q_{i-1} Q_n + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{n-i+1}{n+1} w_i^* Q_i Q_n \right) \cdot Q_0 Q_n \right) = \\
& \frac{(i+1)i}{n+1} w_{i-1}^* (Q_{i-1} Q_n \cdot Q_0 Q_n) + \\
& \frac{(i+1)(n+1-i)}{n+1} w_i^* (Q_i Q_n \cdot Q_0 Q_n).
\end{aligned}$$

由

$$\begin{aligned}
& (n-i)w_{i+1}^* (Q_0 Q_{i+1} \cdot Q_0 Q_n) = \\
& (i+1)w_i^* (Q_i Q_n \cdot Q_0 Q_n).
\end{aligned}$$

右式=

$$\begin{aligned}
& (n+1-i) \frac{i+1}{n+1} w_i^* (Q_0 Q_i \cdot Q_0 Q_n) + (n+1-i) \cdot \\
& \frac{n-i}{n+1} w_{i+1}^* (Q_0 Q_{i+1} \cdot Q_0 Q_n) = \text{左式}.
\end{aligned}$$

所以 SPS 有理 Bézier 曲线升阶后仍是 SPS 的.

2.2 SPS 参数化有理 Bézier 曲线升阶不变性实例

设 3 次 SPS 参数化的有理 Bézier 曲线的控制顶点分别为 $Q_0(-3, -1)$, $Q_1(-2, 2)$, $Q_2(1, 1)$, $Q_3(3, -1)$, 相应的权值为 $w_0 = 1$, $w_1 = 2$, $w_2 = 2.5$, $w_3 = 2.5$. 满足 SPS 参数化的充分必要条件:

$$\begin{aligned}
& (3-i)(Q_0 Q_{i+1} \cdot Q_0 Q_3) = (i+1)w_i(Q_i Q_3 \cdot Q_0 Q_3), \\
& i = 0, 1, 2.
\end{aligned}$$

易验证该曲线升阶后仍为 SPS 参数化的. 图 2 展示了升阶前后 $t = i/10 (i = 0, 1, 2, \dots, 10)$ 处曲线上的点与线段 $Q_0 Q_3$ 十等分点用线段连接后的效果.

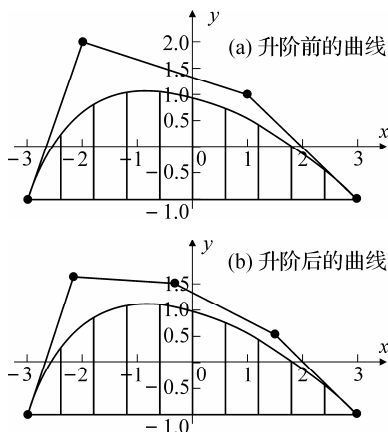


图 2 曲线上 $t = i/10 (i = 0, 1, 2, \dots, 10)$ 处的点与线段 $Q_0 Q_3$ 十等分点用线段连接后的效果

验证如下: 由有理 Bézier 曲线的 de Casteljau 算法, 可以计算出升阶后的控制顶点和权值为 $Q_0^*(-3, 1)$, $Q_1^*(-\frac{15}{7}, \frac{11}{7})$, $Q_2^*(-\frac{1}{3}, \frac{13}{9})$, $Q_3^*(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$, $Q_4^*(3, -1)$, $w_0^* = 1$, $w_1^* = \frac{7}{4}$, $w_2^* = \frac{9}{4}$, $w_3^* = \frac{5}{2}$, $w_4^* = \frac{5}{2}$. 接下来验证是否满足:

$$(4-i)w_{i+1}^*(Q_0^* Q_{i+1}^* \cdot Q_0^* Q_4^*) = (i+1)w_i^*(Q_i^* Q_4^* \cdot Q_0^* Q_4^*).$$

$$i = 0 \text{ 时, 左边} = 4w_1^*(Q_0^* Q_1^* \cdot Q_0^* Q_4^*) = 36,$$

$$\text{右边} = w_0^*(Q_0^* Q_4^* \cdot Q_0^* Q_4^*) = 36,$$

$$i = 1 \text{ 时, 左边} = 3w_2^*(Q_0^* Q_2^* \cdot Q_0^* Q_4^*) = 108,$$

$$\text{右边} = 2w_1^*(Q_1^* Q_4^* \cdot Q_0^* Q_4^*) = 108,$$

$$i = 2 \text{ 时, 左边} = 2w_3^*(Q_0^* Q_3^* \cdot Q_0^* Q_4^*) = 135,$$

$$\text{右边} = 3w_2^*(Q_2^* Q_4^* \cdot Q_0^* Q_4^*) = 135,$$

$$i = 3 \text{ 时, 左边} = w_4^*(Q_0^* Q_4^* \cdot Q_0^* Q_4^*) = 90,$$

$$\text{右边} = 4w_3^*(Q_3^* Q_4^* \cdot Q_0^* Q_4^*) = 90.$$

3 SPS 参数化二次有理 Bézier 曲线曲率单调性

SPS 参数化的二次有理 Bézier 曲线 $R(t)$:

$$R(t) = \frac{w_0 Q_0 (1-t)^2 + 2w_1 Q_1 t(1-t) + w_2 Q_2 t^2}{w_0 (1-t)^2 + 2w_1 t(1-t) + w_2 t^2}, \quad (9)$$

满足(6)式从而有:

$$\begin{cases} 2w_1(Q_0 Q_1 \cdot Q_0 Q_2) = w_0(Q_0 Q_2 \cdot Q_0 Q_2), \\ w_2(Q_0 Q_2 \cdot Q_0 Q_2) = 2w_1(Q_1 Q_2 \cdot Q_0 Q_2). \end{cases} \quad (10)$$

为简化计算, 现假设 3 个控制顶点的坐标分别为 $Q_0(0, 0)$, $Q_1(u, v)$, $Q_2(1, 0)$, 权重分别为 w_0, w_1, w_2 . 由于曲率的单调性与曲线的平移、旋转及缩放比例无关, 因此该简化不会影响结果的一般性. 文中只考虑 $0 < u < 1/2$ 的情况. 由于对于 $1/2 < u < 1$, 只需将控制顶点的顺序颠倒, 即可转化为 $0 < u < 1/2$ 的情况.

由上述假设可得出 $Q_0 Q_1 = (u, v)$, $Q_0 Q_2 = (1, 0)$, $Q_1 Q_2 = (1-u, -v)$ 代入(10)式,

$$w_0 = \frac{2w_1(Q_0 Q_1 \cdot Q_0 Q_2)}{(Q_0 Q_2 \cdot Q_0 Q_2)} = 2w_1 u,$$

$$w_2 = \frac{2w_1(Q_1 Q_2 \cdot Q_0 Q_2)}{(Q_0 Q_2 \cdot Q_0 Q_2)} = 2w_1(1-u).$$

利用 Mathematica 软件计算, 作简化整理后可得曲线(9)式的曲率为:

$$\kappa(t) = \frac{2(-1+u)uv(t+u-2tu)^3}{((t+u-2tu)^4 + (u+t(-t+2(-1+t)u))^2 v^2)^{3/2}}.$$

为便于使用笛卡尔符号法则来判断方程根的个数进而考虑 $\kappa(t)$ 的单调性, 将曲率导数 $\kappa'(t)$ 经

变换 $t = 1/(1+s)$, $0 \leq s < \infty$ 转化为:

$$\kappa'(t) = \frac{6(1+s)^4(1-u)u(1+(-1+s)u)^2 v q_4(s)}{\{r_4(s)\}^{5/2}},$$

$$t = 1/(1+s), 0 \leq s < \infty, \quad (11)$$

其中,

$$r_4(s) = (1+(-1+s)u)^4 + (-1+u+s^2u)^2 v^2,$$

$$q_4(s) = -(-1+2u)(1+(-1+s)u)^4 + (-1+u+s^2u)(-1+(1-s(4+s-4u))u)v^2. \quad (12)$$

令 b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 分别为(12)式中 s^i ($i=0, 1, 2, 3, 4$) 的系数, 即:

$$b_0 = (-1+u)^2 v^2 - (-1+u)^4 (-1+2u),$$

$$b_1 = 4(-1+u)^2 u(1+u(-3+2u)+v^2),$$

$$b_2 = 6(-1+u)^2 u^2(1-2u),$$

$$b_3 = 4(-1+u)u^2(u(-1+2u)+v^2),$$

$$b_4 = u^4(1-2u) - u^2 v^2.$$

由 $0 < u < 1/2$ 可知, b_0, b_2 始终是大于 0 的. 化简可推出:

(i) 若 $b_0 > 0$, 则 $b_1 > 0$: $b_0 = (-1+u)^2 v^2 - (-1+u)^4 (-1+2u)$.
 $(-1+2u) > 0, v^2 + (1-3u+2u^2) > u(2u-1)(u-1) > 0$.
 又 $b_1 = 4(-1+u)^2 u(1+u(-3+2u)+v^2) = 4(-1+u)^2 \cdot u(v^2 + (1-3u+2u^2))$, 所以 $b_1 > 0$;

(ii) 若 $b_4 \geq 0$, 则 $b_3 \geq 0$: $b_4 \geq 0 \Rightarrow u^2(1-2u) - v^2 \geq 0$, 即 $v^2 - u^2 \leq -2u^3$, $u(-1+2u) + v^2 \leq -2u^3 + 3u^2 - u = -u(2u-1)(u-1) \leq 0$, 所以 $b_3 \geq 0$.

综上, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 的取值情况只有 2 种可能, 因此可以给出 SPS 参数化二次有理 Bézier 曲线曲

率单调性的所有情况:

(1) $b_4 \geq 0$ 时, 由上述内容, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 都是大于 0 的. 由笛卡尔符号法则知曲率的导数 $\kappa'(t)$ 恒为正的, 从而曲线的曲率是单调的.

(2) $b_4 < 0$ 时, 由上述内容则 $s^k, 0 \leq k \leq 4$ 的系数的符号按顺序排列为 $(+, +, +, ?, -)$. 根据笛卡尔符号法则可知 $\kappa'(s) = 0$ 有 1 个正根, 其中的 $t = 0, t = 1$ 对应于 $s = \infty, s = 0$. 由于 $b_0 \geq 0$, 所以 $\kappa(t)$ 关于 s 的图像是先递增再递减, 关于 t 的图像是先递减再递增, 从而原曲线的曲率有 1 个极小值.

注 1 当 $u = 1/2$ 时, 代入 $q_4(s)$ 可得 $q_4(s) = (1-s)(1+s)^3 v^2 / 4$, 结合以上内容有(9)式给出的曲线段的曲率有 1 个极小值.

注 2 标准形式下, 一般的二次有理 Bézier 曲线不仅与控制顶点有关, 还与控制顶点的权值有关, 并且其曲率的单调性随着权值和中间控制顶点的变化会出现 4 种不同的情形(详见文献[9]). 但对于 SPS 参数化的二次有理 Bézier 曲线, 利用 SPS 参数化的充要条件在计算过程中权值会被消掉. 因此, SPS 参数化的二次有理 Bézier 曲线曲率单调性的变化只与中间的控制顶点有关. 其曲率变化只出现 2 种情形.

情形 1 曲率单调. 图 3(a)~(c)分别展示了 $u = 0.3, v = 0.1$ 时曲线、曲线曲率以及曲率的导数 3 个图形, 此时, $b_0 = 0.10094, b_4 = 0.00234, w_0 = 1.2, w_1 = 2, w_2 = 2.8$.

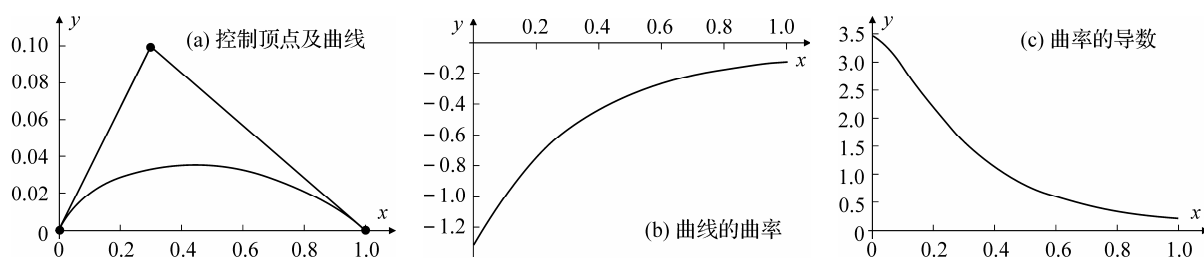


图 3 曲率单调情况

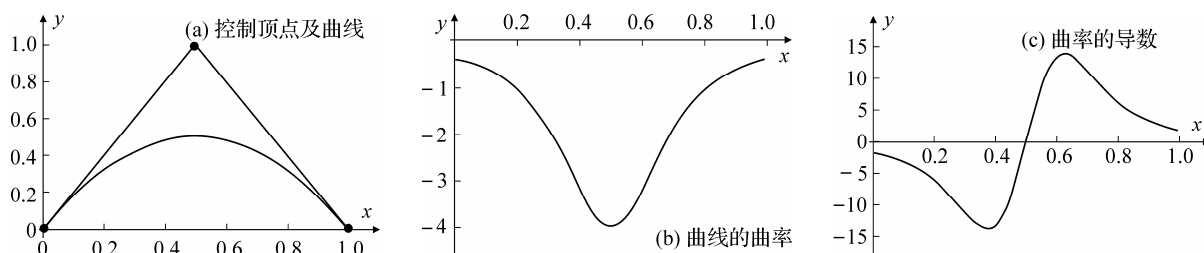


图 4 曲率有极小值情况

情形 2 曲率有极小值. 图 4(a)~(c)分别展示了 $u = 0.5, v = 1$ 时曲线、曲线曲率以及曲率的导数 3 个图形. 此时, $b_0 = 0.25, b_4 = -0.25, w_0 = 2, w_1 = 2, w_2 = 2$.

4 总结

主要介绍了 SPS 参数化有理 Bézier 曲线的一些几何性质. SPS 参数化 Bézier 曲线的控制顶点分布具有很直观的几何性质, 且证明了 SPS 参数化有理 Bézier 曲线升阶之后仍是 SPS 参数化的, 并给出了计算实例. 然后给出了 SPS 参数化二次有理 Bézier 曲线的曲率变化规律, 这些几何性质对于 SPS 参数化曲线在几何造型中的应用有一定的指导意义.

参考文献:

- [1] SHARPE R J, THORNE R W. Numerical method for extracting an arc length parameterization from parametric curves[J]. Computer Aided Design, 1982, 14(2):79-81.
- [2] FARIN G. Curves and surfaces for computer aided geometric design[M]. 4th ed. San Diego: Academic Press, 1997:215-219.
- [3] FARIN G. Rational quadratic circles are parametrized by chord length[J]. Computer Aided Geometric Design, 2006, 23(9):722-724.
- [4] SHEN W Q, WANG G Z, GAO C F. Scalar projection scale parameter for rational Bézier curves[R]. GDC2013 Report of the Conference, 2005.
- [5] FARIN G. Curvature continuity and offsets for piecewise conics [J]. ACM Trans. Graph., 1989, 8(2):89-99.
- [6] AHN Y J, KIM H O. Approximation of circular arcs by Bézier curves[J]. Computational and Applied Mathematics, 1997, 81(1):145-163.
- [7] SAPIDIS N, FREY N. Controlling the curvature of a quadratic Bézier curve[J]. Computer Aided Geometric Design, 1992, 9(2):85-91.
- [8] FREY W H, FIELD D A. Designing Bézier conic segments with monotone curvature[J]. Computer Aided Geometric Design, 2000, 17(6):457-483.
- [9] SUENAGA K, SAKAI M. On curvatures of rational quadratic Bézier segments[J]. Rep Fac Sci, 1999, 32:15-20.
- [10] 王玉林, 汪叔淳, 李迪, 等. 二次有理 Bézier 曲线单调条件的研究[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2000, 12(7):507-511.
- [11] AHN Y J, KIM H O. Curvatures of the quadratic rational Bézier curves[J]. Computers Math. Applic, 1998, 36(9): 71-83.

Geometric Properties of Rational Bézier Curves with SPS Parameter

ZHU Ru-yuan, XU Chen-dong *

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: Rational Bézier curves with SPS (scalar projection scale) parameterization are useful in geometric molding. In order to study their geometric properties, the following three steps are carried out. In the first step, we note that, when a rational Bézier curve degenerates into Bézier curve, it will present an intuitive geometric character. In the second step, we demonstrate that a rational Bézier curve with SPS parameterization is still SPS parameterized after degree elevation. Finally, by Descartes' rule of signs, the monotonicity of curvature is discussed for a rational quadratic Bézier curve parameterized by SPS in a bid to obtain the curvature distribution.

Key words: rational Bézier curves; SPS parameterization; degree elevation; curvature

(责任编辑 章践立)