

g -轮换矩阵的逆阵和广义逆阵的快速算法

张荣娥

(宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 利用多项式最大公因式的初等变换求法, 给出了 n 阶非奇异 g -轮换矩阵逆阵的一种快速算法, 同时对该算法作适当改进, 得到了 n 阶奇异 g -轮换矩阵广义 $\{1, 2\}$ 逆的一种求法, 并结合数值例子给出了该算法的应用.

关键词: 循环矩阵; g -轮换矩阵; 非奇异矩阵; 初等变换; 算法

中图分类号: O151.2

文献标识码: A

文章编号: 1001-5132 (2012) 04-0059-05

1 引言和概念

循环矩阵在矩阵计算中有着重要的应用. 随着应用和研究的不断深入, 循环矩阵得以不断地拓广, 诸如 r -循环矩阵、 g -循环矩阵、对角因子循环矩阵、分块循环矩阵等, 并且它们广泛应用于数学、物理和计算机科学中, 比如在信号和数字图像处理、编码理论、动力系统许多实际问题中, 经常遇到以此类矩阵为系数矩阵的方程组的求解问题, 为了求解这些循环线性系统, 如何求得它们的逆阵和广义逆阵就成了一个重要的研究课题. g -轮换矩阵是循环矩阵的一种推广, 已有较多研究成果^[1-7]. 文献[2]研究了 g -轮换矩阵的结构特征、可逆条件以及逆阵的快速富里叶算法; 文献[6]得出了 n 阶非奇异 g -轮换矩阵的谱分解, 同时研究了 n 阶奇异 g -轮换矩阵的 Jordan 块结构; 文献[7]研究了它的特征值和对角化问题. 笔者将利用多项式矩阵的初等变换方法, 得到 g -轮换矩阵逆阵和广义逆阵的另一种快速算法, 该算法无需计算大量的三角函数, 只用到首行元素进行计算, 可用计算机实现.

以下设 $C^{n \times n}$ 为复数域 C 上所有 n 阶方阵组成的集合.

定义 1^[1] 设矩阵 $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$, 如果其元素满足:

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{j-i}, & j \geq i, \\ a_{n+j-i}, & j < i, \end{cases} \quad i, j = 0, 1, \dots, n-1,$$

那么称 A 为 n 阶循环矩阵, 记为 $A = C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ 为其首行元素.

定义 2^[2] 设矩阵 $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$, 若元素满足:

$$\begin{cases} a_{0j} = a_j, & j = 0, 1, \dots, n-1, \\ a_{ij} = a_{i-j, j-g}, & i = 1, 2, \dots, n-1, \end{cases}$$

其中: g 为非负整数, $j-g$ 转化为模 n 的最小非负剩余, 则称 A 为 n 阶 g -轮换矩阵, 记 $A = C^g(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$.

特别, 当 $g=1$ 时为通常的循环矩阵. 从上述定义可知, g -轮换矩阵是循环矩阵的推广. 它是这样形成的矩阵: 首行元素为 $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, 从第二行起, 每一行元素都是由前一行元素经过从左至右循环地移动 g 个元素.

例如 当 $n=5$, $g=3$, g -轮换矩阵 A 具有如下形式:

$$A = C^3(a_0, a_1, \dots, a_4) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_0 & a_1 \\ a_4 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_0 \\ a_3 & a_4 & a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}.$$

2 几个引理

$$\text{记 } \pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = C(0, 1, 0, \dots, 0),$$

为 n 阶基本循环矩阵, 显然, 有 $\pi^0 = I_n$, $\pi^n = I_n$, 其中 I_n 为 n 阶单位矩阵.

令 $g(x) = x^n - 1$, 则 $g(\pi) = 0$, 即 $g(x)$ 是 π 的最小零化多项式.

设 $\omega = \exp(2\pi i/n)$ 是 n 次本原单位根, 则 $\omega_i = \omega^i, i = 0, 1, \dots, n-1$ 是 $x^n - 1 = 0$ 的 n 个不同的根, 即

$$g(x) = x^n - 1 = (x - \omega_0)(x - \omega_1) \cdots (x - \omega_{n-1}).$$

引理 1^[1] (1) $A = C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ 为 n 阶循环矩阵当且仅当

$$A = f(\pi) = a_0 I + a_1 \pi + \cdots + a_{n-1} \pi^{n-1},$$

其中: $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$ 称为循环矩阵 A 的伴随多项式.

(2) $A = C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ 为 n 阶循环矩阵当且仅当

$$F^{-1} A F = \text{diag}(f(\omega_0), f(\omega_1), \dots, f(\omega_{n-1})),$$

其中: $F = 1/\sqrt{n}(\omega^{(i-1)(j-1)})_{n \times n}$ 是 Fourier 矩阵.

从 g -轮换矩阵的结构特征易得:

引理 2 设 $A = C^g(1, 0, \dots, 0)$ 为 n 阶 g -轮换矩阵, 则 A 非奇异当且仅当 $(n, g) = 1$, 且

$$C^g(1, 0, \dots, 0)^{-1} = C^g(1, 0, \dots, 0)^T.$$

引理 3^[2] 设 $A = C^g(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ 为 n 阶 g -轮换矩阵, 则

$$A = C^g(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) =$$

$$C^g(1, 0, \dots, 0) \times C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}).$$

引理 4 n 阶 g -轮换矩阵 $A = C^g(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ 非奇异的充分必要条件是 $(n, g) = 1$, 且 $C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ 非奇异, 此时

$$C^g(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^{-1} =$$

$$C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^{-1} \times C^g(1, 0, \dots, 0)^T.$$

引理 5^[4] 设 $C[x]$ 是复数域 C 上的一元多项式环, CM 为 C 上全体循环矩阵构成的集合, 则 $CM \cong C[x]/\langle x^n - 1 \rangle$.

引理 6 $A = C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ 为 n 阶非奇异循环矩阵当且仅当 $(f(x), g(x)) = 1$, 其中: $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$, $g(x) = x^n - 1$.

证明 充分性由引理 1 易得.

下证必要性

由引理 5 可知, A 可逆当且仅当 $f(x) + \langle x^n - 1 \rangle \in C[x]/\langle x^n - 1 \rangle$ 是可逆元素, 即存在 $u(x) + \langle x^n - 1 \rangle \in C[x]/\langle x^n - 1 \rangle$, 使得

$$1 + \langle x^n - 1 \rangle = (f(x) + \langle x^n - 1 \rangle)(u(x) +$$

$$\langle x^n - 1 \rangle) = f(x)u(x) + \langle x^n - 1 \rangle,$$

即 $f(x)u(x) - 1 \in \langle x^n - 1 \rangle$, 即存在 $h(x) \in C[x]$, 使得 $f(x)u(x) - 1 = h(x)(x^n - 1)$.

即 $f(x)u(x) + v(x)(x^n - 1) = 1$, 这里 $h(x) = -v(x)$, 所以 $(f(x), g(x)) = 1$.

引理 7^[5] 设多项式矩阵 $\begin{pmatrix} f(x) & 1 & 0 \\ g(x) & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 经初等

行变换化为 $\begin{pmatrix} d(x) & u(x) & v(x) \\ 0 & s(x) & t(x) \end{pmatrix}$, 则

$$(f(x), g(x)) = d(x),$$

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x).$$

3 g -轮换矩阵逆阵和广义逆阵的快速算法

定理 1 设 $A = C^g(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ 为 n 阶非奇异 g -轮换矩阵, $g(x) = x^n - 1$, $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots +$

$a_{n-1} x^{n-1}$, 若多项式矩阵 $\begin{pmatrix} f(x) & 1 & 0 \\ g(x) & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 经初等行变

换化为 $\begin{pmatrix} 1 & u(x) & v(x) \\ 0 & s(x) & t(x) \end{pmatrix}$, 则

$$C^g(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^{-1} = u(\pi) \times C^g(1, 0, \dots, 0)^T.$$

证明 由引理 3 知

$$A = C^g(1, 0, \dots, 0) \times C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}),$$

则 A 非奇异当且仅当 $C^g(1, 0, \dots, 0), C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ 都非奇异, 再由引理 6 得 $(f(x), g(x)) = 1$, 由引理 7

知多项式矩阵 $\begin{pmatrix} f(x) & 1 & 0 \\ g(x) & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 可以经初等行变换化

为 $\begin{pmatrix} 1 & u(x) & v(x) \\ 0 & s(x) & t(x) \end{pmatrix}$, 所以有:

$$\begin{pmatrix} u(x) & v(x) \\ s(x) & t(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 即}$$

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1.$$

令 $x = \pi$, 得 $u(\pi)f(\pi) + v(\pi)g(\pi) = I$, 由引理 1 及 $g(\pi) = 0$ 可得 $u(\pi)C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = I$, 所以 $C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^{-1} = u(\pi)$, 即

$$A^{-1} = [C^g(1, 0, \dots, 0) \times C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})]^{-1} =$$

$$C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^{-1} \times C^g(1, 0, \dots, 0)^{-1} =$$

$$u(\pi) \times C^g(1, 0, \dots, 0)^T.$$

推论 1 设 $A = C^g(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ 为 n 阶非奇异 g -轮换矩阵,

$$C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^{-1} = C(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}),$$

则

$$C^g(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^{-1} = C^g(b_0, b_1, \dots, b_{n-1})^T.$$

证明 因为

$$C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^T = C(a_0, a_{n-1}, \dots, a_1),$$

所以

$$\begin{aligned} C^g(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^{-1} &= \\ C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^{-1} \times C^g(1, 0, \dots, 0)^{-1} &= \\ C(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) \times C^g(1, 0, \dots, 0)^T &= \\ C(b_0, b_1, \dots, b_{n-1})^T \times C^g(1, 0, \dots, 0)^T &= \\ [C^g(1, 0, \dots, 0) \times C(b_0, b_1, \dots, b_{n-1})]^T &= \\ C^g(b_0, b_1, \dots, b_{n-1})^T. \end{aligned}$$

定理2 设 $A = C^g(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ 为 n 阶奇异 g -轮换矩阵, $(n, g) = 1$, $f(x), g(x)$ 同定理1, $(f(x), g(x)) = d(x)$, $g_1(x) = g(x)/d(x)$, 若多项式矩阵

$$\begin{pmatrix} f(x)d(x) & 1 & 0 \\ g_1(x) & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 经初等行变换化为}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & u(x) & v(x) \\ 0 & s(x) & t(x) \end{pmatrix}, \text{ 则}$$

$$A^{(1,2)} = d(\pi)u(\pi) \times C^g(1, 0, \dots, 0)^T.$$

证明 由已知 $(n, g) = 1$, 可得 $C^g(1, 0, \dots, 0)$ 是非奇异阵, 所以 A 奇异当且仅当 $C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ 奇异, 由引理6知 $(f(x), g(x)) = d(x) \neq 1$.

由引理1(2)得 A 的特征值为 $f(\omega_0), f(\omega_1), \dots, f(\omega_{n-1})$, 若 A 奇异, 且假设 A 有 $m(m < n)$ 个非零特征值, 不失一般性 $f(\omega_i) \neq 0, i = 0, 1, \dots, m-1, f(\omega_i) = 0, i = m, m+1, \dots, n-1$, 记

$$g(x) = g_1(x)g_2(x), \quad g_1(x) = \prod_{i=0}^{m-1} (x - \omega_i),$$

$$g_2(x) = \prod_{i=m}^{n-1} (x - \omega_i), \text{ 则}$$

$f(x) = f_1(x)g_2(x)$, 且容易得到 $(f_1(x), g_1(x)) = 1, (f(x), g_1(x)) = 1, (g_1(x), g_2(x)) = 1, d(x) = g_2(x), (f(x), g(x)) = d(x) = g_2(x)$, 从而

$$(f(x)g_2(x), g_1(x)) = 1.$$

若多项式矩阵 $\begin{pmatrix} f(x)d(x) & 1 & 0 \\ g_1(x) & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 经初等行变

换化为 $\begin{pmatrix} 1 & u(x) & v(x) \\ 0 & s(x) & t(x) \end{pmatrix}$, 则由引理7知

$$f(x)d(x)u(x) + g_1(x)v(x) = 1, \quad (1)$$

(1)式两边右乘 $f(x)$, 得

$$f(x)d(x)u(x)f(x) + g_1(x)v(x)f(x) = f(x), \quad (2)$$

令 $x = \pi$, 得

$$f(\pi)d(\pi)u(\pi)f(\pi) + g_1(\pi)v(\pi)f(\pi) = f(\pi).$$

由 $g(\pi) = 0$, 得

$$f(\pi)d(\pi)u(\pi)f(\pi) = f(\pi), \quad (3)$$

(3)式两边左乘 $C^g(1, 0, \dots, 0)$ 得

$$C^g(1, 0, \dots, 0)f(\pi)d(\pi)u(\pi)f(\pi) =$$

$$C^g(1, 0, \dots, 0)f(\pi).$$

由引理1及引理3得

$$Ad(\pi)u(\pi)C^g(1, 0, \dots, 0)^{-1}A = A, \quad (4)$$

(1)式两边再左乘 $d(x)u(x)$, 并令 $x = \pi$, 得

$$d(\pi)u(\pi)f(\pi)d(\pi)u(\pi) = d(\pi)u(\pi), \quad (5)$$

(5)式两边右乘 $C^g(1, 0, \dots, 0)^{-1}$ 得

$$d(\pi)u(\pi)C^g(1, 0, \dots, 0)^{-1}Ad(\pi)u(\pi) \cdot$$

$$C^g(1, 0, \dots, 0)^{-1} =$$

$$d(\pi)u(\pi)C^g(1, 0, \dots, 0)^{-1}, \quad (6)$$

由(4)式和(6)式得

$$A^{(1,2)} = d(\pi)u(\pi)C^g(1, 0, \dots, 0)^{-1},$$

即

$$A^{(1,2)} = d(\pi)u(\pi) \times C^g(1, 0, \dots, 0)^T.$$

由定理1和定理2可得, g -轮换矩阵 $A = C^g(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ 的逆阵和自反逆阵的一种快速算法, 具体步骤为:

Step1 由已知的 g -轮换矩阵 $A = C^g(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$, $(n, g) = 1$, 写出

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}, \quad g(x) = x^n - 1.$$

Step2 对多项式矩阵 $\begin{pmatrix} f(x) & 1 \\ g(x) & 0 \end{pmatrix}$ 经初等行变

换化为 $\begin{pmatrix} d(x) & u(x) \\ 0 & s(x) \end{pmatrix}$.

Step3 若 $d(x) = 1$, 则 A 可逆, 计算 $A^{-1} = u(\pi) \cdot C^g(1, 0, \dots, 0)^T$.

Step4 若 $d(x) \neq 1$, 则 A 不可逆, 计算 $g_1(x) = g(x)/d(x)$.

Step5 对多项式矩阵 $\begin{pmatrix} f(x)d(x) & 1 \\ g_1(x) & 0 \end{pmatrix}$ 经初等

行变换化为 $\begin{pmatrix} 1 & u(x) \\ 0 & s(x) \end{pmatrix}$.

Step6 算出 $A^{(1,2)} = d(\pi)u(\pi)C^g(1, 0, \dots, 0)^T$.

4 例子

例1 设 $A = C^3(3, 2, 1, 1) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 判断

A 是否可逆? 若可逆, 求其逆阵.

解 $n=4, g=3$, 则 $f(x) = 3 + 2x + x^2 + x^3$,
 $g(x) = x^4 - 1$, 对多项式矩阵

$$\begin{pmatrix} f(x) & 1 \\ g(x) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 + x^2 + 2x + 3 & 1 \\ x^4 - 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ 作初等行变}$$

换

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} x^3 + x^2 + 2x + 3 & 1 \\ x^4 - 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-(x)(1)} \\ & \begin{pmatrix} x^3 + x^2 + 2x + 3 & 1 \\ -x^3 - 2x^2 - 3x - 1 & -x \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+(2)} \\ & \begin{pmatrix} -x^2 - x + 2 & 1 - x \\ -x^3 - 2x^2 - 3x - 1 & -x \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-(x)(1)} \\ & \begin{pmatrix} -x^2 - x + 2 & 1 - x \\ -x^2 - 5x - 1 & x^2 - 2x \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)-(2)} \\ & \begin{pmatrix} 4x + 3 & -x^2 + x + 1 \\ -x^2 - 5x - 1 & x^2 - 2x \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} (2)+\frac{1}{4}x(1) \\ (2)-4 \end{smallmatrix}} \\ & \begin{pmatrix} 4x + 3 & -x^2 + x + 1 \\ -17x + 4 & -x^3 + 5x^2 - 7x \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+\frac{4}{17}(2)} \\ & \begin{pmatrix} \frac{35}{17} & -\frac{4}{17}x^3 + \frac{3}{17}x^2 - \frac{11}{17}x + 1 \\ -17x + 4 & -x^3 + 5x^2 - 7x \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{17}{35}(1)} \\ & \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{35}x^3 + \frac{3}{35}x^2 - \frac{11}{35}x + \frac{17}{35} \\ -17x + 4 & -x^3 + 5x^2 - 7x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由 $d(x)=1$ 得 A 可逆, 且

$$u(x) = -\frac{1}{35}(4x^3 - 3x^2 + 11x - 17),$$

所以

$$\begin{aligned} A^{-1} &= u(\pi) \times C^3(1, 0, 0, 0)^T = \\ & -\frac{1}{35} \begin{pmatrix} -17 & 11 & -3 & 4 \\ 4 & -17 & 11 & -3 \\ -3 & 4 & -17 & 11 \\ 11 & -3 & 4 & -17 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{35} \begin{pmatrix} -17 & 4 & -3 & 11 \\ 4 & -3 & 11 & -17 \\ -3 & 11 & -17 & 4 \\ 11 & -17 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

例2 判断 $A = C^3(3, 3, 2, 2) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ 的

奇异性, 若非奇异, 求其逆阵. 若奇异, 求 $A^{(1,2)}$.

解 Step1 $n=4, g=3$, 则

$$f(x) = 3 + 3x + 2x^2 + 2x^3, g(x) = x^4 - 1.$$

Step2 对多项式矩阵 $\begin{pmatrix} f(x) & 1 \\ g(x) & 0 \end{pmatrix}$ 经初等行变

换化为 $\begin{pmatrix} d(x) & u(x) \\ 0 & s(x) \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} f(x) & 1 \\ g(x) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^3 + 2x^2 + 3x + 3 & 1 \\ x^4 - 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x+1 & -\frac{1}{5}x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\ 0 & x^3 - x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Step3 $d(x) = x+1 \neq 1$, 得 A 是奇异阵, 令 $g_1(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.

Step4 对多项式矩阵 $\begin{pmatrix} f(x)d(x) & 1 \\ g_1(x) & 0 \end{pmatrix}$ 经初等

行变换化为 $\begin{pmatrix} 1 & u(x) \\ 0 & s(x) \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} f(x)d(x) & 1 \\ g_1(x) & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 6x + 3 & 1 \\ x^3 - x^2 + x - 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{40}(11 - 20x + 11x^2) \\ 0 & x^3 - x^2 + x - 1 \end{pmatrix},$$

得

$$u(x) = \frac{1}{40}(11 - 20x + 11x^2),$$

$$d(x)u(x) = \frac{1}{40}(11 - 9x - 9x^2 + 11x^3).$$

Step6 计算

$$A^{(1,2)} = d(\pi)u(\pi) \times C^g(1, 0, \dots, 0)^T =$$

$$C\left(\frac{11}{40}, -\frac{9}{40}, -\frac{9}{40}, \frac{11}{40}\right)C^3(1, 0, 0, 0)^T =$$

$$\frac{1}{40} \begin{pmatrix} 11 & 11 & -9 & -9 \\ 11 & -9 & -9 & 11 \\ -9 & -9 & 11 & 11 \\ -9 & 11 & 11 & -9 \end{pmatrix}.$$

参考文献:

[1] Davis P J. Circulant matrices[M]. New York: John Wiley

and Sons, 1979.

[2] You Zhaoyong, Lu Hao. Some properties of rational g -circulant and complexity of inverting g -circulant[J]. Journal of Mathematical Research and Exposition, 1990(1):121-125.

[3] Cline R E. Generalized inverses of certain Toeplitz matrices[J]. Linear Algebra and its Appl, 1974, 8:25-33.

[4] 江兆林, 刘三阳. r -循环矩阵求逆和广义逆的 Euclid 算法[J]. 电子科技大学学报, 2004, 33(3):312-315.

[5] 张小红, 蔡秉衡. 高等代数专题研究选编[M]. 西安: 陕西科学技术出版社, 1992.

[6] 张荣娥. g -循环矩阵求逆的谱分解和 Jordan 块结构[J]. 宁波大学学报: 理工版, 2002, 15(3):10-13.

[7] 张荣娥. g -轮换矩阵的特征值和对角化[J]. 信阳师范学院学报: 自然科学版, 1999, 12(3):270-273.

An Algorithm for Fast Seeking Inverse and Generalized Inverse of g -Circulant Matrices

ZHANG Rong-e

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: Using the elementary row operations of matrix in polynomial ring, an algorithm is presented for fast calculating the inverse and generalized inverse of a g -circulant matrix with some numerical paradigms given.

Key words: circulant matrix; g -circulant matrix; nonsingular matrix; elementary row operations; algorithm

(责任编辑 史小丽)