

巴拿赫空间中 Landweber 迭代算法的收敛性

杜玲玲, 王金平*

(宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 为了得到可逆问题的近似解, 在 Banach 空间中引入 Bregman 距离, 构造迭代步长, 得到 Bregman 距离序列在迭代中单调递减的性质. 然后利用非线性 Landweber 迭代算法, 证明了该算法的收敛性.

关键词: Banach 空间; Bregman 距离; 非线性 Landweber 迭代算法; 对偶映射

中图分类号: O177.6; O175.5 文献标志码: A 文章编号: 1001-5132 (2016) 02-0085-04

在 Hilbert 空间中, 运用迭代算法对可逆问题解的研究取得了一定成果. 如早期文献[1]分析了 Landweber 迭代算法应用于非线性不适定问题的收敛性; 文献[2]提出了运用高斯牛顿迭代法的收敛性解决问题; 文献[3]利用迭代算法给出了该问题相关方面的研究. 随后, 一些迭代算法被推广到 Banach 空间, 也取得了不少研究成果, 如文献[4]利用非光滑算子给出了 Tikhonov 正则化方法在 Banach 空间中的收敛速度. 随着研究的进一步深入, 在 Banach 空间中探讨可逆问题逐渐成为一个备受关注的领域. 因传统的变分迭代算法易受各种条件的约束限制, 因而不易实现. 在引入 Bregman 距离定义后, 非线性 Landweber 迭代算法被提出, 很多问题得到了解决. 文献[5-7]从各个方面对非线性 Landweber 迭代算法进行了研究.

本文在前人研究的基础上, 通过构造迭代步长, 得到了 Bregman 距离在该迭代算法中单调递减的性质. 结合已有的相关成果, 给出了在无扰动因素影响下, 非线性 Landweber 迭代算法的收敛性, 从而解决了可逆问题中的求解.

1 预备知识

设 X 和 Y 都是 Banach 空间, 其对偶空间分别是 X^* 和 Y^* . 我们讨论如下线性不适定算子方程解的问题, 设算子方程为:

$$Ax = y, x \in D(A), \quad (1)$$

其中, $A: D(A) \subset X \rightarrow Y$ 是线性连续算子, 且与其对偶 A^* 之间满足 $\|A\| = \|A^*\|$. 在实际应用中, 收集到的数据一般会受到各种因素的影响, 这种具有扰动的数据与实际数据之间满足如下条件:

$$\|y - y^\delta\| \leq \delta. \quad (2)$$

为方便后续讨论, 先介绍一些预备知识.

定义 1^[6] (1)对任意的 $x \in X$, $x^* \in X^*$, 定义对偶内积为 $\langle x, x^* \rangle = \langle x^*, x \rangle = x^*(x)$; (2)设 $p, q > 1$, 如果 $1/p + 1/q = 1$, 那么称 p 与 q 互为共轭指数.

定义 2^[8] (1)设 X 是 Banach 空间, 若存在某个正数 C , 使凸性模量 $\delta_X: [0, 2] \rightarrow [0, 1]$ 满足条件:

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf \{1 - \frac{1}{2} \|x + y\| : \|x\| = \|y\| = 1,$$

$$\|x - y\| \geq \varepsilon\} \geq C\varepsilon^p,$$

则称 Banach 空间 X 是 p 阶凸的.

(2)设 X^* 是 Banach 空间, 如果存在某个正数 G , 使得光滑性模 $\rho_{X^*}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 满足条件:

$$\rho_{X^*}(\tau) = \frac{1}{2} \sup \{\|x^* + y^*\| + \|x^* - y^*\| - 2\|x^*\| = 1,$$

$$\|y^*\| \leq \tau\} \leq G\tau^q,$$

称 Banach 空间 X^* 是 q 阶光滑的.

定义 3^[7] 设 X 是 Banach 空间, 根据度规函数 $t \rightarrow t^{p-1}$ 定义该空间中的对偶映射 $J_p: X \rightarrow 2^{X^*}$ 为:

$$J_p(x) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x \rangle =$$

$$\|x\| \|x^*\|, \|x^*\| = \|x\|^{p-1}. \quad (3)$$

注记 1 若从 $X \rightarrow X^*$ 的对偶映射是单射, 则称空间 X 是光滑的, 反之亦然.

定义 4^[5] 设 X 是 p 阶光滑的 Banach 空间, 对于任意的 $x, y \in X$, 定义 x 与 y 之间的 Bregman 距离为:

$$\Delta_p(x, y) = \frac{1}{q} (\|x\|^p - \|y\|^p) - \langle J_p(x) - J_p(y), y \rangle. \quad (4)$$

引理 1^[8] 设 X^* 是 q 阶光滑的 Banach 空间, 对于任意的 $x^*, y^* \in X^*$, 存在常数 $K_q > 0$, 使得:

$$\frac{1}{q} \|y^*\|^q - \frac{1}{q} \|x^*\|^q - \langle J_q(x^*), y^* - x^* \rangle \leq \frac{K_q}{q} \|x^* - y^*\|^q. \quad (5)$$

证明参见文献[8].

引理 2^[5] 设 X 是光滑且一致凸的 Banach 空间, 对任意的 $x, y \in X$ 和 $\{x_n\} \subset X$, 有如下结论:

(I) 若序列 $\{\Delta_p(x_n, x)\}$ 有界, 则序列 $\{x_n\}$ 有界.

(II) 如果对任意的正数 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得当 $k, l \geq n_0$ 时, 有 $\Delta_p(x_k, x_l) < \varepsilon$, 且序列 $\{x_n\}$ 是有界的, 则序列 $\{x_n\}$ 是一个 Cauchy 序列.

证明参见文献[5].

引理 3^[6] 设 X 是光滑且一致凸的 Banach 空间, 满足 $D(A) \subset X$, $D(A) \cap B_\rho(x_0) = B_\rho(x_0)$, $y \in R(A)$, 其中 x_0 表示根据精确解条件设定的一个迭代初始值, $B_\rho(x_0)$ 表示一个以 x_0 为中心, ρ 为半径的球.

(I) 若方程 $Ax = y$ 在 $B_\rho(x_0)$ 中是可解的, 则关于 x_0 的最小范数解 $x^\dagger$ 存在且唯一.

(II) 若 $x^\dagger \in \text{int}(B_\rho(x_0))$, 则 $J_p(x^\dagger) \in \overline{R(A^*)}$.

(III) 若存在 $\tilde{x} \in B_\rho(x_0)$, 且满足条件:

$$J_p(\tilde{x}) \in \overline{R(A^*)}, \quad \tilde{x} - x^\dagger \in N(A), \quad (6)$$

则 $\tilde{x} = x^\dagger$.

证明 (I) 设集合 $M = \{x \in B_\rho(x_0) : Ax = y\}$. 由 A 是线性连续算子且 $y \in R(A)$ 可知, 集合 M 是 X 的一个非空闭子集. 根据文献[5]中定理, 可得关于 x_0 的最小范数解存在且唯一.

(II) 对任意的 $z \in N(A)$, 存在正数 $\varepsilon > 0$, 使得

$$x^\dagger \pm z \in (x^\dagger + N(A)) \cap B_\rho(x_0) =$$

$$\{x \in B_\rho(x_0) : Ax = y\} = M.$$

利用文献[5]中定理可得:

$$\langle J_p(x^\dagger), x^\dagger \rangle \leq \langle J_p(x^\dagger), x^\dagger \pm \varepsilon z \rangle,$$

$$\text{故 } \langle J_p(x^\dagger), z \rangle = 0.$$

$$\text{因此, } J_p(x^\dagger) \in (N(A))^\perp = \overline{R(A^*)}.$$

(III) 假设存在 $\tilde{x} \in B_\rho(x_0)$ 且满足条件(6), 则根据上述结论可以找到一个序列 $u_n \in Y^*$, 使得:

$$J_p(\tilde{x}) - J_p(x^\dagger) = \lim_{n \rightarrow \infty} A^* u_n.$$

又

$$\tilde{x} - x^\dagger \in N(A),$$

所以

$$\begin{aligned} \langle J_p(\tilde{x}) - J_p(x^\dagger), \tilde{x} - x^\dagger \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle A^* u_n, \tilde{x} - x^\dagger \rangle = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_n, A(\tilde{x} - x^\dagger) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

结合文献[5]中定理, 可得 $\tilde{x} = x^\dagger$.

2 主要结果

设 X 是光滑且 p 阶一致凸的 Banach 空间, Y 是光滑的 Banach 空间. 考虑下面的非线性 Landweber 迭代算法:

Step1 选定 $p, r \in (1, \infty)$, 初始值 $x_0^\delta \in B_\rho(x_0)$, $x_0^\delta = J_q(x_0^*)$, 且满足条件 $\Delta_p(x_0^\delta, x_*) < (K_q \rho^p)/p$ (K_q 为引理 1 中的常数), 选择参数 $C \in (0, K_q^{1/(1-q)})$, $\tau \in (0, 1)$, $D = 1/\tau$.

Step2 停止法则

(I) 当 $\delta > 0$ 时, 如果满足条件 $\|Ax_n^\delta - y^\delta\| < \tau\delta$, 其中 $n \geq k_*$ (k_* 表示第一次满足上述条件的迭代指数), 则迭代停止, 否则继续.

(II) 当 $\delta = 0$ 时, 如果满足条件 $\|Ax_n - y\| = 0$, 则迭代停止, 否则继续.

Step3 迭代步骤

$$J_p(x_{n+1}^\delta) = J_p(x_n^\delta) - \mu_n A^* J_r(Ax_n^\delta - y^\delta), \quad (7)$$

$$x_{n+1}^\delta = J_q(J_p(x_{n+1}^\delta)), \quad (8)$$

其中: 当 $\delta > 0$ 时,

$$\mu_n = \frac{C(1-D)^{p-1} q^{p-1} \|Ax_n^\delta - y^\delta\|^{p-r}}{\|A\|^p}, \quad (9)$$

当 $\delta = 0$ 时,

$$\mu_n = \frac{Cq^{p-1} \|Ax_n - y\|^{p-r}}{\|A\|^p}. \quad (10)$$

注记 2 当 $\delta = 0$ 时, x_n 替代 x_n^δ , 替代 y_n^δ .

定理 1 设 X^* 是 q 阶光滑的 Banach 空间, 且方程(1)存在一个解 $x_* \in B_\rho(x_0)$, A 和 A^* 是连续的线

性算子, $D(A) \cap B_\rho(x_0) = B_\rho(x_0)$, 令 $\Delta_n = \Delta_p(x_n^\delta, x_*)$, 利用上述迭代算法可得:

(I) 当 $\delta > 0$ 时, 有:

$$\Delta_{n+1} - \Delta_n \leq -\frac{C(1-K_q C^{q-1})(1-D)q^{p-1}\|Ax_n^\delta - y^\delta\|^p}{\|A\|^p}. \quad (11)$$

(II) 当 $\delta = 0$ 时, 有:

$$\Delta_{n+1} - \Delta_n \leq -\frac{C(1-K_q C^{q-1})q^{p-1}\|Ax_n - y\|^p}{\|A\|^p}. \quad (12)$$

证明 当 $\delta > 0$ 时, 由 Bregman 距离定义可得:

$$\Delta_{n+1} - \Delta_n = (1/q)(\|x_{n+1}^\delta\|^p - \|x_n^\delta\|^p) - \langle J_p(x_{n+1}^\delta) - J_p(x_n^\delta), x_* \rangle.$$

若 $0 < n < k_*$, 应用(2)、(3)、(5)式以及引理 1 可得:

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} - \Delta_n &= (1/q)(\|J_p(x_{n+1}^\delta)\|^q - \|J_p(x_n^\delta)\|^q) - \\ &\quad \langle J_p(x_{n+1}^\delta) - J_p(x_n^\delta), x_* \rangle \leq \\ &\quad \langle J_p(x_{n+1}^\delta) - J_p(x_n^\delta), x_n^\delta - x_* \rangle + \\ &\quad (K_q/q)\|J_p(x_n^\delta) - J_p(x_{n+1}^\delta)\|^q = \\ &\quad -\mu_n \langle J_r(Ax_n^\delta - y^\delta), Ax_n^\delta - y \rangle + \\ &\quad (K_q/q)\|\mu_n A^* J_r(Ax_n^\delta - y^\delta)\|^q = \\ &\quad -\mu_n \langle J_r(Ax_n^\delta - y^\delta), Ax_n^\delta - y^\delta \rangle + \\ &\quad \mu_n \langle J_r(Ax_n^\delta - y^\delta), y - y^\delta \rangle + \\ &\quad (K_q/q)\|\mu_n A^* J_r(Ax_n^\delta - y^\delta)\|^q \leq \\ &\quad -\mu_n \|Ax_n^\delta - y^\delta\|^r \left(1 - \frac{\delta}{\|Ax_n^\delta - y^\delta\|}\right) + \\ &\quad (K_q/q)\|\mu_n A^* J_r(Ax_n^\delta - y^\delta)\|^q \leq \\ &\quad -\mu_n \|Ax_n^\delta - y^\delta\|^r \left(1 - \frac{\delta}{\|Ax_n^\delta - y^\delta\|}\right) + \\ &\quad (K_q/q)\|\mu_n\|^q \|A\|^q \|Ax_n^\delta - y^\delta\|^{(r-1)q}. \quad (13) \end{aligned}$$

利用停止法则可得:

$$\frac{\delta}{\|Ax_n^\delta - y^\delta\|} < \frac{1}{\tau} < 1,$$

令 $D = 1/\tau$, 将(9)式代入(13)式, 可得:

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} - \Delta_n &\leq -\frac{C(1-D)^p q^{p-1} \|Ax_n^\delta - y^\delta\|^p}{\|A\|^p} + \\ &\quad \frac{K_q C^q (1-D)^p q^{p-1} \|Ax_n^\delta - y^\delta\|^p}{\|A\|^p} = \end{aligned}$$

$$-\frac{C(1-K_q C^{q-1})(1-D)^p q^{p-1} \|Ax_n^\delta - y^\delta\|^p}{\|A\|^p},$$

又, $C \in (0, K_q^{1/(1-q)})$, 所以

$$\Delta_{n+1} - \Delta_n \leq -\frac{C(1-K_q C^{q-1})(1-D)^p q^{p-1} \|Ax_n^\delta - y^\delta\|^p}{\|A\|^p} < 0,$$

从而(11)式得证.

(II) 对于(12)式的证明, 与(11)式的证明类似.

定理2 设 $\delta = 0$, q 阶光滑的 Banach 空间. 若方程(1)在 $B_\rho(x_0)$ 中的解 x_* 存在, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, 由(7)、(8)式得到的迭代序列 $\{x_n\}$ 收敛到 x_* . 如果 $x^\dagger \in \text{int}(B_\rho(x_0))$ 是关于 x_0 的最小范数解, 且满足 $x_* - x^\dagger \in N(A)$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, 序列 $\{x_n\}$ 收敛到 $x^\dagger$.

证明 由(10)式与定理 1 可得:

$$\Delta_{n+1} - \Delta_n \leq -(1-K_q C^{q-1})\mu_n \|Ax_n - y\|^r,$$

所以序列 $\{\Delta_n\}$ 单调递减且有界, 且

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \|Ax_n - y\|^r &\leq \frac{1}{1-K_q C^{q-1}} \sum_{n=0}^{\infty} (\Delta_n - \Delta_{n+1}) \leq \\ &\quad \frac{1}{1-K_q C^{q-1}} \Delta_0 < \infty. \quad (14) \end{aligned}$$

根据引理 2 知, 序列 $\{x_n\}$ 有界, 从而 $\{J_p(x_n)\}$ 和 $\{\|Ax_n - y\|\}$ 有界. 我们可以找到一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 满足下列条件:

(I) 序列 $\{\|x_{n_k}\|\}$ 收敛.

(II) 序列 $\{J_p(x_{n_k})\}$ 是弱收敛的.

(III) 当 $n < n_k$ 时, 有 $\|Ax_{n_k} - y\| < \|Ax_n - y\|$.

下面证明 $\{x_{n_k}\}$ 是 Cauchy 序列.

根据 Bregman 距离的定义, 对任意的 $k, l \in \mathbb{N}$

且 $k > l$ 有:

$$\begin{aligned} \Delta_p(x_{n_l}, x_{n_k}) &= \frac{1}{q}(\|x_{n_l}\|^p - \|x_{n_k}\|^p) + \\ &\quad \langle J_p(x_{n_k}) - J_p(x_{n_l}), x_{n_k} \rangle = \\ &\quad \frac{1}{q}(\|x_{n_l}\|^p - \|x_{n_k}\|^p) + \\ &\quad \langle J_p(x_{n_k}) - J_p(x_{n_l}), x \rangle + \\ &\quad \langle J_p(x_{n_k}) - J_p(x_{n_l}), x_{n_k} - x \rangle. \quad (15) \end{aligned}$$

由子列 $\{x_{n_k}\}$ 满足的条件(I)和(II)得, (15)式的前两部分均为零.

又因为

$$\begin{aligned} \langle J_p(x_{n_k}) - J_p(x_{n_l}), x_{n_k} - x \rangle = \\ \left| \sum_{n=n_l}^{n_k-1} \langle J_p(x_{n+1}) - J_p(x_n), x_{n_k} - x \rangle \right| = \\ \left| \sum_{n=n_l}^{n_k-1} \mu_n \langle j_r(Ax_n - y), Ax_{n_k} - y \rangle \right| \leq \\ \sum_{n=n_l}^{n_k-1} \mu_n \|Ax_n - y\|^{r-1} \|Ax_{n_k} - y\| \leq \\ \sum_{n=n_l}^{n_k-1} \mu_n \|Ax_n - y\|^r. \end{aligned}$$

应用(14)式知, 当 $l \rightarrow \infty$ 时,

$$\left| \langle J_p(x_{n_k}) - J_p(x_{n_l}), x_{n_k} - x \rangle \right| \rightarrow 0,$$

故 $\Delta_p(x_{n_l}, x_{n_k}) \rightarrow 0$. 根据引理 2 可以得到 $\{x_{n_k}\}$ 是 Cauchy 序列, 且收敛到 $\tilde{x} \in B_\rho(x_0)$.

由(III)以及 A 的连续性可得, 当 $k \rightarrow \infty$ 时,

$$\|Ax_{n_k} - y\| = \|Ax_{n_k} - Ax_*\| = \|A(\tilde{x} - x_*)\| \rightarrow 0,$$

所以 $\tilde{x} - x_* \in N(A)$.

又 $J_p(\tilde{x}) \in R(A^*)$, 由引理 3 中(III)可得, $\tilde{x} = x_*$, 即 $\{x_n\}$ 收敛到 x_* .

如果 $x^\dagger \in \text{int}(B_\rho(x_0))$, 则 $J_p(x^\dagger) \in \overline{R(A^*)}$. 又因为 $x_* - x^\dagger \in N(A)$, 所以 $x_* = x^\dagger$, 故当 $n \rightarrow \infty$ 时, 序列 $\{x_n\}$ 收敛到 $x^\dagger$.

3 结语

利用非线性迭代算法得到线性可逆问题的近似解, 通过引入引理 1 以及构造迭代步长, 使得其证明过程比文献[5]的证明更加简单. 但目前对于干扰因素存在的情况尚不能给出结果, 这还有待

于进一步研究.

参考文献:

- [1] HANKE M, EUBAUER A, HERZER O. A convergence analysis of the Landweber iteration for nonlinear ill-posed problems[J]. Inverse Problems, 1995, 72:21-37.
- [2] BAKUSHINSKII A B. The problem of the convergence of the iteratively regularized Gauss-Newton method[J]. Comput Math Phys, 1992, 32:1353-1359.
- [3] GUO J, WANG J P. Convergence analysis of the loping OS-EM iterative version of the circular radon transform [J]. Acta Mathematica Scientia, 2014(6):1875-1884.
- [4] HOFMANN B, KALTENBACHER B, POSCHL C, et al. A convergence rates result for Tikhonov regularization in Banach spaces with non-smooth operators[J]. Inverse Problems, 2007, 23:987-1010.
- [5] SCHOPFER F, LOUIS A K, SCHUSTER T. Nonlinear iterative methods for linear ill-posed problems in Banach spaces[J]. Inverse Problem, 2006, 22:311-329.
- [6] KALTENBACHER B, SCHOPFER F, SCHUSTER T. Iterative methods for nonlinear ill-posed problems in Banach spaces: Convergence and applications to parameter identification problems[EB/OL]. [2009-09-09]. <http://dx.doi.org/10.1088/0266-5611/25/6/065003>.
- [7] HEIN T, KAZIMIERSKI K. Accelerated Landweber iteration in Banachspaces[EB/OL]. [2010-04-15]. <http://dx.doi.org/10.1088/0266-5611/26/5/055002>.
- [8] XU Z B, ROACH G F. Characteristic inequalities of uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1991, 157:189-210.

Convergence Analysis on Landweber Iterative Algorithm in Banach Spaces

DU Ling-ling, WANG Jin-ping*

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: In order to obtain the approximate solution of inverse problem, we introduce the first definition of Bregman distance followed by constructing the iterative step. In this work, that the sequence of Bregman distance is monotone decreasing is derived. Then using the nonlinear Landweber iterative algorithm, the convergence of the iterative algorithm is proved in theory and the inverse problem is solved as a result.

Key words: Banach spaces; Bregman distance; nonlinear Landweber algorithm; duality mapping

(责任编辑 史小丽)