

有向循环的平衡样本设计

许 岩, 王小苗*

(宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 鉴于平衡样本设计在抽样调查中有广泛的应用背景, 因此利用组合设计理论, 讨论了带循环自同构的不含邻点的平衡样本设计, 建立了有向 CBSEC $(v, 3, \lambda)$ 存在的充要条件.

关键词: 平衡样本设计; 有向; 循环; Langford 序列

中图分类号: O157.2

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2016) 03-0019-04

近年来, 环境和生态调查中的统计问题受到了人们的广泛关注, 其中之一就是有限多个个体的数据收集和分析. 通常情况下, 相邻个体往往具有相似的信息, 因此在抽样调查中, 调查者为了得到总体最有用的信息数据, 保证抽样的准确性, 同时也为了降低成本, 一种可行的策略是在抽样时避免选取 2 个相邻的个体. 基于这种理念, Hedayat 等^[1]在 1988 年最早引入了不含邻近点的平衡样本设计, 此类设计的性质及其构造在文献[1-4]中也有所讨论. 研究表明, 从获取特殊估计量的较小方差的角度考虑, 不含邻近点的平衡样本设计具有很大的优越性. 本文将进一步研究带循环自同构的不含邻点的平衡样本设计.

1 预备知识

令 $X = (x_0, x_1, \dots, x_{v-1})$, 若 X 循环有序, 则称 x_i 和 x_{i+1} 为邻点, $i \in [0, v-2]$, x_{v-1} 与 x_0 也为邻点.

定义 1 设 X 是一个循环有序的 v 元集, $\mathcal{B}$ 是 X 中的一些 k -子集(区组)构成的集簇. 若任意 2 个邻点不在任何 1 个区组中出现, 而任意 2 个非邻点恰出现在 λ 个区组中, 则称 $(X, \mathcal{B})$ 为 1 个不含邻点的平衡样本设计, 记作 BSEC (v, k, λ) .

定义 2 令 $\mathbb{Z}_v = \{0, 1, 2, \dots, v-1\}$ 为一个 v 阶循环加群. 若 $\mathbb{Z}_v$ 为 BSEC (v, k, λ) 的一个自同构, 则称该 BSEC 为循环的, 记作 CBSEC (v, k, λ) .

关于区组大小为 3 的 BSEC 最早在文献[5-6]

中被讨论, Colbourn 等^[5]完全解决了 BSEC $(v, 3, \lambda)$ 的存在性. 而当 BSEC $(v, 3, \lambda)$ 满足循环条件时, 则由 Wei 证明了 $\lambda = 1, 2$ 时存在的充要条件^[7]. 2005 年, Zhang 和 Chang^[8]给出了对于任意的指数 λ , 循环 BSEC $(v, 3, \lambda)$ 的存在谱.

引理 1^[7-8] 存在一个 CBSEC $(v, 3, \lambda)$ 当且仅当 $v \in \{1, 3\}$, 或 $v \geq 9$ 且 $\lambda(v-3) \equiv 0 \pmod{6}$, 除了例外值 $\lambda \equiv 2 \pmod{4}$ 且 $v \not\equiv 2 \pmod{4}$.

令 $[a, b]$ 表示满足 $a \leq n \leq b$ 的整数 n 的集合, 多重集 $\lambda[a, b]$ 表示 $[a, b]$ 上的每个整数出现 λ 次, 集合 $\lambda\{a, b, c\}$ 表示 a, b, c 中的每个元素出现 λ 次.

定义 3 令 $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^t B_i$, 其中, $B_i = (0, a_i, c_i)$, $1 \leq i \leq t$. 若多重集 $\Delta^+ \mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^t \Delta^+ B_i = \lambda[2, v-2]$, $\Delta^+ \mathcal{B} = \{a_i, c_i, c_i - a_i \pmod{v}\}$, 则称 $\mathcal{B}$ 为有向循环 BSEC $(v, 3, \lambda)$, 记为 DCBSEC $(v, 3, \lambda)$, B_i 称为基区组.

引理 2 若存在一个 CBSEC $(v, 3, \lambda)$, 则存在一个 DCBSEC $(v, 3, \lambda)$.

证明 令 $\mathcal{A} = \{(0, a_i, c_i), 0 \leq i \leq \lambda(v-3)/6\}$ 为 CBSEC $(v, 3, \lambda)$ 的基区组. 取集合 $\mathcal{B} = \{(0, a_i, c_i), (c_i, a_i, 0), 0 \leq i \leq \lambda(v-3)/6\}$, 则 $\Delta^+ \mathcal{B} = \lambda[2, v-2]$. 由 DCBSEC 定义可知, $\mathcal{B}$ 构成了 DCBSEC $(v, 3, \lambda)$.

由于 DCBSEC $(v, 3, \lambda)$ 的每个基区组产生 3 个差, 而 $\lambda[2, v-2]$ 中差的总数为 $\lambda(v-3)$, 因此可以得到 DCBSEC $(v, 3, \lambda)$ 存在的必要条件如下:

引理 3 若存在一个 DCBSEC $(v, 3, \lambda)$, 则有 $\lambda(v-3) \equiv 0 \pmod{3}$.

收稿日期: 2014-12-05.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journal.g.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(11201252); 宁波市自然科学基金(2016A610079, 2016A610076).

第一作者: 许岩(1990-), 女, 河南南阳人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 组合设计与编码理论. E-mail: yanzix001@163.com

*通信作者: 王小苗(1984-), 女, 浙江温州人, 博士/讲师, 主要研究方向: 组合设计与编码理论. E-mail: wangxiaomiao@nbu.edu.cn

2 $\lambda=1,2,3,6$ 时的 DCBSEC($v,3,\lambda$)

引理 4^[9] 令 $(m,d) \equiv (0,1), (1,1), (0,0), (3,0) \pmod{(4,2)}$ 且 $m \geq 2d-1$, 则 $[d, d+3m-1]$ 可被划分成三元组 $\{a_i, b_i, c_i\}$, $1 \leq i \leq m$, 使得 $a_i + b_i = c_i$.

引理 5^[10] 令 $1 \leq d \leq 4$, 若 $(m,k) \equiv (0,1), (1,d), (2,0), (3,d+1) \pmod{(4,2)}$ 且 $m \geq 2d-3, (m/2)(2d-1-m)+1 \leq k \leq (m/2)(m-2d+5)+1$, 则 $[d, d+3m] \setminus \{k+d+m-1\}$ 可被划分成三元组 $\{a_i, b_i, c_i\}$, $1 \leq i \leq m$, 使得 $a_i + b_i = c_i$.

引理 6 若多重集 $\lambda[2, v-2]$ 可被划分成三元组 $\{a_i, b_i, c_i\}$, $1 \leq i \leq \lambda(v-3)/3$, 使得 $a_i + b_i \equiv c_i \pmod{v}$, 则存在一个 DCBSEC($v, 3, \lambda$).

证明 令 $B = \{(0, a_i, c_i), 1 \leq i \leq \lambda(v-3)/3\}$, 则 $\Delta^+ B = \lambda[2, v-2]$. 由 DCBSEC 的定义可知, B 构成 DCBSEC($v, 3, \lambda$) 的基区组.

引理 7 若 $v \equiv 0 \pmod{12}$, 则存在 DCBSEC($v, 3, 1$).

证明 当 $v \equiv 0 \pmod{12}$ 且 $v \geq 12$ 时, 由引理 4, 令 $(m, d) = (v/3-1, 2)$, 则 $[2, v-2]$ 可被划分成三元组 $\{a_i, b_i, c_i\}$, 使得 $a_i + b_i = c_i$, $1 \leq i \leq v/3-1$. 令 $B = \{(0, a_i, c_i), 1 \leq i \leq v/3-1\}$. 由引理 6 可知, B 构成了 DCBSEC($v, 3, 1$) 的基区组.

引理 8 若 $v \equiv 6 \pmod{12}$ 且 $v \geq 18$, 则存在一个 DCBSEC($v, 3, 2$).

证明 当 $v \equiv 6 \pmod{12}$ 且 $v \geq 18$ 时, $2[2, v-2]$ 可被划分成如下三元组 $\{a_i, b_i, c_i\}$, $1 \leq i \leq 2v/3-2$, 使得 $a_i + b_i \equiv c_i \pmod{v}$.

当 $v \equiv 6 \pmod{12}$ 且 $v \geq 42$ 时, 在引理 4 中取 $(m, d) = (v/3-2, 5)$, 则 $[5, v-2]$ 可被划分成三元组 $\{a_i, b_i, c_i\}$, 使得 $a_i + b_i = c_i$, $1 \leq i \leq v/3-2$. 引理 5 中取 $(m, k, d) = (v/3-3, 2v/3-7, 2)$, 则 $[2, v-7] \setminus \{v-9\}$ 可被划分成三元组 $\{a_i, b_i, c_i\}$, 使得 $a_i + b_i = c_i$, $v/3-1 \leq i \leq 2v/3-5$. 取 $\{a_i, b_i, c_i\}$, $2v/3-4 \leq i \leq 2v/3-2$ 为三元组 $\{2, v-4, v-2\}, \{3, v-6, v-3\}, \{4, v-9, v-5\}$.

当 $v=18, 30$ 时, $2[2, v-2]$ 可被划分为三元组:

$v=18$: $\{2, 8, 10\}, \{2, 9, 11\}, \{3, 12, 15\}, \{3, 13, 16\}, \{5, 7, 12\}, \{5, 9, 14\}, \{6, 10, 16\}, \{7, 15, 4\}, \{11, 13, 6\}, \{14, 8, 4\}$.

$v=30$: $\{4, 15, 19\}, \{5, 21, 26\}, \{3, 15, 18\}, \{7,$

$9, 16\}, \{11, 10, 21\}, \{12, 13, 25\}, \{19, 8, 27\}, \{17, 6, 23\}, \{2, 18, 20\}, \{4, 16, 20\}, \{6, 22, 28\}, \{10, 14, 24\}, \{12, 26, 8\}, \{3, 24, 27\}, \{9, 14, 23\}, \{22, 13, 5\}, \{11, 17, 28\}, \{7, 25, 2\}$.

由引理 6 可知, $B = \{(0, a_i, c_i), 1 \leq i \leq 2v/3-2\}$ 构成了 DCBSEC($v, 3, 2$) 的基区组.

引理 9 若 $v \equiv 4, 8 \pmod{12}$ 且 $v \geq 16$, 则存在一个 DCBSEC($v, 3, 3$).

证明 当 $v \equiv 4, 8 \pmod{12}$ 且 $v \geq 16$ 时, $3[2, v-2]$ 可被划分成如下三元组 $\{a_i, b_i, c_i\}$, $1 \leq i \leq v-3$, 使得 $a_i + b_i \equiv c_i \pmod{v}$.

当 $v \equiv 4 \pmod{12}$ 且 $v \geq 28$ 时, 引理 4 中取 $(m, d) = ((v-4)/3, 3)$, 则 $[3, v-2]$ 被划分成 $\{a_i, b_i, c_i\}$, $1 \leq i \leq (v-4)/3$, 使得 $a_i + b_i = c_i$. 引理 4 中取 $(m, d) = ((v-7)/3, 2)$, 则 $[2, v-6]$ 可被划分成 $\{a_i, b_i, c_i\}$, $(v-1)/3 \leq i \leq (2v-11)/3$, 使得 $a_i + b_i = c_i$. 引理 5 中 $(m, k, d) = ((v-7)/3, (2v-17)/3, 4)$, 则 $[4, v-3] \setminus \{v-5\}$ 可被划分成 $\{a_i, b_i, c_i\}$, $(2v-8)/3 \leq i \leq v-6$, 使得 $a_i + b_i = c_i$. 令 $\{a_i, b_i, c_i\}, v-5 \leq i \leq v-3$ 为 $\{2, v-4, v-2\}, \{2, v-5, v-3\}, \{3, v-5, v-2\}$.

当 $v \equiv 8 \pmod{12}$ 且 $v \geq 34$ 时, 引理 5 中取 $(m, k, d) = ((v-5)/3, (2v-10)/3, 2)$, 则 $[2, v-3] \setminus \{v-4\}$ 可被划分成 $\{a_i, b_i, c_i\}$, $1 \leq i \leq (v-5)/3$, 使 $a_i + b_i = c_i$. 引理 5 中, 令 $(m, k, d) = ((v-5)/3, (2v-19)/3, 3)$, 则 $[3, v-2] \setminus \{v-6\}$ 可被划分成 $\{a_i, b_i, c_i\}$, $(v-2)/3 \leq i \leq (2v-10)/3$ 使得 $a_i + b_i = c_i$. 引理 5 中令 $(m, k, d) = ((v-5)/3, (2v-13)/3, 3)$, 则 $[3, v-2] \setminus \{v-4\}$ 可被划分成 $\{a_i, b_i, c_i\}$, $(2v-7)/3 \leq i \leq v-5$, 使得 $a_i + b_i = c_i$. 令 $\{a_i, b_i, c_i\}, v-4 \leq i \leq v-3$ 为 $\{2, v-4, v-2\}$ 和 $\{2, v-6, v-4\}$.

当 $v=16, 20$, $3[2, v-2]$ 可被划分成三元组:

$v=16$: $\{3, 11, 14\}, \{5, 8, 13\}, \{2, 7, 9\}, 2\{3, 10, 13\}, 2\{5, 9, 14\}, 2\{4, 7, 11\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 6, 8\}, \{10, 12, 6\}, \{12, 12, 8\}$.

$v=20$: $\{3, 14, 17\}, \{5, 10, 15\}, \{7, 6, 13\}, \{2, 9, 11\}, \{3, 15, 18\}, \{5, 11, 16\}, \{4, 9, 13\}, \{7, 10, 17\}, \{3, 12, 15\}, \{5, 8, 13\}, \{7, 9, 16\}, \{6, 11, 17\}, \{4, 18, 2\}, \{2, 12, 14\}, \{4, 6, 10\}, \{8, 8, 16\}, \{18, 14, 12\}$.

由引理 6 可知, $B = \{(0, a_i, c_i), 1 \leq i \leq v-3\}$ 构成了 DCBSEC($v, 3, 3$) 的基区组.

引理 10 若 $v \equiv 2, 10 \pmod{12}$ 且 $v \geq 10$, 则

存在一个 DCBSEC($v, 3, 6$).

证明 当 $v \equiv 2, 10 \pmod{12}$ 且 $v \geq 10$ 时, $6[2, v-2]$ 可被划分成三元组 $\{a_i, b_i, c_i\}$, $1 \leq i \leq 2v-6$, 使得 $a_i + b_i \equiv c_i \pmod{v}$.

当 $v \equiv 2 \pmod{12}$ 且 $v \geq 26$ 时, 引理 5 中取 $(m, k, d) = ((v-8)/3, (2v-16)/3, 2)$, 则 $[2, v-6] \setminus \{v-7\}$ 可被划分成 $\{a_i, b_i, c_i\}$, 使得 $a_i + b_i = c_i$, $1 \leq i \leq (v-8)/3$. 引理 5 中取 $(m, k, d) = ((v-5)/3, (2v-10)/3, 3)$, 则 $[3, v-2] \setminus \{v-3\}$ 可被划分成 $\{a'_i, b'_i, c'_i\}$, 使得 $a'_i + b'_i = c'_i$, $1 \leq i \leq (v-5)/3$. 故 $2([3, v-2] \setminus \{v-3\})$ 可被划分成 $\{a_i, b_i, c_i\}$, 使得 $a_i + b_i = c_i$, $(v-5)/3 \leq i \leq v-6$. 利用引理 5, 令 $(m, k, d) = ((v-5)/3, (2v-16)/3, 3)$, 则 $[3, v-2] \setminus \{v-5\}$ 可被划分成三元组 $\{a'_i, b'_i, c'_i\}$, 使 $a'_i + b'_i = c'_i$, $1 \leq i \leq (v-5)/3$. 因此 $3([3, v-2] \setminus \{v-5\})$ 可被划分成 $\{a_i, b_i, c_i\}$, 使 $a_i + b_i = c_i$, $v-5 \leq i \leq 2v-11$. 令 $\{a_i, b_i, c_i\}$, $2v-10 \leq i \leq 2v-6$ 为 $\{2, v-4, v-2\}, \{3, 2, v-5, v-3\}, \{2, v-7, v-5\}$.

当 $v \equiv 10 \pmod{12}$ 且 $v \geq 34$ 时, 引理 5 中取 $(m, k, d) = ((v-4)/3, (2v-8)/3, 2)$, 则 $[2, v-2] \setminus \{v-3\}$ 可被划分成三元组 $\{a_i, b_i, c_i\}$, 使得 $a_i + b_i = c_i$, $1 \leq i \leq (v-4)/3$. 再次利用引理 5, 令 $(m, k, d) = ((v-7)/3, (2v-17)/3, 3)$, 则 $[3, v-4] \setminus \{v-6\}$ 可被划分成三元组 $\{a_i, b_i, c_i\}$, 使得 $a_i + b_i = c_i$, $(v-1)/3 \leq i \leq (2v-11)/3$. 在引理 5 中取 $(m, k, d) = ((v-4)/3, (2v-14)/3, 2)$, 则 $[2, v-2] \setminus \{v-5\}$ 可被划分成三元组 $\{a'_i, b'_i, c'_i\}$, 使得 $a'_i + b'_i = c'_i$, $1 \leq i \leq (v-4)/3$. 故 $2([2, v-2] \setminus \{v-5\})$ 可被划分成三元组 $\{a_i, b_i, c_i\}$, 使得 $a_i + b_i = c_i$, $(2v-8)/3 \leq i \leq (4v-19)/3$. 引理 5 中令 $(m, k, d) = ((v-7)/3, (2v-14)/3, 4)$, 则 $[4, v-3] \setminus \{v-4\}$ 可被划分成三元组 $\{a'_i, b'_i, c'_i\}$, 使得 $a'_i + b'_i = c'_i$, $1 \leq i \leq (v-7)/3$. 故 $2([4, v-3] \setminus \{v-4\})$ 可被划分成三元组 $\{a_i, b_i, c_i\}$, 使得 $a_i + b_i = c_i$, $(4v-16)/3 \leq i \leq 2v-11$. 令 $\{a_i, b_i, c_i\}$, $2v-10 \leq i \leq 2v-6$ 为三元组 $2\{2, v-4, v-2\}, \{2, v-5, v-3\}, \{3, v-5, v-2\}, \{3, v-6, v-3\}$.

当 $v = 10, 14, 22$, $6[2, v-2]$ 可被划分成三元组:
 $v = 10: 2\{2, 3, 5\}, 2\{6, 7, 3\}, 2\{2, 4, 6\}, 2\{2, 5, 7\}, \{3, 5, 8\}, \{3, 4, 7\}, \{7, 8, 5\}, \{4, 4, 8\}, \{6, 8, 4\}, \{8, 8, 6\}.$

$v = 14: 2\{3, 7, 10\}, 2\{5, 7, 12\}, 2\{2, 9, 11\},$

$3\{3, 5, 8\}, 2\{9, 11, 6\}, \{4, 7, 11\}, \{5, 11, 2\}, \{3, 9, 12\}, \{2, 7, 9\}, \{4, 6, 10\}, \{4, 12, 2\}, \{10, 12, 8\}, \{2, 4, 6\}, \{8, 12, 6\}, \{4, 4, 8\}, \{10, 10, 6\}.$

$v = 22: 2\{3, 17, 20\}, 2\{5, 9, 14\}, 2\{15, 17, 10\}, \{3, 9, 12\}, \{3, 8, 11\}, \{2, 11, 13\}, \{7, 8, 15\}, \{9, 10, 19\}, \{3, 7, 10\}, \{5, 11, 16\}, \{9, 18, 5\}, \{7, 11, 18\}, \{3, 11, 14\}, \{5, 7, 12\}, \{6, 9, 15\}, \{13, 17, 8\}, \{19, 8, 5\}, 2\{13, 15, 6\}, \{8, 11, 19\}, \{7, 19, 4\}, \{7, 13, 20\}, \{17, 19, 14\}, \{13, 19, 10\}, \{2, 6, 8\}, \{4, 6, 10\}, \{16, 18, 12\}, 2\{2, 16, 18\}, 2\{4, 16, 20\}, \{12, 14, 4\}, \{6, 12, 18\}, \{2, 2, 4\}, \{14, 20, 12\}.$

由引理 6 知 $\mathcal{B} = \{(0, a_i, c_i), 1 \leq i \leq 2v-6\}$ 构成了 DCBSEC($v, 3, 6$) 的基区组.

3 结论

引理 11 若 $v \in \{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 且 λ 为任意值, 则不存在 DCBSEC($v, 3, \lambda$).

证明 当 $v = 2, 4, 5, 6$ 时, 分析可得 DCBSEC($v, 3, \lambda$) 的不存在性. 当 $v = 7$ 时, 假设存在 DCBSEC($7, 3, \lambda$), 则 $\lambda[2, 5]$ 可被划分成 $\{a_i, b_i, c_i\}$, $1 \leq i \leq 4\lambda/3$, 使得 $a_i + b_i \equiv c_i \pmod{7}$. 即三元组的形式为 $\{2, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{4, 5, 2\}, \{5, 5, 3\}$, 令非负整数 x_1, x_2, x_3, x_4 分别为其个数. 而 $\{2, 3, 4, 5\}$ 中的每个元素在 $\lambda[2, 5]$ 中恰出现 λ 次, 得到如下方程组:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = \lambda, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 + x_4 = \lambda, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = \lambda, & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + 2x_4 = \lambda. & (4) \end{cases}$$

由 (1) + (4) 得 $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2\lambda$. 而 (2) + (3) 得 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2\lambda$. 2 个等式出现矛盾.

当 $v = 8$ 时, 证明过程与 $v = 7$ 时类似. 假设 DCBSEC($8, 3, \lambda$) 存在, 则 $\lambda[2, 6]$ 可被划分成三元组 $\{a_i, b_i, c_i\}$, $1 \leq i \leq 5\lambda/3$, 使得 $a_i + b_i \equiv c_i \pmod{8}$. 令非负整数 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ 分别是可能出现的三元组 $\{2, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{3, 3, 6\}, \{5, 5, 2\}, \{5, 6, 3\}, \{6, 6, 4\}$ 的个数. 得到下列方程组:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = \lambda, & (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 + 2x_4 + x_6 = \lambda, & (6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_7 = \lambda, & (7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 + 2x_5 + x_6 = \lambda, & (8) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 + x_4 + x_6 + 2x_7 = \lambda. & (9) \end{cases}$$

计算 $(6)/2 + (8)/2 + (7) \times 2 - (5)$, 得 $x_3 + x_4 + x_6 + 2x_7 = 2\lambda$, 与(9)式矛盾.

引理 12 若 $\lambda \equiv 1, 5 \pmod{6}$ 且 $v \equiv 6 \pmod{12}$, 或 $\lambda \equiv 3 \pmod{6}$ 且 $v \equiv 2 \pmod{4}$, 则不存在 DCBSEC $(v, 3, \lambda)$.

证明 当 $\lambda \equiv 1, 5 \pmod{6}$ 且 $v \equiv 6 \pmod{12}$, 或 $\lambda \equiv 3 \pmod{6}$ 且 $v \equiv 2 \pmod{4}$ 时, 假设存在 DCBSEC $(v, 3, \lambda)$. 一方面, $\lambda[2, v-2]$ 中奇差个数为 $\lambda(v/2 - 2)$. 由于 $v \equiv 2 \pmod{4}$ 且 λ 为奇数, 故 $\lambda(v/2 - 2)$ 是奇数. 另一方面, 每个基区组产生 0 或 2 个奇差, 因此奇差的总数是偶数, 与上述证明矛盾. 得证.

现在给出本文的主要结论:

定理 1 存在一个 DCBSEC $(v, 3, \lambda)$ 当且仅当 $v \in \{1, 3\}$, 或 $v \geq 9$ 且 $\lambda(v-3) \equiv 0 \pmod{3}$, 除了例外值(1) $\lambda \equiv 1, 5 \pmod{6}$ 且 $v \equiv 6 \pmod{12}$, (2) $\lambda \equiv 3 \pmod{6}$ 且 $v \equiv 2 \pmod{4}$.

证明 由引理 3 可得必要性. 当 $v \in \{1, 3\}$ 时的 DCBSEC 是平凡的. 由引理 11 知, 只需证明 $v \geq 9$ 时的充分性即可.

当 $\lambda \equiv 1, 5 \pmod{6}$ 且 $v \equiv 6 \pmod{12}$, 或 $\lambda \equiv 3 \pmod{6}$ 且 $v \equiv 2 \pmod{4}$ 时, 其不存在性由引理 12 给出. 当 $\lambda \equiv 1 \pmod{2}$ 且 $v \equiv 0 \pmod{12}$ 时, 重复引理 7 中 DCBSEC $(v, 3, 1)$ 的基区组 λ 次, 得到 DCBSEC $(v, 3, \lambda)$. 当 $\lambda \equiv 0, 2, 6, 10 \pmod{12}$ 且 $v \equiv 6 \pmod{12}$ 时, 由引理 8 知存在 DCBSEC $(v, 3, 2)$, 重复 DCBSEC 基区组 $\lambda/2$ 次得 DCBSEC $(v, 3, \lambda)$.

当 $\lambda \equiv 3 \pmod{6}$ 且 $v \equiv 4, 8 \pmod{12}$ 时, 由引理 9 知存在 DCBSEC $(v, 3, 3)$. 重复 DCBSEC $(v, 3, 3)$ 的基区组 $\lambda/3$ 次得 DCBSEC $(v, 3, \lambda)$. 当 $\lambda \equiv 0 \pmod{6}$ 且 $v \equiv 2, 10 \pmod{12}$ 时, 重复引理 10 中 DCBSEC

$(v, 3, 6)$ 的基区组 $\lambda/6$ 次, 得到所需的 DCBSEC $(v, 3, \lambda)$. 对于剩下的情形, 由引理 1 和引理 2 得证.

参考文献:

- [1] HEDAYAT A S, RAO C R, STUFKEN J. Sampling plans excluding contiguous units[J]. Statist Plann, 1988, 19(2): 159-170.
- [2] HEDAYAT A S, RAO C R, STUFKEN J. Designs in survey sampling avoiding contiguous units[J]. Handbook of Statistics, 1988, 6(3):575-583.
- [3] SEE K, SONG S Y, STUFKEN J. On a class of partially incomplete block designs with applications in survey sampling[J]. Theory Methods, 1997, 26(1):1-13.
- [4] STUFKEN J. Combinatorial and statistical aspects of sampling plans to avoid the selection of adjacent units[J]. J. Comb. Inform. System Sci, 1993, 18(2):149-160.
- [5] COLBOURN C J, LING A C H. A class of partial triple system with applications in survey sampling[J]. Theory Methods, 1988, 27(4):1009-1018.
- [6] COLBOURN C J, ROSA A. Quadratic leaves of maximal partial triple systems[J]. Graphs Combin, 1982, 2(1): 317-337.
- [7] WEI R. Cyclic BSEC of block size 3[J]. Discrete Mathematics, 2002, 250(1):291-298.
- [8] ZHANG J, CHANG Y. The spectrum of cyclic BSEC with block size three[J]. Discrete Mathematics, 2005, 305(1):312-322.
- [9] SHALABY N. Skolem and Langford sequences, In: Handbook of Combinatorial Designs[M]. 2nd ed. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2007:612-616.
- [10] ZHANG J, CHANG Y. The spectrum of cyclic BSA $(v, 3, \lambda; \alpha)$ with $\alpha = 2, 3$ [J]. J Combin Designs, 2005, 13(5):313-335.

Directed Cyclic Balanced Sampling Plans

XU Yan, WANG Xiao-miao*

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: The balanced sampling plans are widely applied in sampling survey. Using the combinatorial design theory, the balanced sampling plans excluding contiguous units (BSEC) having cyclic automorphisms are discussed. The necessary and sufficient conditions for the existence of a directed cyclic BSEC $(v, 3, \lambda)$ are established.

Key words: balanced sampling plan; directed; cyclic; Langford sequence

(责任编辑 章踐立)