

修正的 Kadomtsev-Petviashvili 方程的对称和守恒律

王美玲^{1,3}, 楼森岳^{1,2*}, 俞 军³

(1. 宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211; 2. 华东师范大学 上海市高可信计算重点实验室, 上海 200062;
3. 绍兴文理学院 数理信息学院, 浙江 绍兴 312000)

摘要: 修正 Kadomtsev-Petviashvili (MKP) 方程是非线性偏微分方程和物理学中的一个重要模型. 最近楼森岳教授指出从可积系统的一个点李对称出发, 可以得到无穷多的守恒律. 应用楼教授的思想, 首先研究 MKP 方程的经典的李点对称, 然后根据二阶延拓结构(Lie-Bäcklund 算子), 构造 MKP 方程的无穷多守恒律.

关键词: 修正 Kadomtsev-Petviashvili 方程; Kac-Moody-Virasoro 对称代数; 无穷多守恒律

中图分类号: O29

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2016) 01-0053-06

对称和守恒律在物理、数学和其他科学研究领域里起着举足轻重的作用. 利用对称性和守恒律可以简化各种各样复杂的非线性问题, 能给很多难以解决的问题提供一些显式的严格解, 同时为数值研究工作提供检验数值方法有效性的范例. 特别是在可积系统领域, 由于无穷多对称和守恒的存在, 使得对称性和守恒律的研究显得尤为重要. 比如说, Korteweg-de Vries (KdV) 方程的对称和守恒律的构造是求解非线性演化方程的开端^[1], 后续有 Miura 变换、Lax 对、反散射法、双线性结构等. 无穷多守恒律的存在是证明方程的可积性的强有力证据, 对于一个具有无穷多自由度的非线性系统, 如果它具有无穷多的对称性和守恒律, 则该系统是在具有无穷多守恒律意义下的可积系统. 为了寻找非线性系统的对称和守恒律, 科学家们建立了很多有效的方法. Noether 从对称中推导出守恒量, 并建立了对称和守恒律之间的联系^[2]; 很多作者利用给定偏微分系统的对称, 由已知的守恒律构造新的守恒律^[3-4]; 也有作者通过 Lax 对的方法去构造方程的守恒律^[5]. 最近, 楼森岳教授等发现几乎所有已知的(2+1)维的可积系统都具有 Kac-Moody-Virasoro (KMV) 对称代数^[6-7].

本文主要研究修正的 Kadomtsev-Petviashvili (MKP) 方程的新的对称和守恒律. MKP 方程是非线性物理的一个重要模型, 它与 KP 方程通过 Miura 变换相联系. 很多人已经研究了修正的 KP 方程的不同性质, 如双线性形式、孤子的相互作用、约化和新的精确解等^[8-10]. 本文利用标准的经典李点对称方法, 先求解 MKP 方程的无穷多点对称; 然后利用楼教授等建立的方法, 从二阶延拓结构出发, 求得与 MKP 的李点对称对应的无穷多守恒律.

1 修正的 KP 方程的李点对称和 KMV 结构

MKP 方程可以写为^[11-14]

$$v_t + v_{xxx} - v^2 v_x - 6v_x \partial_x^{-1} v_y + 3\partial_x^{-1} v_{yy} = 0, \quad (1)$$

其中:

$$v = v(x, y, t), \partial^{-1} \partial = \partial \partial^{-1} = 1, \partial = \frac{\partial}{\partial x}.$$

令 $v = u_x$, 得到修正 KP 方程的新形式

$$u_{xt} + u_{xxx} - 6u_x u_{xx} - 6u_{xx} u_y + 3u_{yy} = 0. \quad (2)$$

为研究方程(2)的对称, 从李点对称变换的矢量形式着手

$$V = X \frac{\partial}{\partial x} + Y \frac{\partial}{\partial y} + T \frac{\partial}{\partial t} - U \frac{\partial}{\partial u}, \quad (3)$$

收稿日期: 2015-03-02.

宁波大学学报(理工版) 网址: <http://journalg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(11435005, 11175092).

第一作者: 王美玲(1990-), 女, 浙江临海人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 非线性物理. E-mail: 330718066@qq.com

*通信作者: 楼森岳(1957-), 男, 浙江余姚人, 教授, 主要研究方向: 量子场论、粒子物理和非线性物理. E-mail: lousenyue@nbu.edu.cn

式中: X, Y, T 和 U 是关于 (x, y, t, u) 的任意函数.

(3)式要求方程(2)在变化

$$\{x, y, t, u\} \rightarrow \{x + \varepsilon X, y + \varepsilon Y, t + \varepsilon T, u + \varepsilon U\},$$

下仍保持不变. 其中 ε 是无穷小变量. 与(3)式等价, 方程(2)的李对称的函数形式为:

$$\sigma = Xu_x + Yu_y + Tu_t - U, \quad (4)$$

其中: σ 是方程(2)的线性化方程的解.

将 $u = u + \varepsilon \sigma$ 以及方程(4)代入方程(2), 可以得到:

$$X(x, y, t, u) = \frac{1}{3}T_t x - \frac{1}{18}T_{tt}y - \frac{1}{6}X_t y + Z_1, \quad (5)$$

$$Y(x, y, t, u) = \frac{2}{3}T_t y + X, \quad (6)$$

$$T(x, y, t, u) = T, \quad (7)$$

$$U(x, y, t, u) = -\frac{1}{324}T_{ttt}y^3 + \frac{1}{18}xT_{tt}y - \frac{1}{72}X_{tt}y^2 + \frac{1}{12}xX_t + \frac{1}{6}Z_{tt}y - Z_2, \quad (8)$$

其中: X, T, Z_1 和 Z_2 是关于 t 的任意函数. 所以方程(2)的李点对称矢量形式为:

$$V = \left(-\frac{1}{324}T_{ttt}y^3 + \frac{1}{18}xT_{tt}y - \frac{1}{72}X_{tt}y^2 + \frac{1}{12}xX_t + \frac{1}{6}Z_{tt}y - Z_2\right)\frac{\partial}{\partial u} + \left(\frac{2}{3}T_t y + X\right)\frac{\partial}{\partial y} + T\frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{1}{3}T_t x - \frac{1}{18}T_{tt}y^2 - \frac{1}{6}X_t y + Z_1\right)\frac{\partial}{\partial x} = V_3(T) + V_2(X) + V_1(Z_1) - V_0(Z_2), \quad (9)$$

$$V_3(T) = T\frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{2}{3}T_t y + X\right)\frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{1}{3}T_t x - \frac{1}{18}T_{tt}y^2\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{1}{18}T_{ttt}y^3 - \frac{1}{324}T_{ttt}y^3\right)\frac{\partial}{\partial u},$$

$$V_2(X) = X\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{6}X_t y\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{1}{12}xX_t - \frac{1}{72}X_{tt}y^2\right)\frac{\partial}{\partial u},$$

$$V_1(Z_1) = Z_1\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{6}Z_{tt}y\frac{\partial}{\partial u},$$

$$V_0(Z_2) = Z_2\frac{\partial}{\partial u}.$$

容易证明, 对称 $V_3(T), V_2(X), V_1(Z_1), V_0(Z_2)$ 构成下述 Kac-Moody-Virasoro (KMV)代数:

$$[V_i(f_1), V_j(f_2)] = a_{ij}V_{i+j-3}(if_1f_{2t} - jf_2f_{1t}),$$

其中:

$$a_{ij} = 0, i + j < 3,$$

$$a_{03} = 1, a_{12} = \frac{1}{12}, a_{13} = \frac{1}{3},$$

$$a_{22} = -\frac{1}{12}, a_{23} = \frac{1}{3}, a_{33} = \frac{1}{3}.$$

2 MKP 方程的守恒律

利用前面的 KMV 代数, 即可得到偏微分方程的守恒律. 虽然很多的高维可积系统中存在 KMV 代数, 但到目前为止, 还没有文献介绍如何通过相应的 KMV 代数构造 MKP 方程的守恒律. 本文以 $D_x J_1 + D_y J_2 + D_t \rho = 0$ 形式构造 MKP 方程对应于 KMV 代数的守恒律.

为此, 我们需要计算如下形式的 Lie-Bäcklund 算子:

$$X_0 = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + \zeta_i \frac{\partial}{\partial u_i} + \zeta_{i i_2} \frac{\partial}{\partial u_{i i_2}} + \cdots, \quad (10)$$

式中: ξ^i, η 以及其他的附加系数为:

$$\begin{cases} \zeta_i = D_i(W) + \sum \xi^j u_{ij}, \\ \zeta_{i i_2} = D_{i i_2}(W) + \sum \xi^j u_{j i i_2}, \end{cases} \quad (11)$$

(11)式中的 W 为李特征函数, 表示为:

$$W = \eta - \xi^j u_j, \quad (12)$$

同时 D_i 表示所有导数的和, 即

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i \frac{\partial}{\partial u} + \sum u_{ij} \frac{\partial}{\partial u_j} + \cdots, i=1, 2, \cdots, n, \quad (13)$$

其中

$$x^1 = x, x^2 = y, x^3 = t, u_i = u_{x^i}, \quad (14)$$

以上的定义和结果在文献[15]中有所提及, 而(14)式中所用的重复指标表示求和, 即爱因斯坦求和规则.

二阶 Lie-Bäcklund 算子为:

$$\begin{aligned} X_0 = & \xi^x \frac{\partial}{\partial x} + \xi^y \frac{\partial}{\partial y} + \xi^t \frac{\partial}{\partial t} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + \zeta_x \frac{\partial}{\partial u_x} + \\ & \zeta_y \frac{\partial}{\partial u_y} + \zeta_t \frac{\partial}{\partial u_t} + \zeta_{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \zeta_{xy} \frac{\partial}{\partial u_{xy}} + \\ & \zeta_{xt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \zeta_{yy} \frac{\partial}{\partial u_{yy}} + \zeta_{yt} \frac{\partial}{\partial u_{yt}} + \zeta_{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}}. \end{aligned} \quad (15)$$

通过(10)~(14)式, 可计算(15)式中的附加系数, 从而得到方程(3)的 Lie-Bäcklund 算子的具体形式.

定理 1^[16-17] 假设 X_0 是方程(2)的 Lie-Bäcklund 对称, 那么矢量 $T' = (T_1, T_2, T_3)$ 在 X_0 作用下保持不变, 则

$$X_0(T_i) + \sum_{j=1}^3 T_j D_j \xi_i - \sum_{j=1}^3 T_j D_j (\xi_i) = 0, i=1, 2, 3, \quad (16)$$

式中: $D_1 = D_x, D_2 = D_y, D_3 = D_t$, ξ_i 由(15)式决定.

方程(2)的守恒律可表示为:

$$D_x J_1 + D_y J_2 + D_t \rho = 0, \quad (17)$$

其中: $T_1 = J_1, T_2 = J_2, T_3 = \rho$, 且 J_1, J_2 和 ρ 是关于 $(x, y, t, u, u_x, u_y, \dots, u_{tt})$ 的任意待定函数.

由 T' 和(16)式, 得到 J_1, J_2 和 ρ 具有下述复杂的形式:

$$\rho = f_0(t)K_1(t_1, t_2, t_3, \dots, t_{12}), \quad (18)$$

$$J_2 = (f_1(t)y + f_2(t))K_1(t_1, t_2, t_3, \dots, t_{12}) + f_3(t)K_2(t_1, t_2, t_3, \dots, t_{12}), \quad (19)$$

$$J_1 = (f_4(t)y^2 + f_5(t)y + f_6(t)x + f_7(t))K_3(t_1, t_2, t_3, \dots, t_{12}) + (f_8(t)y + f_9(t))K_2(t_1, t_2, t_3, \dots, t_{12}) + f_{10}(t)K_1(t_1, t_2, t_3, \dots, t_{12}), \quad (20)$$

其中: K_1, K_2 和 K_3 是关于群不变量 $t_1, t_2, t_3, \dots, t_{12}$ 的待定函数, $f_i, i=0, 1, \dots, 10$ 是关于 t 的函数:

$$f_0(t) = T^{-1}, f_1(t) = \frac{2}{3}T_1 T^2, f_2(t) = XT^{-2}, f_3(t) = T^{-4/3}, f_4(t) = -\frac{1}{18}T_{tt} T^{-2}, \quad (21)$$

$$f_5(t) = -\frac{1}{6}XT^{-2} - \frac{5}{18}T_1 XT^{-3}, f_7(t) = Z_1 T^{-2}, f_6(t) = \frac{1}{3}T_1 T^{-2}, \quad (22)$$

$$f_8(t) = -\frac{1}{9}T_1 T^{-7/3}, f_9(t) = -\frac{1}{6}XT^{-7/3}, f_{10}(t) = T^{-5/3}, \quad (23)$$

不变量为:

$$t_1 = T^{-5/3}X - T^{-2/3}y, \quad (24)$$

$$t_2 = T^{-1/3}x + \frac{1}{6}T^{-4/3}Xy + \frac{1}{18}T^{-1/3}T_1 y^2 - \frac{1}{6}Y_{1t}, \quad (25)$$

$$t_3 = T^{-1}(\frac{1}{18}T_1 y + \frac{1}{12}X)x - \frac{1}{324}T^{-2}(TT_{tt} - T_t^2)y^3 -$$

$$\frac{1}{216}T^{-2}(3TX_t - 3T_t X)y^2 + u - \frac{1}{48}Y_{2t} -$$

$$\frac{1}{48}T^{-2}(X^2 + 8TZ_{1t})y^2, \quad (26)$$

$$t_4 = \frac{1}{12}T^{-2/3}X + \frac{1}{18}T^{-2/3}T_1 y + T^{1/3}u_x, \quad (27)$$

$$t_5 = -T^{-1/3}(\frac{1}{9}T_1 y + \frac{1}{6}X)u_x + T^{2/3}u_y - \frac{1}{324}T^{-4/3}(3TT_{tt} - T_t^2)y^2 - \frac{1}{108}T^{-4/3}(3TX_t - T_t X)y +$$

$$\frac{1}{144}T^{-4/3}(X^2 + 24TZ_{1t}) + \frac{1}{18}T^{-1/3}T_1 x, \quad (28)$$

$$t_6 = (\frac{1}{3}T_1 x - \frac{1}{18}T_{tt}y^2 - \frac{1}{6}T^{-1}X_t y + Z_1)u_x + (\frac{2}{3}T_1 y + X)u_y + Tu_t, \quad (29)$$

$t_7 \sim t_{12}$ 在后期计算中可以消去, 故在此没有列出. (29)式中

$$Y_{1t} = T^{-7/3}X^2 + 6T^{-4/3}Z_1, \quad (30)$$

$$Y_{2t} = T^{-3}X^3 + 12T^{-2}XZ_1 + 48T^{-1}Z_2. \quad (31)$$

为了确定 K_1, K_2 和 K_3 , 将(18)~(20)式代入(17)式, 可得:

$$J_{1,x} + J_{1,u}u_x + J_{1,u_x}u_{xx} + J_{1,u_y}u_{xy} + J_{1,u_t}u_{xt} + J_{1,u_{xx}}u_{xxx} + J_{1,u_{xy}}u_{xxy} + J_{1,u_{xt}}u_{xtt} + J_{1,u_{yy}}u_{xyy} + J_{1,u_{yt}}u_{xyt} + J_{1,u_{tt}}u_{xtt} + J_{2,y} + J_{2,u}u_y + J_{2,u_x}u_{xy} + J_{2,u_y}u_{yy} + J_{2,u_t}u_{yt} + J_{2,u_{xx}}u_{xxy} + J_{2,u_{xy}}u_{xyy} + J_{2,u_{xt}}u_{xyt} + J_{2,u_{yy}}u_{yyy} + J_{2,u_{yt}}u_{yyt} + J_{2,u_{tt}}u_{ytt} + \rho_t + \rho_u u_t + \rho_{u_x}u_{xt} + \rho_{u_y}u_{yt} + \rho_{u_{xt}}u_{tt} + \rho_{u_{yy}}u_{yyt} + \rho_{u_{yt}}u_{ytt} + \rho_{u_{tt}}u_{ttt} = 0. \quad (32)$$

为了求解复杂的(32)式, 本文从 K_1, K_2 和 K_3 中 u 的最高阶导数项 $\{u_{xxx}, u_{xxy}, \dots, u_{ttt}\}$ 开始. 由于(32)式必须对任意的 u 成立, 而 J_i 中不包含高阶导数 $\{u_{xxx}, u_{xxy}, \dots, u_{ttt}\}$, 故其相应的各项系数为 0, 由此可以得到许多容易求解的方程. 例如, 方程(32)中 u_{ttt} 的系数为:

$$3T^{5/3}K_{1,t_{12}}u_{ttt}, \quad (33)$$

其中: $K_{i,t_j^n} = \partial^n K_i / \partial t_j^n$. 因没有平凡解使 $K_{1,t_{12}} \neq 0$,

所以唯一的解为:

$$K_{1,t_{12}} = 0, \text{ i.e., } K_1 \equiv K_1(t_1, t_2, t_3, \dots, t_{11}), \quad (34)$$

由(34)式, u_{yit} 的系数为:

$$3T^{7/3}(K_{2,t_{12}} + K_{1,t_{11}}), \quad (35)$$

(35)式唯一的解为:

$$K_2(t_1, t_2, t_3, \dots, t_{12}) = -t_{12}K_{1,t_{11}} + K_{21}(t_1, t_2, t_3, \dots, t_{11}), \quad (36)$$

其中: $K_{21}(t_1, t_2, t_3, \dots, t_{11})$ 是指示变量的待定函数.

依次求解 $u_{xxx}, u_{xxy}, \dots, u_{yyy}$ 的系数为 0, 得到:

$$K_1 = t_{11}(F_4t_7 + G_1) + t_{10}(F_0t_7 + F_5t_9 + F_9) + t_9(F_4t_8 + F_6) + t_8(F_0t_8 + G_3 + F_3 - F_5) + F_7t_7 + G_2, \quad (37)$$

$$K_2 = t_{12}(G_1 + F_4t_7 + F_5t_8) - t_{11}(F_9 + F_0t_7 + F_5t_9) + t_9(G_3 + F_0t_8 + F_4t_9) + t_8F_2 + F_1t_7 + F_{10}, \quad (38)$$

$$K_3 = t_{12}(-F_6 + F_4t_8 + F_5t_{10}) + t_{11}(F_5t_{11} + F_4t_{10} - 2F_4t_9 + F_0t_8 + 2F_6t_8 - 2G_3 - F_3) - F_7t_9 - F_1t_8 - t_{10}(F_2 + F_0t_9), \quad (39)$$

其中14个函数 $F_i (i=0,1,2,\dots,10)$, $G_j (j=1,2,3)$ 满足下列14个方程:

$$F_{0,t_6} - F_{4,t_5} - F_{5,t_4} = 0, \quad (40)$$

$$t_6F_{0,t_3} + F_{1,t_5} - F_{2,t_4} = 0, \quad (41)$$

$$F_{5,t_2} - F_{9,t_6} + G_{1,t_5} + t_4F_{5,t_3} = 0, \quad (42)$$

$$F_{8,t_4} + F_{1,t_1} + t_6F_{7,t_3} + t_5F_{3,t_3} = 0, \quad (43)$$

$$F_{8,t_4} + F_{1,t_1} + t_6F_{7,t_3} + t_5F_{3,t_3} = 0, \quad (44)$$

$$-F_{7,t_6} + F_{6,t_4} + F_{4,t_1} + t_5F_{4,t_3} = 0, \quad (45)$$

$$F_{10,t_5} - F_{2,t_2} + t_6F_{9,t_3} - t_4F_{2,t_3} = 0, \quad (46)$$

$$G_{2,t_6} - F_{6,t_2} - G_{1,t_1} - t_4F_{6,t_3} - t_5G_{1,t_3} = 0, \quad (47)$$

$$F_{0,t_2} + F_{2,t_6} - G_{3,t_5} - F_{9,t_4} - t_6F_{5,t_3} + t_4F_{0,t_3} = 0, \quad (48)$$

$$t_5F_{0,t_3} - t_6F_{4,t_3} - F_{1,t_6} - F_{7,t_5} + F_{3,t_4} + 2G_{3,t_4} + F_{0,t_3} = 0, \quad (49)$$

$$F_{8,t_6} + G_{3,t_1} - F_{7,t_2} + G_{2,t_4} + t_6F_{6,t_3} - t_4F_{7,t_3} + t_5G_{3,t_3} = 0, \quad (50)$$

$$-F_{1,t_2} + F_{10,t_4} + F_{8,t_5} + F_{2,t_1} + t_6F_{3,t_3} - t_4F_{1,t_3} + t_5F_{2,t_3} = 0, \quad (51)$$

$$-t_4F_{4,t_3} - t_5F_{5,t_3} + G_{1,t_4} - F_{3,t_6} - F_{4,t_2} -$$

$$G_{3,t_6} + F_{6,t_5} - F_{5,t_1} = 0, \quad (52)$$

$$-F_{9,t_1} - F_{3,t_2} - 2G_{3,t_2} + G_{2,t_5} + F_{10,t_6} - t_5F_{9,t_3} + t_6G_{1,t_3} - t_4(G_{3,t_3} + F_{3,t_3}) = 0. \quad (53)$$

这些方程是线性系统, 而且可以直接求解, 结果为:

$$\begin{aligned} K_1 = & (-\alpha_{4,t_6t_6t_5}t_8 + \alpha_{1,t_6}t_7 + \alpha_{2,t_6})t_{11} + [\alpha_{4,t_6t_6t_5}t_9 + \\ & \alpha_{4,t_6t_5t_2}]t_{10} + (-\alpha_{1,t_6}t_8 + \alpha_{3,t_6t_6})t_9 + \\ & (\alpha_{1,t_5} - \alpha_{4,t_6t_5t_4} - \beta_{1,t_5t_5})t_8^2 + (-\alpha_{4,t_6t_5t_3}t_5 - \alpha_{1,t_3}t_4 - \\ & \alpha_{1,t_2} + \alpha_{2,t_4} + \beta_{2,t_5} - \alpha_{4,t_6t_5t_1} + \alpha_{3,t_6t_5})t_8 + \\ & [(\alpha_{1,t_3} - \frac{1}{3}\gamma_{2,t_4t_4} + \beta_{1,t_5t_3})t_5 + \beta_{1,t_4t_4}t_4 + \alpha_{1,t_1} + \\ & \beta_{2,t_4} - \beta_{3,t_4t_4} + \beta_{1,t_3} + \beta_{1,t_4t_2} + \beta_{1,t_5t_1} + \alpha_{3,t_6t_4} + \\ & \gamma_{1,t_4t_4}]t_7 + \frac{1}{3}(\gamma_{2,t_3} + 3\beta_{3,t_5t_3} + 3\alpha_{2,t_3} - \gamma_{2,t_4t_2} - \\ & \delta_{2,t_3} - \gamma_{2,t_4t_3}t_4)t_5 + \beta_{1,t_5t_3}t_4^2 + (\gamma_{1,t_4t_3} + \beta_{2,t_3} - \\ & \beta_{3,t_4t_3} + \alpha_{3,t_6t_3} + 2\beta_{1,t_5t_2} + \delta_{1,t_3})t_4 + \alpha_{3,t_6t_2} + \\ & \alpha_{2,t_1} + \beta_{1,t_2t_2} + \beta_{2,t_2} - \beta_{3,t_4t_2} + \beta_{3,t_5t_1} + \\ & \frac{1}{3}\gamma_{2,t_1} - \frac{1}{3}\delta_{2,t_1} + \gamma_{1,t_4t_2} + \delta_{1,t_2} + \theta_1, \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} K_2 = & (-\alpha_{1,t_6}t_7 + \alpha_{4,t_6t_6t_5}t_8 - \alpha_{2,t_6})t_{12} - [\alpha_{4,t_6t_6t_5}t_9 + \\ & (\alpha_{1,t_5} + \alpha_{4,t_6t_5t_4} + \beta_{1,t_5t_5})t_7 + \alpha_{4,t_6t_5t_3}t_4 + \\ & \alpha_{4,t_6t_5t_2} + \beta_{3,t_5t_5} + \alpha_{2,t_5}]t_{11} + \alpha_{1,t_6}t_9^2 + [(\alpha_{1,t_5} + \\ & \alpha_{4,t_6t_5t_4} + \beta_{1,t_5t_5})t_8 + (\alpha_{1,t_3} + \beta_{1,t_5t_3})t_4 - \\ & \alpha_{4,t_6t_6t_3}t_6 - \alpha_{2,t_4} + \alpha_{1,t_2} + \beta_{4,t_6} - \alpha_{4,t_6t_3} + \beta_{1,t_5t_2} + \\ & \alpha_{5,t_6} - \beta_{3,t_5t_4}]t_9 + \alpha_{1,t_5}t_8 + [(-\alpha_{1,t_3} - \alpha_{4,t_6t_4t_3} - \\ & \beta_{1,t_5t_3} + \frac{1}{3}\gamma_{2,t_4t_4})t_6 + \beta_{4,t_4} + \gamma_{1,t_4t_4} + \alpha_{5,t_4}]t_7 + \\ & [(-\alpha_{4,t_6t_3t_3} + \frac{1}{3}\gamma_{2,t_4t_2})t_4 - \alpha_{2,t_3} - \frac{1}{3}\gamma_{2,t_3} + \\ & \frac{1}{3}\gamma_{2,t_4t_2} + \frac{1}{3}\delta_{2,t_3} - \alpha_{4,t_6t_3t_2} - \beta_{3,t_5t_3}]t_6 + \\ & (\alpha_{5,t_3} + \gamma_{3,t_4t_3} + z_{t_3} + \delta_{3,t_3})t_4 + \alpha_{5,t_2} + \\ & \gamma_{3,t_4t_2} + \delta_{3,t_2} + \theta_{2,t_2} + \beta_{4,t_2}, \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} K_3 = & (\alpha_{1,t_6}t_8 - \alpha_{4,t_6t_6t_5}t_{10} - \alpha_{3,t_6t_6})t_{12} + \alpha_{4,t_6t_6t_5}t_{11}^2 + \\ & [-\alpha_{1,t_6}t_9 + (\alpha_{1,t_5} + \alpha_{4,t_6t_5t_4} + \beta_{1,t_5t_5})t_8 + \\ & \alpha_{4,t_6t_5t_3}t_5 - \beta_{1,t_5t_3}t_4 + \alpha_{4,t_6t_6t_3}t_6 - \alpha_{3,t_6t_5} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha_{4,t_6 t_5 t_1} - \beta_{2,t_5} - \beta_{4,t_6} + \alpha_{4,t_6 t_3} - \beta_{1,t_5 t_2} - \alpha_{5,t_6} + \\
& \beta_{3,t_5 t_4}] t_{11} - [(\alpha_{1,t_5} + \alpha_{4,t_6 t_5 t_4} + \beta_{1,t_5 t_5}) t_9 + \\
& [(\frac{1}{3} \gamma_{2,t_4 t_4} - \beta_{1,t_5 t_3} - \alpha_{1,t_3}) t_5 - \beta_{1,t_4 t_3} t_4 - \gamma_{1,t_4 t_4} - \\
& \alpha_{3,t_6 t_4} - \beta_{1,t_3} - \beta_{2,t_4} - \beta_{1,t_5 t_1} + \beta_{3,t_4 t_4} - \beta_{1,t_4 t_2} - \\
& \alpha_{1,t_1}] t_9 + [(\alpha_{1,t_3} - \frac{1}{3} \gamma_{2,t_4 t_4} + \alpha_{4,t_6 t_4 t_3} + \\
& \beta_{1,t_5 t_3}) t_6 - \alpha_{5,t_4} - \gamma_{3,t_4 t_4} - \beta_{4,t_4}] t_8 + (-\beta_{1,t_3 t_3} t_4 + \\
& \alpha_{4,t_6 t_3 t_3} t_5 + \beta_{3,t_4 t_3} - \alpha_{3,t_6 t_3} - \frac{1}{3} \gamma_{2,t_4 t_1} - \gamma_{1,t_4 t_3} - \\
& \delta_{1,t_3} - \beta_{2,t_3} - \beta_{1,t_3 t_2} + \alpha_{4,t_6 t_3 t_1}) t_6 - (\alpha_{5,t_3} + \\
& \gamma_{3,t_4 t_3} - \beta_{4,t_3} - \delta_{3,t_3}) t_5 + K_1 - \gamma_{3,t_4 t_1} - \\
& \delta_{3,t_1} - \theta_{2,t_1} - \alpha_{5,t_1} - \beta_{4,t_1}, \quad (56)
\end{aligned}$$

其中: $\alpha_i (i=1,2,\dots,5)$ 是关于 $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ 的任意函数, $\beta_i (i=1,2,3)$ 是关于 t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 的任意函数, β_4 是关于 t_1, t_2, t_3, t_4, t_6 的任意函数, $\gamma_i (i=1,2,3)$ 是关于 t_1, t_2, t_3, t_4 的任意函数, $\delta_i (i=1,2,3)$ 是关于 t_1, t_2, t_3 的任意函数, $\theta_i (i=1,2)$ 是关于 t_1, t_2 的任意函数, K_1 是关于 t_1 的任意函数.

将(54)~(56)式代入(18)~(20)式即可得到与对称(9)式相应的守恒律, 即 (J_1, J_2, ρ) 满足(16)式.

特别地, 守恒密度 $\rho = T^{-1} K_1$ 中, 除了对称中包含的 4 个时间 t 的一维任意函数外, 又包含了 $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ 4 个 6 维的群不变量 $t_1, \dots, t_6$ 的任意函数, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 3 个 5 维群不变量 $t_1, \dots, t_5$ 的任意函数, γ_1, γ_2 2 个 4 维群不变量 $t_1, \dots, t_4$ 的任意函数, δ_1 一个 3 维群不变量 $t_1, \dots, t_3$ 的任意函数和 θ_1 一个 2 维群不变量 t_1, t_2 的任意函数.

3 结语

利用 MKP 方程的 KMV 对称群的二阶 Lie-Bäcklund 算子构造出相应的无穷多守恒律. 特别需要强调的是, 我们的结果与传统的观点不同. 传统的观点认为一个对称与一个守恒律相关. 然而, 本文的结果是: 从一个对称出发, 可以得到无穷多的守恒律. 具体体现在对应于我们的一个对称(9)的任意固定的 $\{X, T, Z_1, Z_2\}$, 仍然可以得到具有大量新任意函数的无穷多守恒律, 如 5 个 6 维的任意函数 $\alpha_i (i=1,2,\dots,5)$! 如此之多的任意函数包含于

守恒密度之中体现了非线性系统中守恒律的丰富性. 如果我们进一步考虑 KMV 对称(9)的 3 阶延拓结构, 进行本文中类似的计算可以发现大量的 12 维群不变量 $t_1, \dots, t_{12}$ 的任意函数. 随着延拓结构阶数的提高, 任意函数的维数将指数增长. 因此本文仅仅以二阶延拓结构为出发点来揭示 MKP 方程的对称的丰富性. 要完全揭示更为丰富的、更高阶的守恒律, 需要结合本文的研究方法和活动标架、群不变算子等其他理论, 开展进一步的深入研究.

参考文献:

- [1] NEWELL A C. The history of the soliton[J]. J Appl Mech, 1983, 50(4b):1127-1138.
- [2] GRAY J. Invariance and conservation laws in the XXth century, with a translation of the original article, "Invariante Variationsprobleme"[J]. Historia Mathematica, 2008, 35(3):252-253.
- [3] KARA A H, MAHOMED F M. A basis of conservation laws for partial differential equations[J]. J Nonlinear Math Phys, 2002, 2(9):60-72.
- [4] KHAMITOVA R. On a basis of conservation laws of mechanics equations[J]. Dokl Acad Nauk SSSR, 1979, 248(4):798-802.
- [5] WADATI M, SANUKI H, KONNO K. Relationships among inverse method, Bäcklund transformation and infinite number of conservation laws[J]. Prog Theo Phys, 1975, 53(2):419-436.
- [6] LOU S Y, JIA M, TANG X Y. Kac-Moody-Virasoro Symmetries and related conservation laws[C]//Wen Xiu ma, Xing Biaohu, Qing Pingliu. New York: AIP Conference Proceedings, 2010:136-145.
- [7] JIA M, GAO Y, LOU S Y. Conservation laws of equation family with same Kac-Moody-Virasoro symmetry[J]. Phys Lett A, 2010, 374(15/16):1704-1711.
- [8] WU H X, ZENG Y B. A new extended dispersionless mKP hierarchy and hodograph solution[J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2012, 17(7):2766-2775.
- [9] JIANG Y, TIAN B, WANG P. Bilinear form and soliton interactions for the modified Kadomtsev-Petviashvili equation in fluid dynamics and plasma physics[J]. Nonlinear Dyn, 2013, 73(3):1343-1352.
- [10] NAZ R, ALI Z, NAEEM I. Reductions and new exact solutions of ZK, gardner KP, and modified KP equations via generalized double reduction theorem[J]. Hindawi Publishing Corporation, 2013, 2013(1):1-11.

- [11] SUN Z Y, GAO Y T, XIN Y. Inelastic interactions of the multiple-front waves for the modified Kadomtsev-Petviasvili equation in fluid dynamics, plasma physics and electrodynamics[J]. Wave Motion, 2009, 46(8):511-521.
- [12] MULASE M. Solvability of the super KP equation and a generalization of the Birkhoff decomposition[J]. Inventiones Mathematicae, 1988, 92(1):1-46.
- [13] ABLOWITZ M, CLARKSON P A. Solitons nonlinear evolution equations and inverse scattering[M]. New York: Cambridge University Press, 1991:221-225.
- [14] CLARKSON P A. The Painlevé property, a modified Boussinesq equation and a modified Kadomtsev-Petviasvili equation[J]. Phys D (Nonlinear Phenomena), 1986, 19(3):447-450.
- [15] IBRAGIMOV N H, KARA A H, MAHOMED F M. Lie-Bäcklund and Noether symmetries with applications [J]. Nonlinear Dynamics, 1998, 15(2):115-136.
- [16] KARA A H, KHALIQUE C M. Conservation laws and associated symmetries for some classes of soil water motion equations[J]. Int J Non-Linear Mech, 2001, 36(7): 1041-1045.
- [17] KARA A H, MAHOMED F M. Relationship between symmetries and conservation laws[J]. Int J Theor Phys, 2000, 39(1):23-40.

Symmetries and Conservation Laws of Modified Kadomtsev-Petviasvili Equation

WANG Mei-ling^{1,3}, LOU Sen-yue^{1,2*}, YU Jun³

(1.Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China;

2.Shanghai Key Laboratory of Trustworthy Computing, East China Normal University, Shanghai 200062, China;

3.Department of Physics, Shaoxing University, Shaoxing 312000, China)

Abstract: The modified Kadomtsev-Petviasvili (MKP) equation serves as an important model in physics and nonlinear partial differential equations. Recently, Prof. Lou proposed that we could obtain infinite number of conservation laws of an integrable system from its Lie point symmetry. Applying the idea proposed by Prof. Lou, we first study the classical Lie point symmetry of MKP equation, then the conservation laws of MKP equation is constructed using the second-order Lie-Bäcklund operator.

Key words: KMPV symmetry; modified KP equation; conservation laws

(责任编辑 史小丽)