

两类特殊三次空间 Bézier 曲线的挠率特征分析

王秋霞, 朱如媛, 徐晨东*

(宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 空间 Bézier 曲线的挠率在几何造型中被广泛应用. 文中利用笛卡尔符号法则讨论了两种特殊三次空间 Bézier 曲线的挠率单调性问题, 最后得出当空间三次 Bézier 曲线的控制边相等且中间控制边和相邻两控制边的夹角相等时, 挠率仅有一个极小值; 而当两夹角相等但控制边长成等差数列时, 文中给出了挠率单调及极值存在的充分条件.

关键词: 三次空间 Bézier 曲线; 笛卡尔符号法则; 挠率; 单调

中图分类号: O186.1

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2016) 03-0013-06

空间曲线在 CAD 和 CAGD 的造型设计中发挥着重要的作用, 它包含隐式化和参数化两种表现形式^[1]. 特别是 Bernstein-Bézier 形式的参数曲线在 CAGD 中应用很广泛, 原因之一就是由于其经典的几何特征. 并且曲率在曲线设计方面、挠率在曲线造型方面都有着重要应用, 例如过山车的轨道设计、高架道路设计、数控加工技术中刀具加工路线的设计以及公路线形的设计等都需要对空间曲线的挠率进行限制. 一些造型设计中需要具有几何光滑要求和满足审美需要的曲线或曲面, 而要保证这两种要求, 往往需要所构造的曲线光顺, 设计者可以将一些曲率挠率单调变化的曲线段进行拼接从而得到需要的光顺曲线. 而在对两段曲线段进行连续拼接时, 也需保证曲率或挠率连续^[2]. 另外, 在构造光顺曲线去逼近已知曲线, 以及实现几何连续的样条曲线逼近等方面, 都需要对曲率或挠率进行分析.

由于 Bézier 曲线具有较好的几何性质以及便于设计和分析, 目前已有许多学者对其进行了广泛研究, 特别是关于其曲率特征的分析. 如 1992 年, Sapidis 和 Frey^[3]给出了二次 Bézier 曲线曲率单调的充分必要条件; 1996 年, Frey 和 Field^[4]分析了标准形式下二次有理 Bézier 曲线的曲率分布情况, 以及在两端点和权值固定时曲率单调的等价条件;

1998 年, Ahn 和 Kim^[5]利用曲线细分的性质以及圆锥曲线的对称性研究了二次有理 Bézier 曲线曲率单调的充分必要条件; 1999 年, Katsuyuki 等^[6]通过对曲率求导得出二次有理 Bézier 曲线曲率单调或有局部极值的充分必要条件; 2000 年, 王玉林等^[7]结合控制边的夹角研究推导出二次有理 Bézier 曲线的曲率单调条件.

挠率是曲线几何性质中另一个非常重要的属性, 它反映了一条曲线的扭曲程度, 然而由于涉及的导数阶数比较高、计算复杂等原因, 目前相关曲线挠率的研究结果并不多. 2006 年, Farin^[8]从矩阵角度提出了 Class A Bézier 曲线的概念, 此种曲线满足曲率挠率单调变化; 2008 年, 曹娟等^[9]在 Farin 工作的基础上重新给出了满足细分性质的 Class A 矩阵, 从而保证了构造出的 Class A Bézier 曲线的曲率挠率单调性. 本文将借助笛卡尔符号法则对两类特殊三次空间 Bézier 曲线的挠率变化情况进行研究.

1 预备知识

1.1 Bézier 曲线定义

定义 2.1 n 次参数曲线段

$$B(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i, 0 \leq t \leq 1, \quad (1)$$

收稿日期: 2015-10-27.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journallg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(11101230, 11371209); 浙江省自然科学基金(LY13A010013).

第一作者: 王秋霞(1989-), 女, 河南信阳人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 计算几何. E-mail: 879204064@qq.com

*通信作者: 徐晨东(1977-), 男, 浙江宁波人, 副教授, 主要研究方向: 计算机辅助几何设计、计算几何. E-mail: xuchendong@nbu.edu.cn

为一条 n 次 Bézier 曲线, 其中 $B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i$,
($i = 0, 1, \dots, n$) 为 Bernstein 基函数, P_i 为曲线的控制
顶点. 当 $n = 3$ 时, 即为三次 Bézier 曲线.

1.2 笛卡尔符号法则

笛卡尔符号法则是研究分析高次多项式函数的
一个重要法则, 是用于确定多项式的正根或负
根个数的一种方法. 其主要内容是: 若把一元实系
数多项式按降幂方式排列, 则多项式的正根个数
要么等于相邻非零系数符号的变化次数, 要么是
比它小 2 的倍数; 而负根的个数则是把所有奇数次
项的系数变号以后, 所得到的多项式的符号的变
化次数, 或者比它小 2 的倍数.

2 三次等控制边长对称 Bézier 曲线的挠率

由 Bézier 曲线的表达式易知, 曲线由控制顶点
 P_i 和 Bernstein 基函数 $B_i^n(t)$ 唯一确定, 而与坐标系
的选取无关. 因此, 不失一般性, 下面取定 1 个坐
标系来讨论三次等控制边长对称 Bézier 曲线挠率
的单调性和极值存在情况.

三次等控制边长 Bézier 曲线方程如下:

$$B(t) = (x(t), y(t), z(t)) = \sum_{i=0}^3 B_i^3(t) P_i. \quad (2)$$

如图 1 所示, 各控制边长均相等, 且相邻两控
制边的夹角均为 $\theta \in (0, \pi)$.

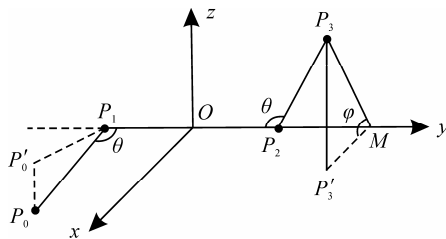


图 1 等控制边长对称 Bézier 曲线

由于 Bézier 曲线具有几何不变性, 所以以 P_1P_2
为 y 轴, 其中垂线所在的直线为 x 轴建立空间直角
坐标系(图 1), 其中 P'_0 为 P_0 在 xoy 面的投影. 为方
便计算, 可使 P_0 和 P_3 在空间中呈现一定的对称性,
这时 P_0 和 P_3 分别位于空间直角坐标系的第八卦限
与第一卦限. 由于曲线的各控制边长均相等以及
Bézier 曲线的仿射不变性, 故可将各控制边长设为
1. 其中, $\varphi \in (0, \pi/2)$ 为面 P_2P_3M 和 xoy 面所成二
面角, 由此易得各控制顶点:

$$P_0 = (\sin \theta \cos \varphi, \cos \theta - 1/2, -\sin \theta \sin \varphi),$$

$$P_1 = (0, -1/2, 0), P_2 = (0, 1/2, 0),$$

$$P_3 = (\sin \theta \cos \varphi, 1/2 - \cos \theta, \sin \theta \sin \varphi).$$

由(2)式知此曲线 $B(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 的 3 个
分量分别为:

$$x(t) = (1-t)^3 \sin \theta \cos \varphi + t^3 \sin \theta \cos \varphi,$$

$$y(t) = (1-t)^3 (\cos \theta - 1/2) - 3t(1-t)^2 / 2 +$$

$$3t^2(1-t) / 2 + t^3(1/2 - \cos \theta),$$

$$z(t) = -(1-t)^3 \sin \theta \sin \varphi + t^3 \sin \theta \sin \varphi.$$

借助 Mathematica 对曲线 $B(t)$ 求一阶导数、二
阶导数和三阶导数, 代入挠率的计算公式得:

$$\tau(t) = \frac{(B'(t), B''(t), B'''(t))}{(B'(t) \times B''(t))^2} = -\frac{\sin 2\varphi}{H(t)},$$

其一阶导为:

$$\tau'(t) = \frac{H'(t) \sin 2\varphi}{H^2(t)}, \quad (3)$$

其中, $H(t)$ 为关于 t 的四次多项式, 这里不再列
出.

为方便判断出挠率单调性及极值的存在情况,
在此令 $t = 1/(s+1)$, $0 \leq s < \infty$, 利用 Mathematica 软
件化简可得到挠率的一阶导为:

$$\tau'(t) = \frac{(1+s)^5 q_3(s)}{3(r_4(s))^2}, \quad (4)$$

其中,

$$q_3(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3,$$

$$a_0 = 4((1 + \cos \theta) \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \sin 2\varphi > 0,$$

$$a_1 = -4 \sin 2\varphi (-\sin^2 \varphi + (1 + 3 \cos \theta + 2 \cos^2 \theta) \cdot$$

$$\cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi),$$

$$a_2 = -a_1,$$

$$a_3 = -a_0,$$

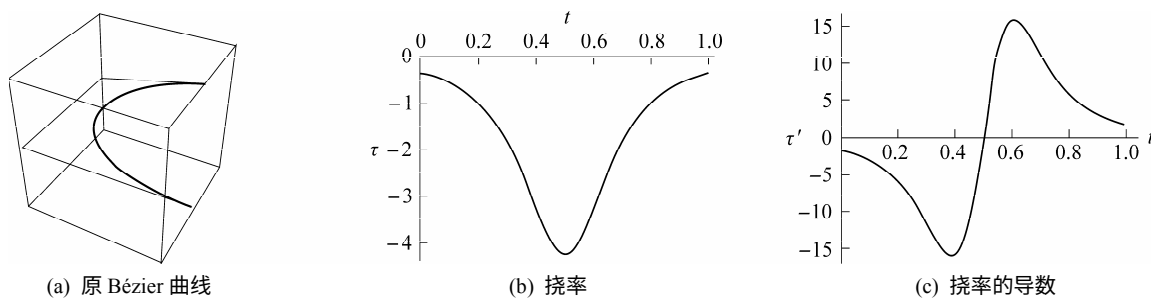
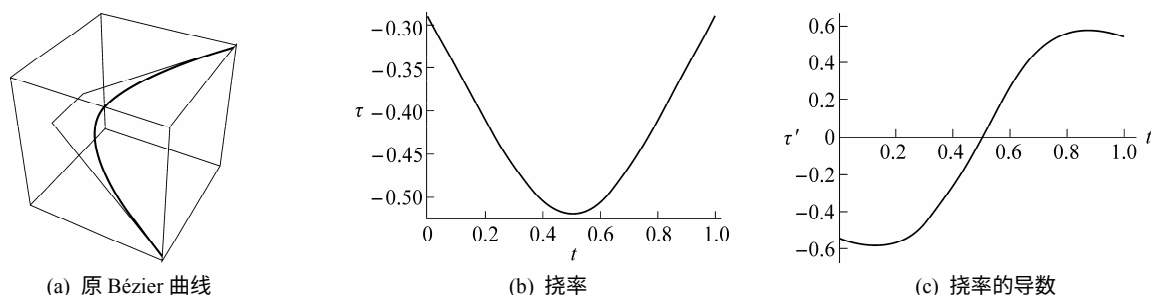
$$r_4(s) = (1 + s^2 - 2s \cos \theta)^2 \cos^2 \varphi + (-1 + s^2)^2 \cdot$$

$$\sin^2 \varphi + s^2 \sin^2 \theta \sin^2 2\varphi.$$

结合式(4), 挠率导数 $\tau'(t)$ 的符号取决于 $q_3(s)$
的符号, 进而对 $q_3(s) = 0$ 时正根的个数及挠率单调
性和存在极值个数分析如下:

(i) 若 $a_2 > 0$, 则 $a_1 = -a_2 < 0$, 即 s^n 相应系数符
号为 $(+, -, +, -)$, 由笛卡尔符号法则知有 3 个或 1 个
正根; 然而 $q_3(0) = a_0 > 0$, $q_3(1) = a_3 + a_2 + a_1 + a_0 =$
 0 , $q_3(\infty) < 0$, 从而只有 1 个正根. 此时 τ 在 $[0, 1]$
上有 1 个极小值.

(ii) 若 $a_2 \leq 0$, 则 $a_1 \geq 0$, 即相应系数符号为

图2 $\theta = \pi/3, \varphi = \pi/4$ 时的相应图形图3 $\theta = 3\pi/4, \varphi = \pi/6$ 时的相应图形

$(+, +, -, -)$, 由笛卡尔符号法则知有 1 个正根. 结合 $t=0$ 和 $t=1$ 对应 $s=\infty$ 和 $s=0$, 从而此时 τ 在 $[0, 1]$ 上也有 1 个极小值.

由以上分析可得如下定理:

定理 1 三次等控制边长的 Bézier 曲线(图 1), 当其任意两控制边夹角都相等时, 挠率有且仅有 1 个极小值.

实例 1 当 $\theta = \pi/3, \varphi = \pi/4$ 时, 此时为情况(i), τ 在 $[0, 1]$ 上有 1 个极小值, 如图 2 所示.

实例 2 当 $\theta = 3\pi/4, \varphi = \pi/6$ 时, 此时也为情况(ii), τ 在 $[0, 1]$ 上也有 1 个极小值, 如图 3 所示.

3 控制边长成等差数列的 Bézier 曲线的挠率

当三次 Bézier 曲线的控制边长成等差数列时, 可分别设为 $1, 1+\delta, 1+2\delta (\delta > 0)$, 建立的坐标系如图 4 所示.

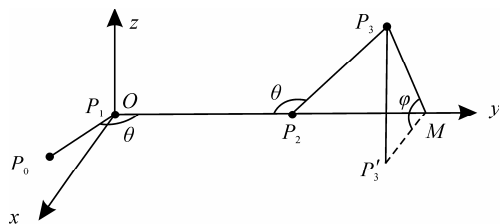


图4 控制边长成等差数列的 Bézier 曲线

可得各控制顶点分别为:

$$P_0 = (\sin \theta, \cos \theta, 0),$$

$$P_1 = (0, 0, 0),$$

$$P_2 = (0, \delta + 1, 0),$$

$$P_3 = ((1+2\delta)\sin \theta \cos \varphi, 1+\delta - (1+2\delta)\cos \theta, (1+2\delta)\sin \theta \sin \varphi).$$

因此, 此曲线 $B(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 的 3 个分量分别为:

$$x(t) = (1-t)^3 \sin \theta + t^3 (1+2\delta) \sin \theta \cos \varphi,$$

$$y(t) = (1-t)^3 \cos \theta + 3(1+\delta)t^2(1-t) + t^3(1+\delta - (1+2\delta)\cos \theta),$$

$$z(t) = t^3 (1+2\delta) \sin \theta \sin \varphi.$$

类似于前面控制边长相等的求解方法, 计算出曲线的一阶导、二阶导和三阶导, 然后代入到挠率的计算公式中, 可得:

$$\tau(t) = \frac{(B'(t), B''(t), B'''(t))}{(B'(t) \times B''(t))^2} = -\frac{(1+3\delta+2\delta^2)\sin \varphi}{3H(t)},$$

其一阶导为:

$$\tau'(t) = \frac{3(1+3\delta+2\delta^2)H'(t)\sin \varphi}{9H^2(t)},$$

其中, $H(t)$ 为关于 t 的四次多项式.

为方便判断出挠率单调性及极值的存在情况, 在此令 $t = 1/(s+1)$, $0 \leq s < \infty$, 利用 Mathematica 可求出挠率的一阶导为:

$$\tau'(t) = \frac{(1+s)^5 h_3(s)}{3(r_4(s))^2}, \quad (5)$$

其中,

$$h_3(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0,$$

$$a_3 = -2(1+\delta)^2(1+2\delta)(2+2\delta+(1+2\delta) \cdot$$

$$(1+\cos\varphi)\cos\theta)\sin\varphi,$$

$$a_2 = (2+2\delta)(1+2\delta)^2 \sin\varphi(\cos\theta\cos^2(\varphi/2) \cdot$$

$$(6+6\delta+4(1+2\delta)\cos\theta)+2(1+\delta)^2 \cdot$$

$$\cos\varphi+(1+2\delta)\sin^2\theta\sin^2\varphi),$$

$$a_1 = -(2+2\delta)(1+2\delta)^2 \sin\varphi(\cos\theta\cos^2(\varphi/2) \cdot$$

$$((6+6\delta)(1+2\delta)+4(1+2\delta)\cos\theta)+$$

$$2(1+\delta)^2 \cos\varphi+(1+2\delta)\sin^2\theta\sin^2\varphi),$$

$$a_0 = 2(1+\delta)^2(1+2\delta)^3(2+2\delta+\cos\theta+ \cdot$$

$$\cos\theta\cos\varphi)\sin\varphi.$$

由于要考虑的挠率导函数式(5)的正负问题主要取决于 $h_3(s)$ 的正负, 所以在此不再列出 $r_4(s)$ 的表达式. 观察上面的 4 个系数再结合 2 个角的取值范围有 a_0 始终大于 0, 在 $\delta > 0, \varphi \in (0, \pi/2)$ 的前提下: 若 $\theta \in (0, 2\pi/3]$, 则 $\cos\theta \geq -1/2$, 而 $1/(1+\cos\varphi) \in (0, 1)$, 所以有 $a_3 = -2(1+\delta)^2(1+2\delta)(1+(1+2\delta)(1+(1+\cos\varphi)\cos\theta))\sin\varphi < 0$ 恒成立.

下面对 a_2 的符号进行讨论.

引理 1 (a) 当 $\theta \in (0, \pi/2)$ 时, $a_2 > 0$ 恒成立;

(b) 当 $\theta \in [\pi/2, 2\pi/3]$ 时, $a_2 \geq 0$ 的充分条件是 $\delta \geq 1/4$.

证明 (a) 当 $\theta \in (0, \pi/2)$ 时, $\cos\theta \in (0, 1)$, $0 < 4(1+2\delta)\cos\theta < 4(1+2\delta)$, 则 $6+6\delta < 6+6\delta+4(1+2\delta)\cos\theta < 10+14\delta$, 从而 $a_2 > 0$.

(b) 当 $\theta \in [\pi/2, 2\pi/3]$ 时, $\cos\theta \in [-1/2, 0]$, 对 a_2 化简整理可得,

$$a_2 = (2+2\delta)(1+2\delta)^2 \sin\varphi(-(1+2\delta)\sin^2\theta \cdot \cos^2\varphi + (3(1+\delta)\cos\theta + 2(1+2\delta)\cos^2\theta + 2(1+\delta)^2)\cos\varphi + 3(1+\delta)\cos\theta + 2(1+2\delta)\cos^2\theta + (1+2\delta)\sin^2\theta).$$

令 $t = \cos\varphi \in [0, 1]$, 则上式可记为:

$$a_2 = f(t)(2+2\delta)(1+2\delta)^2 \sin\varphi,$$

其中,

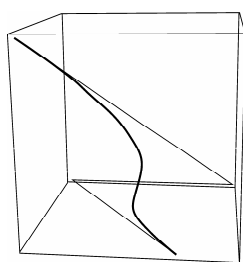
$$f(t) = (-(1+2\delta)\sin^2\theta)t^2 + (3(1+\delta)\cos\theta + 2(1+2\delta)\cos^2\theta + 2(1+\delta)^2)t + 3(1+\delta)\cos\theta + 2(1+2\delta)\cos^2\theta + (1+2\delta)\sin^2\theta.$$

可将 $f(t)$ 看作关于 t 的二次函数, a_2 的正负取决于二次函数 $f(t)$ 的正负. 要保证 $a_2 \geq 0$, 需有 $f_{\min}(t) \geq 0$. 经一系列分析推导知, 当 $\theta \in [\pi/2, \pi)$ 时, 此时必有 $\delta \geq 1/4$.

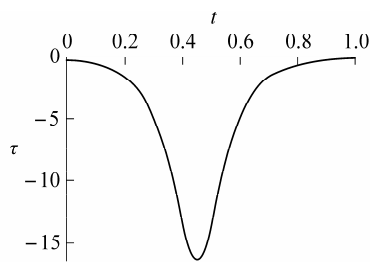
引理 2 当 $\theta \in (2\pi/3, \pi)$ 时, $a_2 \geq 0$ 的充分条件是 $\delta \geq 1$ (证明类似于引理 1 的推导).

定理 2 (i) 若 $\theta \in (0, \pi/2)$, 曲线挠率有 1 个极小值; (ii) 若 $\theta \in [\pi/2, 2\pi/3]$, 且 $\delta \geq 1/4$ 时, 挠率也有 1 个极小值; (iii) 若 $\theta \in (2\pi/3, \pi)$, 且 $\delta \geq 1$ 时, 挠率单调递增或有 1 个极小值.

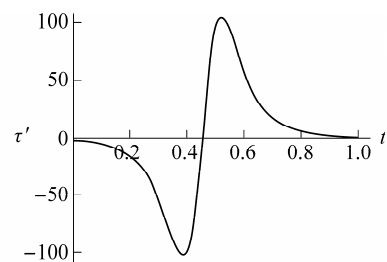
证明 (i) $\theta \in (0, \pi/2)$ 时, 由引理 1 可知 $a_2 > 0$; 结合 a_1 的表达式, 显然有 $a_1 < 0$. 而 $a_0 > 0$, $a_3 < 0$, 即有 s^n ($n=0, 1, 2, 3$) 的相应系数符号为 $(+, -, +, -)$,



(a) 原 Bézier 曲线

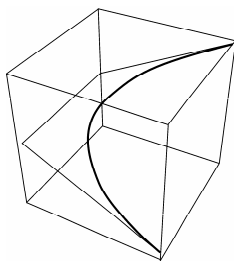


(b) 挠率

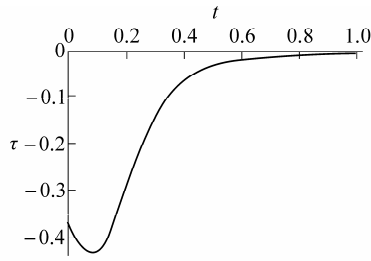


(c) 挠率的导数

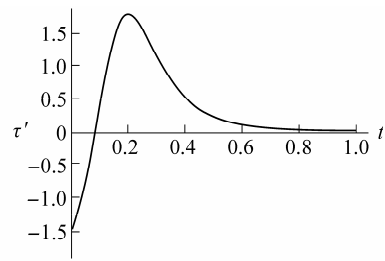
图 5 $\delta=0.2, \theta=\pi/6, \varphi=\pi/4$ 时的相应图形



(a) 原 Bézier 曲线



(b) 挠率



(c) 挠率的导数

图 6 $\delta=6, \theta=\pi/2, \varphi=\pi/5$ 时的相应图形

由笛卡尔符号法则知 $h_3(s)=0$ 有 3 个或 1 个正根; 然而 $h_3(0)=a_0>0$, $h_3(1)=4\delta(1+\delta)(2(1+\delta)^2-(1+2\delta)\cos\theta(1+\cos\varphi))>0$, $h_3(\infty)<0$, 从而只有 1 个正根. 此时 τ 在 $[0,1]$ 上也有 1 个极小值.

(ii) $\theta \in [\pi/2, 2\pi/3]$ 且 $\delta \geq 1/4$ 时, $a_2 \geq 0$, 此时同(i)的分析, 挠率有 1 个极小值.

(iii) $\theta \in (2\pi/3, \pi)$, 且 $\delta \geq 1$ 时, $\cos\theta \in (-1, -1/2)$, 对 a_1 化简整理得,

$$a_1 = -(2+2\delta)(1+2\delta)^2 \sin\varphi((1+2\delta)(1+\cos\varphi)^2 \cdot \cos^2\theta + 3(1+\delta)(1+2\delta)(1+\cos\varphi)\cos\theta + 2(1+\delta)^2 \cos\varphi + (1+2\delta)(1-\cos^2\varphi)).$$

令 $x = \cos\theta \in (-1, -1/2)$, 则上式可记为 $a_1 = -g(x)(2+2\delta)(1+2\delta)^2 \sin\varphi$, 其中, $g(x) = (1+2\delta) \cdot (1+\cos\varphi)^2 x^2 + 3(1+\delta)(1+2\delta)(1+\cos\varphi)x + 2(1+\delta)^2 \cdot \cos\varphi + (1+2\delta)(1-\cos^2\varphi)$.

可将此看作关于 x 的二次函数, 其对称轴为:

$$x_0 = -\frac{3(1+\delta)(1+2\delta)(1+\cos\varphi)}{2(1+2\delta)(1+\cos\varphi)^2} = -\frac{3(1+\delta)}{2(1+\cos\varphi)} < 0,$$

而 $x_0 - (-1) = 1 - \frac{3(1+\delta)}{2(1+\cos\varphi)} = \frac{2\cos\varphi - 1 - 3\delta}{2(1+\cos\varphi)} < 0$,

所以有 $x_0 < -1$.

因此, $g_{\max}(x) = g(-1/2) = h(z)/4$, 其中, $h(z) = -3(1+2\delta)z^2 + (4+2\delta-4\delta^2)z - 1 -$

$$8\delta - 12\delta^2, \quad z = \cos\varphi \in (0, 1).$$

二次函数 $h(z)$ 对称轴为 $h_0 = (2(2+\delta-2\delta^2))/(3(1+2\delta))$, 且 $h_0 - 1 = (1-4\delta-4\delta^2)/(3(1+2\delta)) < 0$, 即 $h_0 < 1$.

若 $0 < h_0 < 1$, 即 $1 \leq \delta < (1+\sqrt{17})/4$ 时, $h_{\max}(z) = (-3+6\delta+35\delta^2+28\delta^3-4\delta^4)/(-3(1+2\delta)) < 0$, 即有 $g_{\max}(x) < 0$; 若 $h_0 < 0$, $h_{\max}(z) = h(0) = -1-8\delta-12\delta^2 < 0$, 有 $g_{\max}(x) < 0$.

综上 $g(x) < 0$. 由 δ 和 φ 取值范围可知 $-(2+2\delta)(1+2\delta)^2 \sin\varphi < 0$, 从而 $a_1 > 0$.

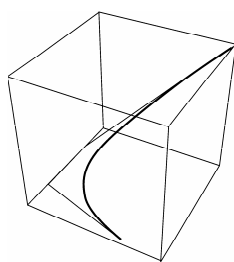
结合引理 2, 可知 $a_2 \geq 0$, 而 $a_0 > 0$, 即有 s^n ($n=0,1,2,3$) 的相应系数符号为 $(+, +, +, ?)$ (这里, a_3 的符号可能为正也可能为负, 故用 ? 代替), 由笛卡尔符号法可知 $h_3(s)=0$ 无根或有 1 个正根; 而 $h_3(0)=a_0>0$, $h_3(1)>0$, 从而此时挠率 τ 在 $[0,1]$ 上单调递增或有 1 个极小值.

实例 1 当 $\delta=0.2, \theta=\pi/6, \varphi=\pi/4$ 时, 此时为情况(i), τ 在 $[0,1]$ 上有 1 个极小值, 如图 5 所示.

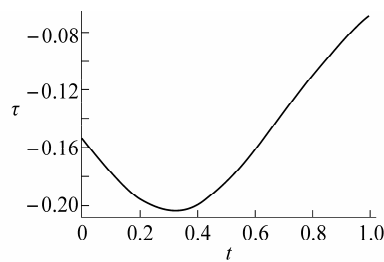
实例 2 当 $\delta=6, \theta=\pi/2, \varphi=\pi/5$ 时, 此时为情况(ii), τ 在 $[0,1]$ 上有 1 个极小值, 如图 6 所示.

实例 3 当 $\delta=1/4, \theta=2\pi/3, \varphi=\pi/8$ 时, 此时为情况(iii), 挠率 τ 在 $[0,1]$ 上有 1 个极小值, 如图 7 所示.

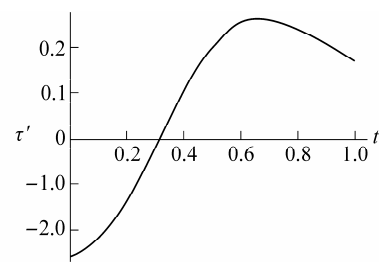
实例 4 当 $\delta=3, \theta=5\pi/6, \varphi=\pi/6$ 时, 此时为情况(iii), 挠率 τ 在 $[0,1]$ 上单调递增, 如图 8 所示.



(a) 原 Bézier 曲线

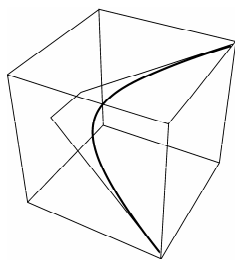


(b) 挠率

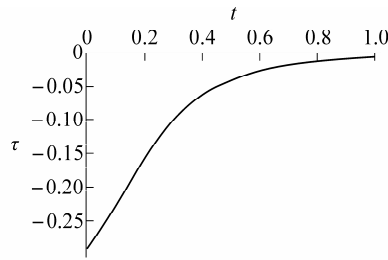


(c) 挠率的导数

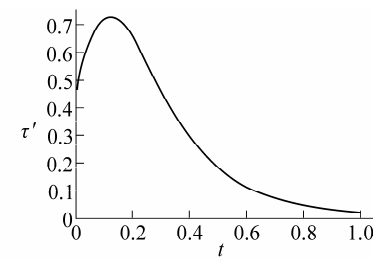
图 7 $\delta=1/4, \theta=2\pi/3, \varphi=\pi/8$ 时的相应图形



(a) 原 Bézier 曲线



(b) 挠率



(c) 挠率的导数

图 8 $\delta=3, \theta=5\pi/6, \varphi=\pi/6$ 时的相应图形

4 结语

前文利用笛卡尔符号法则分析了两类特殊的三次空间 Bézier 曲线的挠率分布情况, 并给出实例进行说明, 得出如下结论: (1)三次等控制边长且相邻边夹角相等时的 Bézier 曲线的挠率有且仅有 1 个极小值, 并在 $1/2$ 处取得. (2)当 Bézier 曲线相邻两控制边夹角都相等而控制边长成等差数列时, 给出了挠率单调递增和极小值存在的充分条件.

由于在很多实际问题中, 比如过山车的轨道设计、数控加工技术中刀具加工路线的设计等都可能需要考虑曲线挠率的分布特征, 因此本文研究的挠率单调性问题具有一定的实际意义.

参考文献:

- [1] XU C D, CHEN F L, DENG J S, et al. Cubic algebraic spline curves design[J]. Applied Mathematics, 2011, 26 (2):213-229.
- [2] 陈锦辉, 张三元, 鲍虎军, 等. G^3 连续的有理三次 Bézier 样条曲线造型[J]. 自然科学进展, 2001, 11(7):747-753.
- [3] SAPIDIS N, FREY N. Controlling the curvature of a quadratic Bézier curve[J]. Computer Aided Geometric Design, 1992, 9(2):85-91.
- [4] FREY W H, FIELD D A. Designing Bézier conic segments with monotone curvature[J]. Computer Aided Geometric Design, 2000, 17(6):457-483.
- [5] SUENAGA K, SAKAI M. On curvatures of rational quadratic Bézier segments [J]. Rep Fac Sci, 1999, 32:15-20.
- [6] AHN Y J, KIM H O. Curvatures of the quadratic rational Bézier curves[J]. Computers Math Applic, 1998, 36(9): 71-83.
- [7] 王玉林, 汪叔淳, 李迪, 等. 二次有理 Bézier 曲线单调条件的研究[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2000, 12(7):507-511.
- [8] FARIN G. Class A Bézier curves[J]. Computer Aided Geometric Design, 2006, 23(7):573-581.
- [9] CAO J, WANG G Z. A note on class A Bézier curves[J]. Computer Aided Geometric Design, 2008, 25(7):523-528.

Analysis on Torsion Characteristics of Two Kinds of Special Cubic-spatial Bézier Curves

WANG Qiu-xia, ZHU Ru-yuan, XU Chen-dong*

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: The torsion of the spatial Bézier curve is widely used in geometrical modelling. In this paper, we mainly discuss the torsion monotonicity problem of two special cubic Bézier curves by use of Descartes' rule of signs. Based on the study, it is concluded that when the control sides are of equal length and the angles between two adjacent control sides are equal, the only minimum of torsion is always available; and in the case that the two angles are equal while the control side lengths are in arithmetic progression, the sufficient conditions can be determined for the torsion monotony and the existence of extremum.

Key words: cubic-spatial Bézier curve; Descartes's rule of signs; torsion; monotone

(责任编辑 章践立)